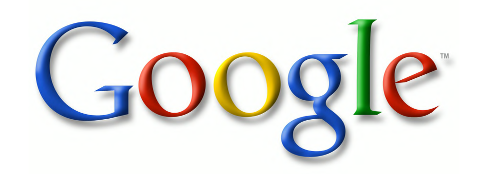


DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN XVI

O. STAUDE

ANALYTISCHE GEOMETRIE DES PUNKTES, DER GERADEN LINIE UND DER EBENE

Geometrischer Verlag

von B. G. Teubner in Leipzig.

[Angaben über Umfang, Preis usw. der einzelnen Werke finden sich in Teubner's mathematischem Katalog, der gratis und franko erhältlich ist von der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststr. 3.]

I. rie.

(A e —

Boly veram

e

Boly

Dehn Dreieck.

Eber

——

Enge t-Eukli-

d

——

Enri

Frisc

——

Graß Werke.

I

Hilb

Höld

Killi

Klei

Kraf

Loba

Pasc

Pean sch von

S

Schl

Schl lidische)

G

Simo

Stäc uf Gauß.

——

Vahl

Vero

Was

Web eometrie.

Wie

2. Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie und Kegelschnitte.

Adam, W., Repetitorium der Planimetrie.
—— Repetitorium der Stereometrie.
Alexandroff, J., Elementargeometrie, deutsch von Schuster.
Björnbo, A., Studien über Menelaos' Sphärik.
Block, C., Lehr- und Übungsbuch für den planimetrischen Unterricht an höheren Schulen.
Börner, H., Lehrbuch zur Einführung in die Geometrie.
Brockmann, F. J., Lehrbuch der elementaren Geometrie.
—— Lehrbuch der ebene metrie.

Brockmann, F. J., Materialien zu Dreieckskonstruktionen.
—— planimetrische Konstruktionsaufgaben nebst Lösung.
—— Versuch einer Methodik zur Lösung planimetr. Konstruktionsaufg.
Brückner, M., Vielecke und Vielflache; Theorie und Geschichte.
Conradt, F., Lehrbuch der ebenen Trigonometrie.
Dingeldey, F., Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme.
Dronke, A., die Kegelschnitte in synthetischer Behandlungsweise.
Erler, W., die Elemente der Kegelschnitte in synthet. Behandlung.
Frischauf, J., Elemente der Geometrie.
Geiser siehe: Steiner.
Girndt, M., Raumlehre für Baugewerkschulen.
Heinze, K., genetische Stereometrie, bearb. von Lucke.
Henrici J., und P. Treutlein, Lehrbuch der Elementar-Geometrie.
Heß, E., Lehre von der Kugelteilung.
Hippauf, H., Lösung des Problems der Trisektion mittels Konchoide.
Hofmann, F., die Konstruktionen doppelt berührender Kegelschnitte.
Holzmüller, G., methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik.
—— Einführung in das stereometrische Zeichnen.
Huebner, L., ebene und räumliche Geometrie des Maßes.
Klein, F., Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie.
Kober, J., Leitfaden der ebenen Geometrie.
Lucke, F., Leitfaden der Stereometrie.
Mattiat, D., die Raumlehre in der Volks- und Fortbildungsschule.
Milinowski, A., Geometrie für Gymnasien und Realschulen.
—— elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte mit einem Anhange über die gleichseitige Hyperbel.
Müller, Heinr., die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen.
—— die Lehre von den Koordinaten und Kegelschnitten.
—— die Elementar-Planimetrie.
—— u. Kutnewsky, Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie.
—— —— —— Ergebnisse dazu.
Müller, Hub., Leitfaden der ebenen Geometrie.
—— Leitfaden der Stereometrie.
Rausenberger, O., Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und Ebene.
Reidt, F., Sammlung von Aufgaben aus der Trigonometrie u. Stereometrie
—— —— Resultate dazu.
—— trigonometrische Analysis planimetrischer Aufgaben.
Reishaus, Th., Vorschule zur Geometrie: Lehrbuch und Aufgaben.
Reusch, J., planimetrische Konstruktionen in geometrograph. Ausführung.
Richter, A., Sammlung arithm. und trigonom. Aufgaben.
Rudio, F., Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels.
Schilke, E., Sammlung planimetrischer Aufgaben.
Schlömilch, O., Grundzüge einer Geometrie des Maßes.
Schotten, H., Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts.
Schulze, K., Leitfaden für den trigonometr. und stereometr. Unterricht.
Schuster, M., geometrische Aufgaben.
—— stereometrische Aufgaben.
—— ebene und sphärische Trigonometrie.
Sellenthin, B., mathematischer Leitfaden mit besonderer Berücksichtigung der Navigation.
Servus, H., ausführliches Lehrbuch der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie.
Simon, M., die Elementargeometrie.
—— Euklid und die 6 planimetrischen Bücher.
Steiner, J., die Kegelschnitte in elementarer Behandlung.
Thieme, H., Lehrsätze und Aufgaben aus der Stereometrie.
Treutlein und Henrici, siehe: Henrici und Treutlein.

Wehner, H., Leitfaden für den stereometr. Unterricht an Realschulen.
Wiener, Ch., über Vielecke und Vielflache.
Zehme, W., Lehrbuch der ebenen Geometrie.
Zeuthen, G. H., Grundriß einer elementar-geometrisch. Kegelschnittslehre.

3. Darstellende Geometrie.

(Projektionslehre, Axonometrie, Parallel- und Zentralprojektion oder Perspektive — siehe auch unter „Kartenprojektion".)

Beyel, Chr., über den Unterricht in der darstellenden Geometrie.
Burmester, L., Beleuchtung gesetzmäßiger Flächen.
—— Grundzüge der Reliefperspektive.
Dalwigk, F., Einführung in die darstellende Geometrie.
Disteli, M., die Steinerschen Schließungsprobleme.
Fiedler, W., die darstellende Geometrie.
—— Zyklographie.
Finsterwalder, S., die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie.
Holzmüller, G., Einführung in das stereometrische Zeichnen.
—— einige Aufgaben der darstellenden Geometrie und der Kartographie.
Klekler, K., die Methoden der darstellenden Geometrie.
Müller, C. H., und Presler, Leitfaden der Projektionslehre.
Müller, E., Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen.
Prix, E., Elemente der darstellenden Geometrie.
Reusch, E., die stereographische Projektion.
Scherling, Ch., Grundzüge der axonom. und schiefen Parallelprojektion.
Schilling, Fr., über die Anwendungen der darstellenden Geometrie.
Schüßler, R., Lehrbuch der orthogonalen Axonometrie.
Schütte, Fr., Anfangsgründe der darstellenden Geometrie.
Sturm, R., Elemente der darstellenden Geometrie.
Weiler, A., neue Behandlung der Parallelprojektionen und der Axonometrie.
Wiener, Ch., Lehrbuch der darstellenden Geometrie.
—— stereoskopische Photographien des Modelles einer Fläche 3. O.

4. Neuere synthetische (projektive) Geometrie.

(Geometrie der Lage. Kollineation und Homographie.)

Binder, W., Theorie der unikursalen Plankurven 4. bis 3. Ordnung.
Bobek, K., Einleitung in die projektivische Geometrie, bearb. n. Küpper.
Disteli, M., die Steinerschen Schließungsprobleme.
Drach, C. A. v., Einleitung in die Theorie der kubischen Kegelschnitte.
Dronke, A., die Kegelschnitte in synthetischer Behandlungsweise.
Durège, H., die ebenen Kurven 3. Ordnung.
Eberhard, V., die Grundgebilde der ebenen Geometrie.
—— zur Morphologie der Polyeder.
Enriques, F., Vorlesgn über projektive Geometrie, deutsch von Fleischer.
—— Fragen der Elementargeometrie, deutsch von Fleischer.
Fiedler, W., Zyklographie.
Fuhrmann, W., Einleitung in die neuere Geometrie.
Geiser, C. F., Einleitung in die synthetische Geometrie.
Hankel, H., Vorlesungen üb. d. Elemente der projektivischen Geometrie.
Henrici, J., und P. Treutlein, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. II. Teil.
Holzmüller, G., methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. Band III.
Kötter, E., die Entwickelung der synthetischen Geometrie.
Müller, Hub., Leitfaden d. ebenen Geometrie. I. Teil 2. Heft u. II. Teil.
—— Leitfaden der Stereometrie.
Reye, Th., synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme.

[Fortsetzung siehe Ende des Buches.]

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XVI

ANALYTISCHE GEOMETRIE DES PUNKTES, DER GERADEN LINIE UND DER EBENE

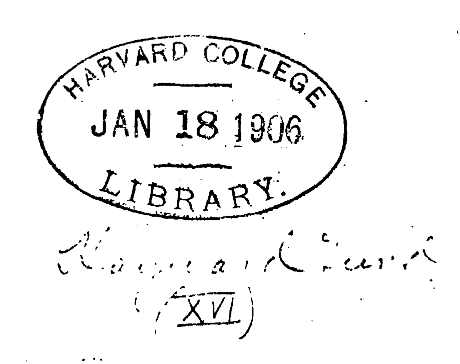
EIN HANDBUCH ZU DEN VORLESUNGEN UND ÜBUNGEN ÜBER ANALYTISCHE GEOMETRIE

VON

DR. OTTO STAUDE
O. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT ROSTOCK

MIT 387 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1905



Vorwort.

Als ich von der Verlagsbuchhandlung von *B. G. Teubner* in Leipzig die dankenswerte Aufforderung erhielt, im Anschluß an die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften ein Lehrbuch über die *Theorie der Flächen zweiter Ordnung* zu verfassen, schien es mir von vornherein unerläßlich, die Lehre von den räumlichen Gebilden *erster Ordnung* als Einleitung vorauszuschicken in ähnlicher Weise, wie es *O. Hesse* in seinen Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes getan hat. Bei der Ausarbeitung machte es sich indessen immer mehr fühlbar, daß gerade dieser Teil der räumlichen Geometrie ohne Anschluß an die Geometrie der *niederen* Mannigfaltigkeiten keine lückenlose Darstellung finden konnte (vgl. besonders §§ 65—69 des Textes).

Daher entschloß ich mich in einer besonderen Monographie eine *analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene* zu entwerfen, welche in einheitlicher und vergleichender Darstellung die Grundlehren der Koordinatengeometrie in den verschiedenen Mannigfaltigkeiten umfaßt.

Nach dem Plane von *B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften* versucht das Buch mit einer systematischen Anordnung des Stoffes und mit Hinweisen auf die historische Entwicklung der Methoden vor allem den Charakter eines Lehrbuchs zu verbinden.

Den *Hauptinhalt* bildet die Erklärung und der Gebrauch der verschiedenen Koordinatensysteme, die im ersten Abschnitt für die Punktreihe und den Strahlbüschel, im zweiten für die Ebene und im dritten für den Raum, sowie für den Ebenenbüschel und das Bündel behandelt werden. Wie das Inhaltsverzeichnis näher erkennen läßt, wird in jedem einzelnen Abschnitte, im wesentlichen dem historischen Gange folgend, von dem Begriff der Cartesischen Koordinaten unter Hervorhebung der einzelnen Schritte der Weiterentwicklung bis zu den projektiven Koordinaten übergegangen und an den Gebilden erster

Ordnung die Anwendung der verschiedenen Koordinaten gezeigt. Dabei ist weniger eine erschöpfende Behandlung als eine Übersicht über die für den Gebrauch wichtigsten Begriffe und Methoden angestrebt. Als *Einigungspunkt* der gesamten Entwicklung, dessen Bedeutung (vgl. § 64) zugleich die Zusammenfassung des Stoffes in eine Monographie rechtfertigt, ist das Stichwort „Lineare Gleichungen und lineare Transformation" zu betrachten. Auch die teilweise außerhalb des Rahmens der Gebilde erster Ordnung liegenden Entwicklungen der §§ 70—72 sind deshalb dem Buche angereiht, weil sie eine unmittelbare Anwendung der linearen Transformation ausmachen.

Innerhalb dieser Anordnung ist der Charakter der *Monographie* bis ins Einzelne durchgeführt, indem jeder Artikel unter einer besonderen Überschrift eine bestimmte Aufgabe behandelt. Dadurch soll es neben der systematischen Aufeinanderfolge der gesamten Entwicklung tunlichst erreicht werden, auch jeden einzelnen Artikel aus dem Zusammenhange heraus verständlich zu machen. In diesem Sinne sind auch die zahlreichen einfachen *Figuren* aufzufassen, die, jede in der Regel nur für einen einzigen Artikel bestimmt, hauptsächlich einer schnellen Übersicht über die jedesmal in Frage kommenden Begriffe und Benennungen dienen sollen.

Als Lehrbuch bietet das Werk eine für sich allein verständliche Einleitung in die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes und ist in erster Linie als Handbuch zu den akademischen Vorlesungen und Übungen gedacht. Es legt deshalb gerade auf manche Dinge Nachdruck, die beim mündlichen Vortrag aus Mangel an Zeit und Raum naturgemäß zurücktreten müssen: auf die ausführliche Fassung der Definitionen und Lehrsätze; auf die vollständige Aufstellung häufig gebrauchter Formelsysteme auch in verschiedenen Bezeichnungsweisen (vgl. z. B. § 63, (1) und (25); § 51 und § 61); endlich auf die *Vergleichung* verwandter und analoger Betrachtungen und Formeln auseinanderliegender Kapitel (z. B. § 25, 7 und § 62, 4), die teils durch beständige Verweise im Text, teils durch die Anmerkungen erleichtert werden soll.

Die *Anmerkungen* selbst stehen außerhalb der systematischen Entwicklung. Die beiden ersten enthalten eine Zusammenstellung derjenigen Sätze über Determinanten und lineare Gleichungen, welche die überall wiederkehrenden analytischen Hilfsmittel für die Betrachtungen des Textes ausmachen. Diese Sätze sind zwar ohne Beweise, aber in ausführlicher und für die unmittelbare Anwendung fertiger Form, und zwar für die drei hauptsächlich in Betracht kommenden

Anzahlen der Elemente besonders angegeben. Die übrigen Anmerkungen enthalten neben Quellenangaben auch vergleichende Übersichten über die verschiedenen Teile des Buches. Da für die Quellenangaben neuere geschichtliche Werke, sowie die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften vorliegen, so konnte vielfach auf diese Bezug genommen werden.

Das neben dem Inhaltsverzeichnis beigegebene *Register* soll das leichte Auffinden der behandelten Gegenstände nach den Stichworten gewährleisten.

Der Verlagsbuchhandlung von Teubner habe ich nicht nur für die Anregung zu diesem Buche, sondern auch für ihr stets bereitwilliges Entgegenkommen beim Druck und für die Ausstattung des Buches meinen besten Dank auszusprechen.

Rostock, 17. September 1905. **Staude.**

Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt: **Die gerade Linie und der Strahlbüschel.**

II. Abschnitt: **Die Ebene.**

I. Kapitel: **Das gemeine Koordinatensystem.**

II. Kapitel: **Die Gleichung der geraden Linie.**

III. Kapitel: **Die Koordinaten der geraden Linie.**

IV. Kapitel: **Die homogenen gemeinen Koordinaten.**

*) Die §§ 6—9 können zunächst überschlagen und später nachgelesen werden, wenn auf sie verwiesen wird.

Seite

V. Kapitel: **Das Dreieck und das Viereck.**

VI. Kapitel: **Die Dreieckskoordinaten.**

III. Abschnitt: **Der Raum.**

I. Kapitel: **Das gemeine Koordinatensystem.**

II. Kapitel: **Die Gleichungen der Ebene und der geraden Linie.**

III. Kapitel: **Die Koordinaten der Ebene.**

IV. Kapitel: **Die homogenen gemeinen Koordinaten.**

V. Kapitel: **Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen.**

Seite

VI. Kapitel: **Die Tetraederkoordinaten.**

VII. Kapitel. **Die analytische Darstellung der projektiven Verwandtschaften.**

VIII. Kapitel: **Gleichungen zwischen den Koordinaten.**

Anmerkungen

[im Text angeführt unter „Anm. 1“ oder „[1])“ usw.].

I. Abschnitt.

Die gerade Linie und der Strahlbüschel.

§ 1. Die gemeine Koordinate des Punktes.

1. Begriff der Strecke. Zwei Punkte A und B einer *geraden Linie* (*geraden Punktreihe*) begrenzen auf ihr eine Strecke (Fig. 1a), die mit AB oder BA bezeichnet werden kann.[3])

Indem wir jedoch die beiden Punkte A und B nicht unterschiedslos als Grenzpunkte der Strecke ansehen, sondern den einen Punkt A als ihren *Anfangspunkt* von dem andern B als ihren *Endpunkt* unterscheiden, legen wir der Strecke einen bestimmten *Durchlaufungssinn* (Fortschreitungs-, Schiebungssinn) bei, der von A nach B hinführt. Wir deuten ihn (Fig. 1b) durch eine an den Endpunkt B gesetzte *Pfeilspitze* und in der entsprechenden Bezeichnung AB durch die *Reihenfolge* der Buchstaben an. Unter BA verstehen wir dann die von denselben Punkten (Fig. 1c) begrenzte Strecke mit umgekehrtem Durchlaufungssinn.

a) A B
b) A B
c) A B

Fig. 1.

2. Die absolute Länge der Strecke. Die *absolute Länge* (Größe) $\overline{AB}$ der Strecke AB (die *absolute Entfernung* der Punkte A und B *voneinander*) ist durch die Anzahl der Längeneinheiten bestimmt, die auf die Strecke gehen.[4]) Sie ist unabhängig vom Durchlaufungssinn, also:

$$\overline{BA} = \overline{AB}. \tag{1}$$

3. Die gerichtete Gerade. Einen der beiden einander entgegengesetzten Durchlaufungssinne der unbegrenzten geraden Linie nennen wir den *positiven*, den andern den *negativen Durchlaufungssinn der Geraden.* Den positiven, bei horizontaler Lage der Geraden in der Regel den nach rechts, machen wir durch einen der Geraden beigesetzten Pfeil (Fig. 2) kenntlich und nennen diese alsdann eine *gerichtete Gerade.*[5])

Fig. 2.

4. Die relative Länge einer Strecke auf einer gerichteten Geraden. Liegt nun die Strecke AB in einer gerichteten Geraden (Fig. 3), so verstehen wir unter *der (relativen) Länge AB* der Strecke[6]) (der *Entfernung* oder dem Abstande *des Punktes B vom Punkte A*) eine Zahl, die ihrem absoluten Betrage nach gleich $\overline{AB}$, übrigens aber *positiv oder negativ sein soll, je nachdem der Durchlaufungssinn der Strecke* (vgl. § 1, **1**) *mit dem positiven oder mit dem negativen Durchlaufungssinn der Geraden* (vgl. § 1, **3**) *übereinstimmt.*

A B

Fig 3.

Daher ist für dieselben beiden Punkte A, B stets[7]):

(2) $$BA = -AB \quad \text{oder} \quad AB + BA = 0.$$

5. Die Strecken dreier Punkte. Drei auf einer gerichteten Geraden liegende Punkte A, B, C (Fig. 4) begrenzen drei Strecken. Zwischen diesen besteht, in welcher Anordnung auch die drei Punkte auf der Geraden liegen mögen, immer die Beziehung[8]):

(3) $$BC + CA + AB = 0.$$

A B C

Fig. 4.

O x P

Fig. 5.

6. Die gemeine Koordinate des Punktes. In einer gerichteten Geraden sei ein fester Punkt O angenommen (Fig. 5). Er teilt die Gerade in *zwei Schenkel* (*Halbstrahlen, Halbachsen*), von denen der dem positiven Durchlaufungssinne folgende *der positive*, der andere *der negative Schenkel* genannt wird.

Jeder beliebige Punkt P der Geraden hat nach § 1, **4** von dem festen Punkte O einen bestimmten Abstand:

(4) $$x = OP,$$

der *die (gemeine) Koordinate (das Bestimmungsstück)* des Punktes P heißt.[9])

Der feste Punkt O heißt *Koordinatenanfangspunkt.* Er bildet zusammen mit dem festgesetzten Durchlaufungssinne der Geraden und der gewählten Längeneinheit *das Koordinatensystem,* auf welches sich die Koordinate x bezieht.

Bei gegebenem Koordinatensystem gehört zu jedem Punkte P der Geraden eine einzige bestimmte Koordinate x und zu jeder als Koordinate gegebenen positiven oder negativen Zahl x ein einziger bestimmter Punkt der Geraden.[10])

7. Besondere Koordinatenbeziehungen. Der Punkt O selbst hat die Koordinate $x = 0$; alle Punkte P auf dem positiven Schenkel haben positive, alle auf dem negativen Schenkel negative Koordinaten. Zwei Punkte mit entgegengesetzt gleichen Koordinaten $x = a$ und $x = -a$ haben dieselbe absolute Entfernung von O (Fig. 6).

Fig. 6.

Fig. 7.

8. Darstellung der Länge einer Strecke durch die Koordinaten der Endpunkte. Sind x und x' die Koordinaten zweier Punkte P und P' auf der Geraden (Fig. 7), so ist nach (3) und (2):

$$PP' = OP' - OP$$

oder nach (4):

$$PP' = x' - x. \tag{5}$$

Die Länge der Strecke PP' oder die Entfernung des Punktes P' vom Punkte P ist also gleich der Differenz der Koordinaten von P' und P.

9. Strecken zwischen vier Punkten. In der identischen Gleichung:

$$(x_2 - x_3)(x_1 - x_4) + (x_3 - x_1)(x_2 - x_4) + (x_1 - x_2)(x_3 - x_4) = 0$$

seien x_1, x_2, x_3, x_4 die Koordinaten von vier Punkten A, B, C, D (Fig. 8). Mit Rücksicht auf (5) folgt daher, daß die Strecken zwischen vier beliebigen Punkten A, B, C, D einer Geraden stets die Beziehung erfüllen[11]):

$$BC \cdot AD + CA \cdot BD + AB \cdot CD = 0. \tag{6}$$

Fig. 8.

Fig. 9.

10. Die Transformation der Koordinaten. Zwei in derselben ungerichteten Geraden liegende Koordinatensysteme haben zwei beliebige Anfangspunkte O und O'; je nachdem alsdann der zugehörige Durchlaufungssinn (vgl. § 1, 6) für beide Koordinatensysteme gleich (Fig. 9) oder entgegengesetzt gerichtet ist, heißen diese *gleichsinnig* oder *ungleichsinnig* (gleich oder ungleich orientiert).[12]) Wir gehen von einem Koordinatensystem mit dem Anfangspunkte O und mit gegebenem Durchlaufungssinne (Fig. 9) aus. Von einem neuen gleichsinnigen Koordinatensystem sei der Anfangspunkt O' durch seine Koordinate $x = x_0$ im alten System gegeben. Sind dann $x = OP$ und $x' = O'P$ die Koordinaten eines und desselben Punktes P in beiden Systemen, so ist nach (3) und (2):

$$OP = OO' + O'P.$$

Zwischen alter und neuer Koordinate des Punktes P besteht daher die Gleichung:

(7) $$x = x_0 + x'.$$

Wäre das neue System mit dem alten ungleichsinnig, so würde sie lauten:

(7') $$x = x_0 - x'.$$

11. Die Gleichung des Punktes. Statt die Koordinate eines Punktes unmittelbar anzugeben, kann man eine Gleichung von der Form:

(8) $$Ax + B = 0$$

geben, deren Auflösung nach x in:

(9) $$x = -\frac{B}{A}$$

die Koordinate selbst liefert. Man nennt (8) die *Gleichung des Punktes.*

12. Die Gleichungen zweier Punkte. *Zwei* durch ihre Gleichungen:

(10) $$A_1x + B_1 = 0, \qquad A_2x + B_2 = 0$$

gegebene Punkte fallen zusammen oder sind getrennt, je nachdem die *Determinante* (vgl. Anm. 1, I, (1)):

(11) $$C = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

verschwindet oder nicht verschwindet.

§ 2. Die gemeine Koordinate des Strahles.

1. Winkel zweier gerichteten Geraden. Zwei in einem Punkte S sich schneidende *gerichtete* (vgl. § 1, 3) *Geraden* (gerichtete Strahlen) a und b begrenzen mit ihren von S ausgehenden *positiven Schenkeln* (vgl. § 1, 6) zwei bestimmte *Winkel ab* (Fig. 10), einen *konkaven* und einen *konvexen.*[8]) Indem wir die beiden positiven Schenkel nicht unterschiedslos als die Schenkel eines solchen Winkels ab ansehen, sondern den Schenkel a als *Anfangsschenkel* von dem Schenkel b als *Endschenkel* unterscheiden, *legen wir dem Winkel einen bestimmten Drehungssinn bei,* in welchem der Schenkel a durch Drehung um S über den Winkel hinweg nach dem Schenkel b hingeführt wird. Wir deuten

diesen Drehungssinn sowohl bei dem konkaven als auch bei dem konvexen Winkel durch einen von a nach b hinweisenden Pfeilbogen (Fig. 10) an.

2. Die absolute Größe des Winkels. *Die absolute Größe* $\overline{ab}$ *des Winkels der gerichteten Geraden* a *und* b wird durch die absolute Länge $\overline{AB}$ (vgl. § 1, 2) des Kreisbogens bestimmt (Fig. 11), der um S mit dem Radius 1 zwischen den Schenkeln des Winkels beschrieben ist.[4]) Daher hat man stets:

$$\overline{ba} = \overline{ab}. \tag{1}$$

Wenn $\bar{\alpha}$ die absolute Größe des konkaven Winkels ab ist, so ist die absolute Größe des konvexen Winkels ab:

$$\bar{\alpha}_1 = 2\pi - \bar{\alpha} \qquad (0 \leqq \bar{\alpha} \leqq \pi). \tag{2}$$

Beide haben denselben Kosinus, aber entgegengesetzte Sinus und Tangenten:

$$\cos\bar{\alpha}_1 = \cos\bar{\alpha}; \quad \sin\bar{\alpha}_1 = -\sin\bar{\alpha}; \quad \operatorname{tg}\bar{\alpha}_1 = -\operatorname{tg}\bar{\alpha}. \tag{3}$$

3. Der gerichtete Strahlbüschel. Alle durch S gehenden (gerichteten oder ungerichteten, vgl. § 2, 7 und **11**) Strahlen bilden einen

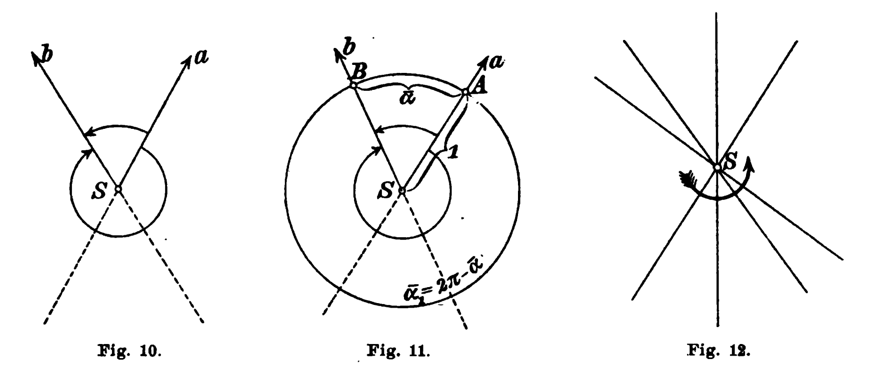


Fig. 10. Fig. 11. Fig. 12.

Strahlbüschel.[13]) Einen der beiden einander entgegengesetzten Drehungssinne um den Punkt S, das Zentrum (den Mittelpunkt) des Strahlbüschels, nennen wir den *positiven*, den andern den *negativen Drehungssinn des Büschels.* Den positiven, in der Regel den der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzten, machen wir durch einen um S gelegten Pfeilbogen (Fig. 12) kenntlich und nennen den Büschel nunmehr einen *gerichteten Strahlbüschel.*[5])

4. Relative Größe des Winkels zweier gerichteten Geraden im gerichteten Strahlbüschel. Gehören die Schenkel des Winkels ab

(Fig. 13) einem gerichteten Büschel an, so verstehen wir unter *der (relativen) Größe* ab *des Winkels der gerichteten Geraden* b *gegen die gerichtete Gerade* a, eine Zahl, die ihrem absoluten Betrage nach gleich $\overline{ab}$, übrigens aber *positiv oder negativ ist, je nachdem der Drehungssinn des Winkels* (vgl. § 2, 1) *mit dem positiven oder mit dem negativen Drehungssinn des Strahlbüschels* (vgl. § 2, 3) *übereinstimmt.* Daher ist stets:

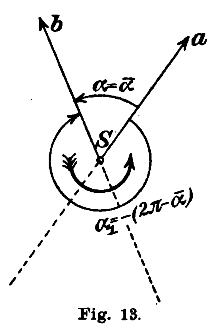


Fig. 13.

(4) $$ba = -ab \quad \text{oder} \quad ab + ba = 0.$$

Wenn

(5) $$\alpha = \varepsilon \bar{\alpha} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

die relative Größe des konkaven Winkels ab ist (in Fig. 13 ist $\varepsilon = +1$), so ist die relative Größe des konvexen Winkels (vgl. (2)) stets:

(6) $$\alpha_1 = -\varepsilon \bar{\alpha}_1 = -\varepsilon (2\pi - \bar{\alpha}),$$

da die Drehungssinne beider Winkel entgegengesetzt sind. Nach (5) ergibt sich aber aus (6):

(7) $$\alpha_1 = \alpha - \varepsilon \cdot 2\pi.$$

Sehen wir daher von $-\varepsilon \cdot 2\pi$ (wie überhaupt von Vielfachen von 2π) *ab*, so *haben der konkave und der konvexe Winkel* ab (sowie der in seinem Drehungssinne noch um weitere volle Umdrehungen veränderte Winkel) *dieselbe relative Größe.* Wir können also schlechthin von der *relativen Größe des Winkels* ab *der Geraden* b *gegen die Gerade* a sprechen[14]), ohne den konkaven und den konvexen Winkel zu unterscheiden.

Die Formel (4) gilt auch für diese Auffassung, aber nur *bis auf Vielfache von* 2π. Im Gegensatz zu (3) wird nach (7) auch:

(8) $$\cos \alpha_1 = \cos \alpha, \quad \sin \alpha_1 = \sin \alpha; \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha.$$

Für die Funktion Kosinus, für die nach (5) auch $\cos \alpha = \cos \bar{\alpha}$ wird, ist es überall gleichgültig, ob man den konvexen oder konkaven Winkel, sei es in absoluter, sei es in relativer Größe, benutzt.

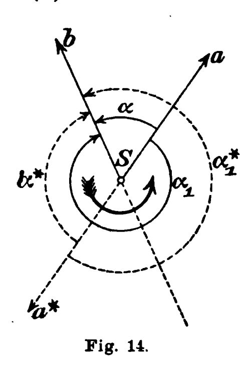


Fig. 14.

5. Winkel zweier ungerichteten Geraden im gerichteten Strahlbüschel. Ändert man bei gleichbleibendem Drehungssinne des Strahlbüschels die Pfeilspitze einer der Geraden a und b (etwa a in a^* Fig. 14), so ändert sich die relative Größe des Winkels ab stets um π oder $-\pi = \pi - 2\pi$

(in Fig. 14 ist $\alpha = \bar{\alpha}$, $\alpha_1 = -(2\pi - \bar{\alpha})$, $\alpha^* = -(\pi - \bar{\alpha})$, $\alpha_1^* = (\pi + \bar{\alpha})$).

Daher ist die (relative) Größe $\alpha = ab$ des Winkels der ungerichteten Geraden b gegen die ungerichtete Gerade a (Fig. 15) *nur bis auf Vielfache von π bestimmt. Dagegen ist* $\operatorname{tg}\alpha$ *eindeutig bestimmt.*

Man erhält α, indem man *einen* Schenkel von a bis zum Zusammenfall mit *einem* Schenkel von b um S dreht, die absolute Größe des überstrichenen Winkels nimmt und das Zeichen + oder − gibt, je nachdem man im positiven oder negativen Sinne des Büschels gedreht hat.

6. Die Winkel von drei durch einen Punkt gehenden gerichteten Geraden. Drei einem gerichteten Büschel mit dem Zentrum S angehörige gerichtete Geraden a, b, c (Fig. 16) begrenzen drei

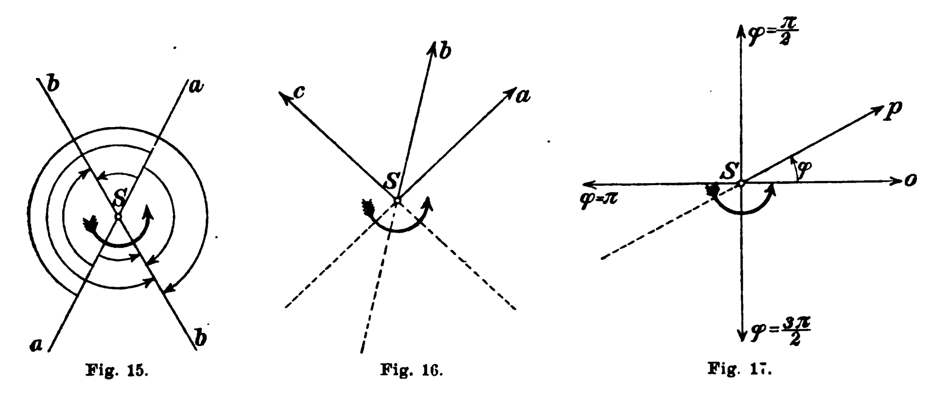


Fig. 15. Fig. 16. Fig. 17.

Winkel. Zwischen diesen besteht, in welcher Anordnung auch die drei Geraden durch S gehen mögen, bis auf Vielfache von 2π immer die Beziehung[15]):

$$(9) \qquad bc + ca + ab = 0.$$

7. Die gemeine Koordinate im Büschel gerichteter Strahlen. Alle durch einen Punkt S gehenden gerichteten Geraden (gerichteten Strahlen) bilden einen *Büschel gerichteter Strahlen.* Einen festen Strahl o des gerichtet gedachten Büschels (Fig. 17) wählen wir als *Anfangsstrahl.* Jeder beliebige Strahl p des Büschels bildet dann einen bestimmten Winkel:

$$(10) \qquad \varphi = op$$

gegen den Anfangsstrahl o. Dieser Winkel heißt *die Koordinate* (*der Richtungswinkel*) des Strahles p.

Der gerichtete Anfangsstrahl o zusammen mit dem Drehungssinne

des Büschels bildet *das Koordinatensystem.* Bei gegebenem Koordinatensystem gehört nach § 4, **4** zu jedem gerichteten Strahl p des Büschels eine bis auf Vielfache von 2π bestimmte Koordinate φ und umgekehrt zu jeder als Koordinate gegebenen Zahl φ ein bestimmter gerichteter Strahl des Büschels.[10])

8. Besondere Koordinatenbeziehungen. Der Strahl o, der in Fig. 17 nach rechts läuft, hat die Koordinate $\varphi = 0$, der zu o senkrecht nach oben laufende $\varphi = \frac{\pi}{2}$, der nach links laufende $\varphi = \pi$, der senkrecht nach unten laufende $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Je zwei Strahlen φ und $\varphi \pm \pi$ fallen mit entgegengesetzten Pfeilspitzen ineinander.

9. Darstellung des Winkels zweier Strahlen durch ihre Koordinaten.

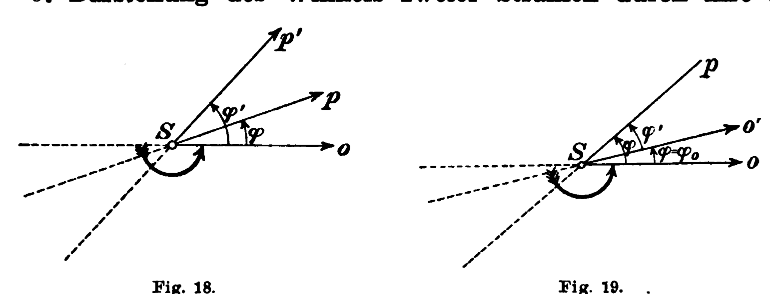


Fig. 18. Fig. 19.

Sind φ und φ' die Koordinaten zweier Strahlen p und p' (Fig. 18), so ist nach (9):

$$pp' = op' - op$$

und daher nach (10):

(11) $$pp' = \varphi' - \varphi$$

(vgl. § 1, (5)).

10. Die Transformation der Koordinaten. Zur Transformation auf ein neues gleichsinniges Koordinatensystem (vgl. § 1, **10**), dessen Anfangsstrahl o' im alten System die Koordinate $\varphi = \varphi_0$ hat, dient die Formel (Fig. 19):

(12) $$\varphi = \varphi_0 + \varphi'.$$

11. Die gemeine Koordinate im Büschel ungerichteter Strahlen. Alle durch einen Punkt S gehenden ungerichteten Geraden (ungerichteten Strahlen) bilden einen *Büschel ungerichteter Strahlen* (*Strahlbüschel* schlechthin). Einen festen Strahl o des gerichtet gedachten Büschels (Fig. 20) wählen wir als *Anfangsstrahl.* Jeder beliebige Strahl p des Büschels bildet dann nach § 2, **5**

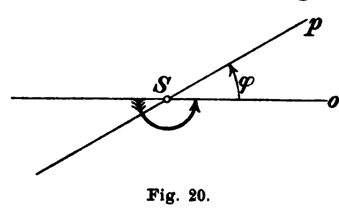


Fig. 20.

einen bis auf Vielfache von π bestimmten Winkel $\varphi = op$ gegen den Anfangsstrahl o. Zu jedem Strahl p gehört daher ein einziger Wert von

$$\text{(13)} \qquad \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} op.$$

Wir nennen $\operatorname{tg} \varphi$ die *Koordinate des Strahles* p.

Bei gegebenem *Koordinatensystem,* bestehend aus dem ungerichteten Anfangsstrahl o und dem Drehungssinne des Büschels, gehört auch zu jeder als Koordinate $\operatorname{tg} \varphi$ gegebenen Zahl ein bestimmter ungerichteter Strahl p. Um ihn zu erhalten, hat man nach § 2, **5** einen der positiven oder negativen Winkel φ, die zu gegebenem $\operatorname{tg} \varphi$ gehören, auszuwählen und den Anfangsstrahl o in dem dem Vorzeichen von φ entsprechenden Sinne so weit um S zu drehen, daß einer der Schenkel von o den Winkel φ nach seiner absoluten Größe beschreibt.

12. Die Gleichung des ungerichteten Strahles im gerichteten Büschel. Statt die Koordinate $\operatorname{tg} \varphi$ eines ungerichteten Strahles unmittelbar anzugeben, kann man auch eine Gleichung von der Form:

$$\text{(14)} \qquad A + B \operatorname{tg} \varphi = 0$$

geben, deren Auflösung nach $\operatorname{tg} \varphi$ die Koordinate selbst liefert. Man nennt (14) die *Gleichung des Strahles* im Büschel ungerichteter Strahlen (vgl. § 1, **11**).

§ 3. Das einfache und doppelte Teilungsverhältnis auf der geraden Linie.

1. Begriff des Teilungsverhältnisses. Ist $P_1 P_2$ eine Strecke und P irgend ein Punkt auf einer gerichteten Geraden (vgl. § 1, **3**), so ist (Fig. 21):

$$\text{(1)} \qquad \frac{P_1 P}{P_2 P} = \lambda$$

P_1 P P_2 (→)

Fig. 21.

das Verhältnis, nach welchem die Strecke $P_1 P_2$ *vom Punkte* P *geteilt wird.*[16]) *Es ist bei gegebenen festen Punkten* $P_1 P_2$ *für jeden Punkt* P *eindeutig bestimmt.*

Da es bei einer gleichzeitigen Umkehr der Vorzeichen der beiden Strecken $P_1 P$ und $P_2 P$ sich nicht ändert, ist es *von dem für die Gerade festgesetzten Durchlaufungssinne unabhängig* (dies ist in Fig. 21 durch Einklammern der Pfeilspitze angedeutet).

2. Darstellung des Teilungsverhältnisses in Koordinaten. Sind x_1, x_2, x die Koordinaten der Punkte P_1, P_2, P (Fig. 22) aus § 1, **6**, so ist das in (1) definierte Teilungsverhältnis nach § 1, (5) in der Form:

O P_1 P P_2 x_1 x x_2

Fig. 22.

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x - x_2} \tag{2}$$

dargestellt. Umgekehrt ergibt sich bei gegebenem λ für die Koordinate des Punktes P:

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}. \tag{3}$$

Er ist bei gegebenen festen Punkten P_1, P_2 für jeden Wert von λ eindeutig bestimmt.

3. Verteilung der Werte von λ. *Das Teilungsverhältnis* λ in (1) ist nach § 1, 4 *positiv* oder *negativ*, je nachdem P *außerhalb* oder *innerhalb* der Strecke P_1P_2 liegt (Fig. 23). Den Werten $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ entsprechen die Punkte P_1 und P_2 selbst; dem Werte $\lambda = -1$ der Mittelpunkt M der Strecke P_1P_2, für den somit nach (3):

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{4}$$

Fig. 23.

Der Mittelpunkt M teilt die Gerade in zwei Schenkel. Der eine Schenkel enthält die Punkte P, für die $\overline{P_1P} < \overline{P_2P}$ (vgl. § 1, 2) ist, der andere die Punkte, für die $\overline{P_2P} < \overline{P_1P}$ ist. Für jene ist der absolute Wert $\overline{\lambda} < 1$, für diese > 1.

4. Der unendlich ferne Punkt der Geraden. Dem Werte $\lambda = 1$ würde nach (3) der Wert $x = \infty$ entsprechen. Auch das Streckenverhältnis $P_1P : P_2P$ in (1) nähert sich immermehr dem Werte 1, wenn der Punkt P weiter und weiter *nach links oder rechts hin* auf der Geraden sich entfernt.

Wir nehmen daher *„einen unendlich fernen Punkt“* P_∞ der Geraden an[17]), der dem Werte $\lambda = 1$ $(x = \infty)$ entspricht.

Alsdann gehört ausnahmslos zu jedem Werte des Teilungsverhältnisses λ ein und nur ein Punkt der Geraden, wie auch zu jedem Punkte ein Wert λ.

5. Begriff des Doppelverhältnisses. Sind auf der Geraden vier beliebige Punkte $P_1P_2P_3P_4$ (Fig. 24) gegeben, so nennt man das Verhältnis der beiden Teilungsverhältnisse, nach welchen die Strecke P_1P_2 von den Punkten P_3 und P_4 geteilt wird (vgl. (1)), nämlich:

$$\delta = \frac{\lambda_3}{\lambda_4} = \frac{\dfrac{P_1P_3}{P_2P_3}}{\dfrac{P_1P_4}{P_2P_4}} = \frac{P_1P_3}{P_2P_3} \cdot \frac{P_2P_4}{P_1P_4} \tag{5}$$

Fig. 24.

das doppelte Teilungsverhältnis, nach dem die Strecke P_1P_2 von den Punkten P_3 und P_4 geteilt wird, oder kurz das *Doppelverhältnis*[18])

der vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4. Es ist, wie das einfache Teilungsverhältnis, vom Durchlaufungssinne der Geraden unabhängig.

Man bezeichnet es auch kurz mit dem Symbol:

$$\delta = (P_1 P_2 P_3 P_4) \tag{6}$$

womit zugleich auf die Abhängigkeit von der Reihenfolge der vier Punkte hingewiesen werden soll.

Vier Punkte einer Geraden haben, in einer bestimmten Reihenfolge genommen, ein völlig bestimmtes Doppelverhältnis.

6. Darstellung des Doppelverhältnisses in Koordinaten. In den Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 der vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 (Fig. 25) ausgedrückt, ist nach § 1, (5):

$$\delta = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)}. \tag{7}$$

Fig. 25.

Da diese Gleichung in der Form:

$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) - \delta(x_2 - x_3)(x_1 - x_4) = 0 \tag{8}$$

in bezug auf jede der vier Koordinaten linear ist, so folgt:

Es gibt stets einen und nur einen vierten Punkt, der mit drei gegebenen Punkten ein einer bestimmten Reihenfolge der vier Punkte entsprechendes Doppelverhältnis von gegebenem Werte δ *bildet.*

7. Abhängigkeit des Doppelverhältnisses von der Reihenfolge der vier Punkte. Das Doppelverhältnis ist eine *unsymmetrische* Funktion der vier Punkte, die bei manchen Vertauschungen der vier Punkte sich nicht ändert, bei andern aber sich ändert. Um dies festzustellen, bezeichnen wir die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 zur Abkürzung mit den Zahlen 1, 2, 3, 4 und haben nach (5) und (6) zunächst:

$$(1234) = \frac{13 \cdot 24}{23 \cdot 14} = \delta. \tag{9}$$

Man erkennt nun (vgl. § 1, (2)) sofort, daß:

$$(2143) = \frac{24 \cdot 13}{14 \cdot 23} = \delta, \tag{10}$$

$$(3412) = \frac{31 \cdot 42}{41 \cdot 32} = \delta, \tag{11}$$

$$(4321) = \frac{42 \cdot 31}{32 \cdot 41} = \delta. \tag{12}$$

Das Doppelverhältnis (9) bleibt also ungeändert, wenn man, die beiden vom 1. und 2. Punkt und vom 3. und 4. Punkt gebildeten Paare ins Auge fassend,

(13) { entweder die beiden Punkte jedes Paares je untereinander vertauscht,
oder die beiden Paare untereinander vertauscht,
oder beides zugleich vornimmt.

Dagegen ist ersichtlich nach (9):

$$(14)\qquad (1243) = \frac{14 \cdot 23}{24 \cdot 13} = \frac{1}{(1234)} = \frac{1}{\delta}.$$

Ferner ist nach § 1, (6):

$$23 \cdot 14 + 31 \cdot 24 + 12 \cdot 34 = 0,$$

$$1 - \frac{13 \cdot 24}{23 \cdot 14} - \frac{12 \cdot 34}{32 \cdot 14} = 0,$$

$$(15)\qquad (1324) = 1 - (1234) = 1 - \delta.$$

Weiter ergibt sich aus (14) mit beiderseitiger Vertauschung von 2 und 3 und aus (15):

$$(16)\qquad (1342) = \frac{1}{(1324)} = \frac{1}{1-(1234)} = \frac{1}{1-\delta},$$

dann aus (15) und (14):

$$(17)\qquad (1423) = 1 - (1243) = 1 - \frac{1}{(1234)} = 1 - \frac{1}{\delta} = \frac{\delta - 1}{\delta}$$

und aus (14) und (17):

$$(18)\qquad (1432) = \frac{1}{(1423)} = \frac{(1234)}{(1234)-1} = \frac{\delta}{\delta - 1}.$$

Da sich hiermit jedes der fünf Doppelverhältnisse (14) bis (18) durch das ursprüngliche Doppelverhältnis (9) darstellt und dieses bei den Vertauschungen (13) ungeändert bleibt, so gilt dasselbe auch von den fünf Doppelverhältnissen (14) bis (18).

Die den 24 Permutationen der vier Punkte entsprechenden Doppelverhältnisse haben daher folgende Werte[19]):

$$(19)\qquad \begin{cases} (1234) = (2143) = (3412) = (4321) = \delta, \\ (1243) = (2134) = (4312) = (3421) = \frac{1}{\delta}, \\ (1324) = (3142) = (2413) = (4231) = 1 - \delta, \\ (1342) = (3124) = (4213) = (2431) = \frac{1}{1-\delta}, \\ (1423) = (4132) = (2314) = (3241) = \frac{\delta - 1}{\delta}, \\ (1432) = (4123) = (3214) = (2341) = \frac{\delta}{\delta - 1}. \end{cases}$$

8. Zusammenfall von zwei Punkten. Daß von den vier Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 zwei zusammenfallen, kann auf sechs Weisen geschehen: Für $P_1 = P_3$ oder $P_2 = P_4$ wird nach (5) $\delta = 0$; für $P_1 = P_2$ oder $P_3 = P_4$ wird $\delta = 1$; für $P_2 = P_3$ oder $P_1 = P_4$ wird $\delta = \infty$. In jedem dieser drei Fälle *fallen die sechs Werte* (19) *paarweise in die drei Werte* 0, 1, ∞ *zusammen.*

Wenn umgekehrt δ einen der Werte 0, 1, ∞ hat, fallen nach (8) wenigstens zwei der vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 zusammen.

9. Begriff und Bedingung harmonischer Punktpaare. *Vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 heißen vier harmonische Punkte, wenn das Doppelverhältnis* (5) *den Wert* -1 *hat*[20]), also:

$$(20) \qquad \delta = (P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{\lambda_3}{\lambda_4} = \frac{P_1 P_3}{P_2 P_3} : \frac{P_1 P_4}{P_2 P_4} = \frac{P_1 P_3 \cdot P_2 P_4}{P_2 P_3 \cdot P_1 P_4} = -1$$

oder:

$$(21) \qquad \frac{P_1 P_3}{P_2 P_3} + \frac{P_1 P_4}{P_2 P_4} = 0; \quad \lambda_3 + \lambda_4 = 0$$

oder auch (Fig. 24):

$$(22) \qquad P_1 P_3 : P_3 P_2 = P_1 P_4 : P_2 P_4$$

oder nach § 1, (3):

$$(23) \qquad P_1 P_4 - P_3 P_4 : P_3 P_4 - P_2 P_4 = P_1 P_4 : P_2 P_4.$$

Die sechs Werte (19) *werden in diesem Falle paarweise gleich*[21]), und zwar:

$$(24) \qquad \delta = \frac{1}{\delta} = -1, \quad 1 - \delta = \frac{\delta - 1}{\delta} = 2, \quad \frac{1}{1-\delta} = \frac{\delta}{\delta - 1} = \frac{1}{2}.$$

Das Doppelverhältnis (20) behält also, den beiden ersten Zeilen (19) entsprechend, den Wert -1 bei, wenn die beiden Paare P_1, P_2 und P_3, P_4 je ungetrennt erhalten bleiben, und nur die beiden Punkte eines Paares oder die beiden Paare untereinander vertauscht, bezüglich diese beiden Vertauschungen beliebig kombiniert werden. Infolgedessen nennt man die den Bedingungen (20), (21), (22) oder (23) entsprechenden Punktpaare P_1, P_2 und P_3, P_4 *zwei Paare harmonischer Punkte* oder sagt: Die *Punktpaare P_1, P_2 und P_3, P_4 sind zueinander harmonisch.*

In den Koordinaten (Fig. 25) *lautet die Bedingung zweier harmonischen Punktpaare x_1, x_2 und x_3, x_4* nach (8):

$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_1 - x_4)(x_2 - x_3) = 0,$$

oder:

$$(25) \qquad x_1 x_2 - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3 x_4 = 0.$$

Ist von zwei harmonischen Punktpaaren das eine Paar x_1, x_2 und ein Punkt x_3 des andern gegeben, so ist der vierte Punkt x_4 eindeutig bestimmt (vgl. § 3, 6).

10. Lage harmonischer Punktpaare. Nach (21) haben λ_3 und λ_4 verschiedenes Vorzeichen, woraus nach § 3, **3** folgt, daß der eine der Punkte P_3 und P_4 innerhalb, der andere außerhalb der Strecke $P_1 P_2$ liegt oder (Fig. 26):

P_1 M P_3 P_2 P_4

Fig. 26.

I. *Zwei Paare harmonischer Punkte trennen sich gegenseitig.*

Ist in (21) $\lambda_3 = \pm 1$, so ist $\lambda_4 = \mp 1$, so daß nach § 3, **3** und **4** folgt:

II. *Zu den Endpunkten P_1, P_2 einer Strecke liegen der Mittelpunkt M und der unendlich ferne Punkt P_∞ harmonisch.*

Nach (21) sind λ_3 und λ_4 ihrem absoluten Werte nach gleich, woraus nach § 3, **3** folgt, daß P_3 und P_4 beide links oder beide rechts von M liegen oder:

III. *Von zwei Paaren harmonischer Punkte liegen die beiden Punkte P_3, P_4 des einen Paares stets auf derselben Seite des Mittelpunktes des andern Paares $P_1 P_2$* (Fig. 26).

Wird in (21) $\lambda_3 = 0$ oder ∞, so wird auch $\lambda_4 = 0$ oder ∞:

IV. *Wenn bei vier harmonischen Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 der Punkt P_3 mit P_1 oder P_2 zusammenfällt, so fällt gleichzeitig auch P_4 bezüglich mit P_1 oder P_2 zusammen.*

P_1 M P_3 P_2 P_4

Fig. 27.

Schließlich ergibt sich aus der Beziehung (21) der Satz:

V. *Bei festen P_1 und P_2 bewegen sich P_3 und P_4 ungleichlaufend.* Geht nämlich P_3 nach rechts (Fig. 27) von P_1 über M nach P_2, so geht P_4 nach links von P_1 über P_∞ nach P_2.

11. Vorkommen des unendlich fernen Punktes im Doppelverhältnis. Wenn in der allgemeinen Formel (5) für das Doppelverhältnis $P_4 = P_\infty$ und damit nach § 3, **4** $\lambda_4 = 1$ wird, so kommt sie auf

$$\delta = (P_1 P_2 P_3 P_\infty) = \frac{P_1 P_3}{P_2 P_3} \tag{26}$$

zurück. Entsprechend gibt die Formel (7) mit $x_4 = \infty$:

$$\delta = \frac{(x_1 - x_3)\left(\frac{x_2}{x_4} - 1\right)}{(x_2 - x_3)\left(\frac{x_1}{x_4} - 1\right)} = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3}. \tag{27}$$

Das Doppelverhältnis geht daher in das einfache Teilungsverhältnis über.

§ 4. Das einfache und doppelte Teilungsverhältnis im Strahlbüschel.

1. Innere und äußere Winkelfläche zweier Strahlen. Zwei *gerichtete* Strahlen p_1 und p_2 teilen die Ebene in vier Gebiete, deren jedes entweder von einem positiven und einem negativen Schenkel oder von zwei gleichnamigen Schenkeln der beiden Strahlen p_1 und p_2 begrenzt wird. Die beiden letzteren Gebiete (in Fig. 28 schraffiert)

wollen wir als *innere,* die ersteren als *äußere Winkelfläche* der Strahlen p_1 und p_2 bezeichnen.[22])

Sind hiernach die *ungerichteten* Strahlen p_1 und p_2 und die *innere* Winkelfläche (Fig. 29) gegeben, so wird dadurch das Paar der Pfeilspitzen von p_1 und p_2 *zweideutig* bestimmt, da die beiden positiven Schenkel entweder das eine (Fig. 29*) oder das andere (Fig. 29**) der beiden Gebiete der inneren Winkelfläche begrenzen können.

2. Begriff des einfachen Teilungsverhältnisses. Sind in einem Büschel gerichteter Strahlen mit bestimmtem Drehungssinne zwei Strahlen

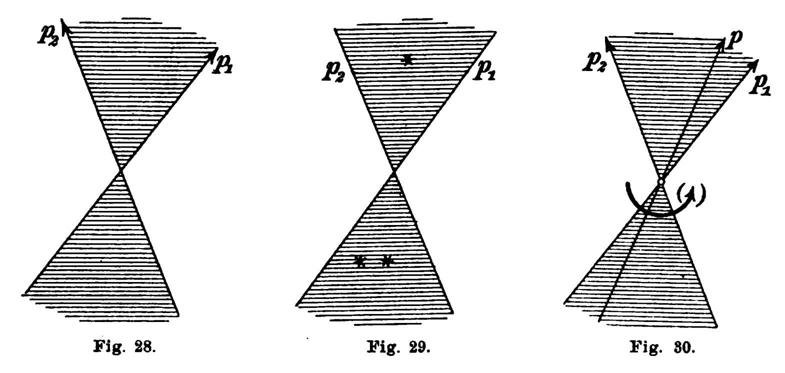


Fig. 28. Fig. 29. Fig. 30.

p_1 und p_2 gegeben (Fig. 30), so sind die Winkel eines beliebigen dritten Strahles p gegen p_1 und p_2 nach § 2, 4 bis auf Vielfache von 2π eindeutig bestimmt, und damit auch das *Sinusverhältnis*[16]):

$$(1) \qquad \frac{\sin p_1 p}{\sin p_2 p} = \lambda.$$

Wir nennen es kurz *das Verhältnis, nach welchem der Strahl p den Winkel der Strahlen p_1 und p_2 teilt.*

Es ist nach § 2, 4 *negativ* oder *positiv*, je nachdem p in der *inneren* oder *äußeren* Winkelfläche von p_1 und p_2 liegt. Für p_1 und p_2 selbst ist es $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$.

Es ist von dem (in Fig. 30 deshalb eingeklammerten) *Drehungssinne des Büschels unabhängig* (vgl. § 3, 1), da die Umkehr desselben beide Winkel $p_1 p$ und $p_2 p$ im Vorzeichen ändert.

3. Abhängigkeit des Teilungsverhältnisses von den Pfeilspitzen der Schenkel. Da nach § 2, 5 ein Winkel sich um π ändert, wenn die Pfeilspitze des einen Schenkels umgekehrt wird, so bleibt λ ungeändert, sowohl wenn die Pfeilspitze von p, als auch wenn die Pfeilspitzen von p_1 und p_2 *beide gleichzeitig* umgekehrt werden. Es kommt daher auf die Pfeilspitze von p und nach § 4, 1 auf die von p_1 und p_2 nicht an, wenn nur die *innere Winkelfläche* erhalten bleibt.

Sind zwei gerichtete Strahlen p_1, p_2 (oder zwei ungerichtete Strahlen p_1, p_2 und ihre innere Winkelfläche) gegeben, so teilt jeder durch ihren Schnittpunkt gehende ungerichtete Strahl p (Fig. 31) *den Winkel jener beiden in einem bestimmten Teilungsverhältnisse, dessen Wert positiv oder negativ ist, je nachdem p in der äußeren oder inneren Winkelfläche liegt.*

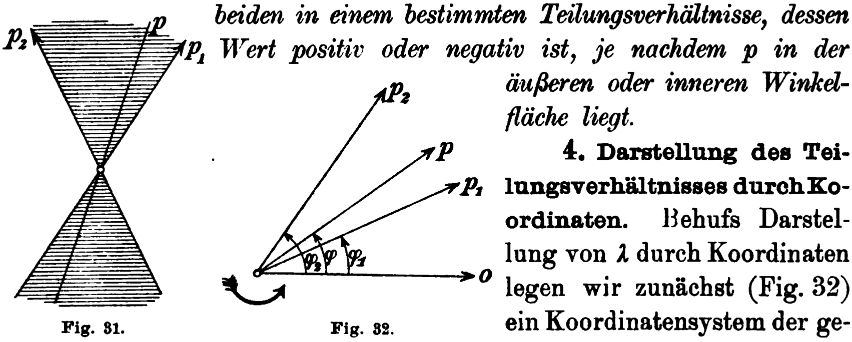


Fig. 31. Fig. 32.

4. Darstellung des Teilungsverhältnisses durch Koordinaten. Behufs Darstellung von λ durch Koordinaten legen wir zunächst (Fig. 32) ein Koordinatensystem der gerichteten Strahlen zugrunde (vgl. § 2, 7). Sind φ_1, φ_2, φ die Koordinaten von p_1, p_2, p in bezug auf dieses, so wird aus (1) mit Rücksicht auf § 2, (11):

$$\lambda = \frac{\sin(\varphi - \varphi_1)}{\sin(\varphi - \varphi_2)} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi_1 - \cos\varphi\sin\varphi_1}{\sin\varphi\cos\varphi_2 - \cos\varphi\sin\varphi_2}$$

oder:

$$\lambda = \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} \cdot \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_2}. \tag{2}$$

Durch Auflösen nach $\operatorname{tg}\varphi$ folgt:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \lambda\frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1}\operatorname{tg}\varphi_2}{1 - \lambda\frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1}}. \tag{3}$$

Die Formeln bleiben in Übereinstimmung mit den Angaben unter § 4, **3** bei Umkehr der Pfeilspitze von φ und bei gleichzeitiger Umkehr der beiden Pfeilspitzen von φ_1 und φ_2 ungeändert. Es folgt daher aus (3) als Umkehr des Satzes in § 4, **3**:

Sind zwei gerichtete Strahlen (oder zwei ungerichtete Strahlen und ihre innere Winkelfläche) gegeben, so gibt es einen bestimmten ungerichteten Strahl p, der den Winkel jener beiden in gegebenem Verhältnis λ teilt.

5. Die beiden Halbierungslinien des Winkels. Ist $h_1(\varphi = \mu_1)$ die innere und $h_2(\varphi = \mu_2)$ die äußere Halbierungslinie des Winkels der gerichteten Strahlen p_1 und p_2 (oder der ungerichteten mit gegebener innerer Winkelfläche), sind also (Fig. 33) die Winkel:

$$p_1h_1 = h_1p_2 = -p_2h_1; \qquad p_2h_2 = h_2p_1 - \pi = -(p_1h_2 + \pi),$$

so wird nach (1) bezüglich:

$$\lambda = -1; \qquad \lambda = +1$$

und nach (3) für die entsprechenden Koordinaten:

(4) $$\operatorname{tg}\mu_1 = \frac{\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2}{\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2}, \quad \operatorname{tg}\mu_2 = \frac{\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2}{\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2},$$

wonach auch $\operatorname{tg}\mu_1 \cdot \operatorname{tg}\mu_2 = -1$, also h_1 und h_2 zueinander senkrecht stehen.

Von den beiden Winkelflächen, in die h_1 und h_2 die Ebene teilen, enthält die eine $p_1(\lambda = 0)$, die andere $p_2(\lambda = \infty)$ (Fig. 33); in jener ist $\bar{\lambda} < 1$ und in dieser $\bar{\lambda} > 1$ (vgl. § 3, 3).

6. Begriff des Doppelverhältnisses. Sind in einem Strahlbüschel vier Strahlen, zwei gerichtete p_1, p_2 und zwei ungerichtete p_3, p_4, ge-

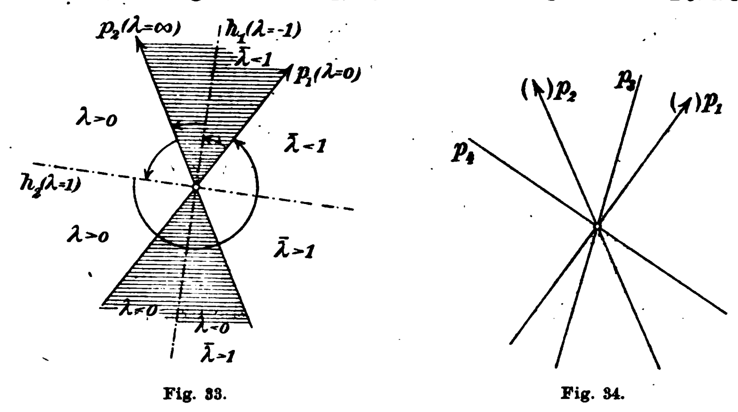


Fig. 33. Fig. 34.

geben, so nennt man das Verhältnis der beiden Teilungsverhältnisse, nach welchen der Winkel der gerichteten Strahlen p_1, p_2 von den beiden ungerichteten Strahlen p_3, p_4 geteilt wird (vgl. (1)):

(5) $$\delta = \frac{\lambda_3}{\lambda_4} = \frac{\dfrac{\sin p_1 p_3}{\sin p_2 p_3}}{\dfrac{\sin p_1 p_4}{\sin p_2 p_4}} = \frac{\sin p_1 p_3}{\sin p_2 p_3} \cdot \frac{\sin p_2 p_4}{\sin p_1 p_4}$$

das Doppelverhältnis der vier Strahlen p_1, p_2, p_3, p_4.[18]) Man bezeichnet es auch abgekürzt mit dem Symbol:

(6) $$\delta = (p_1 p_2 p_3 p_4).$$

Das Doppelverhältnis ist, wie das einfache, vom Drehungssinn im Büschel, aber nach § 2, 5 auch *von jeder der beiden Pfeilspitzen von* p_1 *und* p_2 *unabhängig* (Fig. 34). Es folgt also:

Vier ungerichtete Strahlen eines Büschels haben, in bestimmter Reihenfolge genommen, ein bestimmtes Doppelverhältnis.

7. Darstellung des Doppelverhältnisses in Koordinaten. Die vier Strahlen p_1, p_2, p_3, p_4 mögen, vorübergehend mit Pfeilspitzen

versehen, im Koordinatensystem der gerichteten Strahlen (§ 2, 7) die Koordinaten $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ haben. Dann wird aus (5) nach § 2, (11):

$$(7) \qquad \delta = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_3)\sin(\varphi_2 - \varphi_4)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_3)\sin(\varphi_1 - \varphi_4)} = \frac{(\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_3)(\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_4)}{(\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_3)(\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_4)}.$$

Da somit das Doppelverhältnis *nur von den Koordinaten der ungerichteten Strahlen* (§ 2, 11) *abhängt*, welche als Koordinatensystem einen ungerichteten Anfangsstrahl und einen Drehungssinn voraussetzen, kann die Formel (7) unmittelbar auf ein solches Koordinatensystem bezogen werden (Fig. 35).

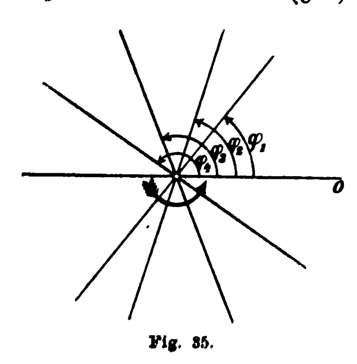


Fig. 35.

Wie in § 3, 6 folgt, *daß es stets einen und nur einen vierten Strahl gibt, der mit drei gegebenen Strahlen ein einer bestimmten Reihenfolge der vier Strahlen entsprechendes Doppelverhältnis von gegebenem Werte* δ *bildet.*

Auch der Inhalt von § 3, 7 und 8 überträgt sich auf das Doppelverhältnis von vier Strahlen.

8. Harmonische Strahlenpaare. Man nennt p_1, p_2 und p_3, p_4 *zwei harmonische Strahlenpaare* oder sagt, daß p_1, p_2 und p_3, p_4 zueinander harmonisch sind[20]), wenn das Doppelverhältnis (5) den Wert $\delta = -1$ hat, also:

$$(8) \qquad \delta = (p_1 p_2 p_3 p_4) = \frac{\lambda_3}{\lambda_4} = \frac{\sin p_1 p_3}{\sin p_2 p_3} : \frac{\sin p_1 p_4}{\sin p_2 p_4} = -1,$$

$$(9) \qquad \frac{\sin p_1 p_3}{\sin p_2 p_3} + \frac{\sin p_1 p_4}{\sin p_2 p_4} = 0, \quad \lambda_3 + \lambda_4 = 0.$$

In den Koordinaten lautet diese Bedingung, wie § 3, (25) entwickelt:

$$(10) \qquad \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 - \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2)(\operatorname{tg}\varphi_3 + \operatorname{tg}\varphi_4) + \operatorname{tg}\varphi_3 \operatorname{tg}\varphi_4 = 0.$$

Da die bei vorübergehender Annahme der Pfeilspitzen von p_1 und p_2 (Fig. 36) nach (1) bestimmten Teilungsverhältnisse:

$$(11) \qquad \lambda_3 = \frac{\sin p_1 p_3}{\sin p_2 p_3}, \quad \lambda_4 = \frac{\sin p_1 p_4}{\sin p_2 p_4}$$

nach (8) entgegengesetzt gleich sind, so liegt nach § 4, 2 der eine der Strahlen p_3, p_4 in der innern, der andere in der äußern Winkelfläche.

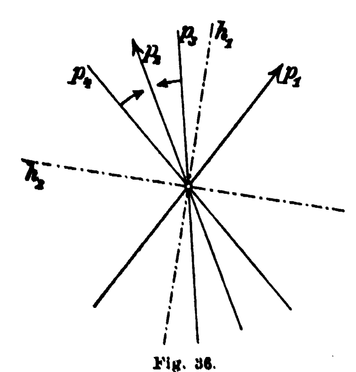


Fig. 36.

Es folgt somit:

I. *Zwei Paare harmonischer Strahlen trennen sich gegenseitig.*

Fällt p_3 in die innere Halbierungslinie h_1 des Winkels $p_1 p_2$, so daß nach § 4, 5 $\lambda_3 = -1$ ist, so wird nach (9) $\lambda_4 = +1$ und damit p_4 die äußere Halbierungslinie h_2.

II. *Zu den Schenkeln p_1 und p_2 eines Winkels sind die beiden Halbierungslinien h_1 und h_2 stets harmonisch.*

Wie in § 3, **10** ergibt sich auch hier:

III. *Von zwei Paaren harmonischer Strahlen liegen die beiden Strahlen p_3, p_4 des einen Paares stets in derselben Winkelfläche der Halbierungslinien h_1 und h_2 des andern Paares p_1, p_2.*

IV. *Wenn bei vier harmonischen Strahlen p_1, p_2; p_3, p_4 der Strahl p_3 mit p_1 oder p_2 zusammenfällt, so fällt gleichzeitig auch p_4 bezüglich mit p_1 oder p_2 zusammen.*

V. *Bei festen Strahlen p_1 und p_2 bewegen sich p_3 und p_4 in entgegengesetztem Sinne* (*ungleichdrehend*). Dreht sich nämlich p_3 (Fig. 36) im positiven Sinne von p_1 über h_1 nach p_2, so dreht sich p_4 im negativen Sinne von p_1 über h_2 nach p_2.

§ 5. Die Punktreihe und der Strahlbüschel in perspektiver Beziehung.

1. Begriff der perspektiven Beziehung von Punktreihe und Strahlbüschel. Wenn *eine gerade Linie g und ein Büschel ungerichteter Strahlen S* in der Ebene liegen und die Gerade g nicht durch den Scheitel S des Büschels geht (Fig. 37), so werden sie *perspektiv aufeinander bezogen.* Diese Beziehung besteht darin, daß jeder Strahl $a, b, c, d, \ldots, p, \ldots$ des Büschels S die Gerade g in einem Punkte $A, B, C, D, \ldots, P, \ldots$ schneidet, und umgekehrt die Verbindungslinie jedes Punktes der Geraden g mit dem Scheitel S des Büschels einen Strahl desselben gibt. Es *entsprechen* sich also die Punkte $A, B, C, D, \ldots, P, \ldots$ und die gleichnamig bezeichneten Strahlen $a, b, c, d, \ldots, p, \ldots$ *wechselseitig eindeutig,* jedem Punkt P ein Strahl p und umgekehrt. P und p heißen auch entsprechende *Elemente.*

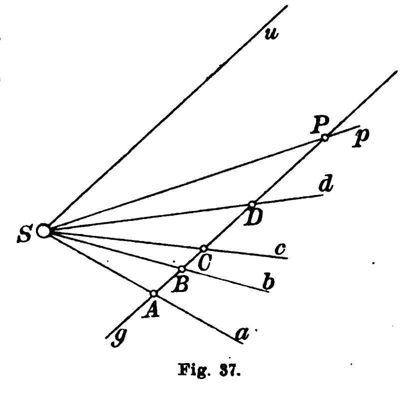


Fig. 37.

Dem *zu g parallelen Strahl u* des Büschels entspricht der *unendlich ferne Punkt P_∞* der Punktreihe (§ 3, 4).

Man sagt auch die Punktreihe $A, B, C, D, \ldots, P, \ldots$ und der Strahlbüschel $a, b, c, d, \ldots, p, \ldots$ befinden sich in *perspektiver Lage.*[23])

2. Das einfache Teilungsverhältnis bei perspektiver Lage. Indem wir ein Strahlbüschel $S = p_1, p_2, p \ldots$ und eine Punktreihe $g = P_1, P_2, P \ldots$ in perspektiver Lage voraussetzen, nehmen wir einstweilen als *positive* Halbstrahlen $p_1, p_2, p \ldots$ diejenigen, welche g schneiden und als Drehungssinn im Strahlbüschel denjenigen, welcher dem Durchlaufungssinn der Punktreihe entspricht (Fig. 38).

Es seien nun p_1, p_2, p drei Strahlen und P_1, P_2, P die entsprechenden Punkte. Die Innenwinkel des Dreiecks $P_1 P_2 S$ bei P_1 und P_2 sollen die absolute Größe α_1 und α_2, die Strecke SP die absolute Länge $s = \overline{SP}$ haben. Dann ist nach dem Sinussatz[24]) für relative Größe der Winkel $p_1 p$, $p_2 p$ (§ 2, 4) und der Strecken $P_1 P$, $P_2 P$ (§ 1, 4):

$$\frac{\sin p_1 p}{\sin \alpha_1} = \frac{P_1 P}{s}, \qquad \frac{\sin p_2 p}{\sin \alpha_2} = \frac{P_2 P}{s}$$

und somit:

$$\frac{\sin p_1 p}{\sin p_2 p} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{P_1 P}{P_2 P}. \tag{1}$$

Dieses Resultat ist nach § 3, 1 und § 4, 2; 3 vom Drehungssinn in S und Durchlaufungssinn von g, sowie von der Pfeilspitze von p unab-

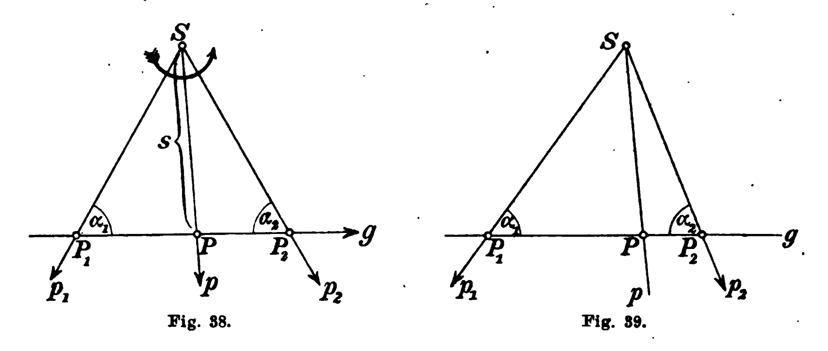


Fig. 38. Fig. 39.

hängig. Also: *Liegt eine Punktreihe $g = P_1, P_2, P$ und ein Strahlbüschel $S = p_1, p_2, p$ perspektiv* (Fig. 39), *so ist das einfache Teilungsverhältnis, in welchem der ungerichtete Strahl p den Winkel der beiden gerichteten Strahlen p_1 und p_2 teilt, bis auf den von p unabhängigen Faktor* $\sin \alpha_1 : \sin \alpha_2$ *gleich dem Teilungsverhältnis, in welchem der Punkt P die Strecke $P_1 P_2$ teilt.*

3. Das Doppelverhältnis bei perspektiver Lage. Wendet man die Formel (1) auf zwei Strahlen $p = p_3$ und $p = p_4$ und die entsprechenden Punkte $P = P_3$ und $P = P_4$ an, so erhält man:

$$\frac{\sin p_1 p_3}{\sin p_2 p_3} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{P_1 P_3}{P_2 P_3}, \quad \frac{\sin p_1 p_4}{\sin p_2 p_4} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{P_1 P_4}{P_2 P_4}.$$

Dividiert man beide Gleichungen, so wird das Resultat:

(2) $$\frac{\sin p_1 p_3}{\sin p_2 p_3} : \frac{\sin p_1 p_4}{\sin p_2 p_4} = \frac{P_1 P_3}{P_2 P_3} : \frac{P_1 P_4}{P_2 P_4}$$

von α_1, α_2, sowie nach § 4, **6** von den Pfeilspitzen von p_1 und p_2 unabhängig und es folgt:

Befinden sich eine Punktreihe und ein Strahlbüschel in perspektiver Lage (Fig. 40), *so haben je vier Punkte der Punktreihe dasselbe Doppelverhältnis, wie die vier entsprechenden Strahlen des Strahlbüschels*[25]*):*

(3) $$(P_1 P_2 P_3 P_4) = (p_1 p_2 p_3 p_4).$$

4. Darstellung der perspektiven Beziehung durch Koordinaten. Wir wählen den auf g senkrechten Strahl des Büschels als Anfangsstrahl o eines Koordinatensystems ungerichteter Strahlen (§ 2, **11**)

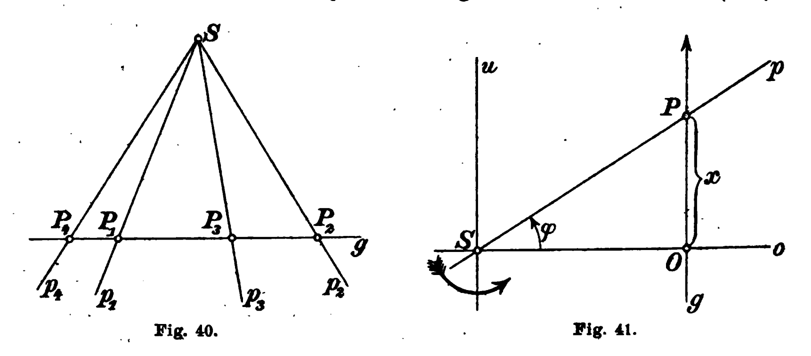


Fig. 40. Fig. 41.

und den Schnittpunkt von o und g als Anfangspunkt O eines Koordinatensystems auf der Geraden g (§ 1, **6**). Drehungssinn des Büschels und Durchlaufungssinn der Geraden nehmen wir für die beiden Koordinatensysteme übereinstimmend an (Fig. 41). Dann ist für jeden Punkt P der Geraden mit der Koordinate x und den entsprechenden Strahl p des Büschels mit der Koordinate $\operatorname{tg}\varphi$:

(4) $$x = \overline{SO} \cdot \operatorname{tg}\varphi.$$

Befinden sich also eine Punktreihe g und ein Strahlbüschel S in perspektiver Lage, so sind bei geeigneter Wahl der Koordinatensysteme die Koordinaten x und $\operatorname{tg}\varphi$ *entsprechender Elemente bis auf einen konstanten Faktor einander gleich.*[26])

5. Zweiter Beweis für die Gleichheit der Doppelverhältnisse. Sind nun x_1, x_2, x_3, x_4 die Koordinaten von irgend vier Punkten der Geraden g und $\operatorname{tg}\varphi_1$, $\operatorname{tg}\varphi_2$, $\operatorname{tg}\varphi_3$, $\operatorname{tg}\varphi_4$ die Koordinaten der ent-

sprechenden vier Strahlen des Büschels S, so daß für $i = 1, 2, 3, 4$:

$$x_i = \overline{SO} \cdot \operatorname{tg} \varphi_i,$$

so ist:

$$\frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)} = \frac{(\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_3)(\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_3)}{(\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_3)(\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_4)}. \tag{5}$$

Dies gibt nach § 3, (7) und § 4, (7) wieder den Satz von § 5, **3**.

6. Harmonische Punkte und Strahlen in perspektiver Lage. Dem speziellen Werte -1 des Doppelverhältnisses entsprechend (§ 3, **9** und § 4, **8**), folgen aus § 5, **3** die beiden Sätze:

Die Schnittpunkte von vier harmonischen Strahlen eines Strahlbüschels mit einer beliebigen Geraden sind vier harmonische Punkte.

Die Verbindungslinien von vier harmonischen Punkten einer Punktreihe mit einem beliebigen Punkt sind vier harmonische Strahlen.

7. Besondere Fälle. Nach § 4, **8**, II sind die Halbierungslinien h_1 und h_2 der Winkel zweier Strahlen p_1 und p_2 zu diesen harmonisch.

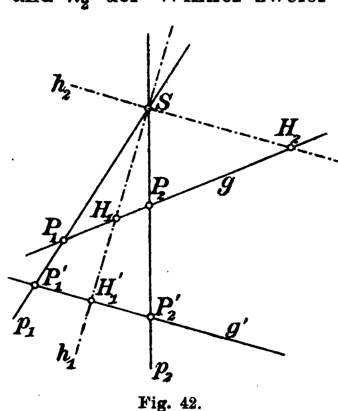


Fig. 42.

Nach § 5, **6** schneidet daher jede Gerade g diese vier Strahlen in vier harmonischen Punkten $P_1 P_2 H_1 H_2$ (Fig. 42) oder: *Die Halbierungslinien des inneren und des äußeren Winkels an der Ecke S eines Dreiecks SP_1P_2 teilen die gegenüberliegende Seite P_1P_2 harmonisch.*[27])

Ist insbesondere die schneidende Gerade g' parallel zu h_2 (Fig. 42), so ist von den vier harmonischen Punkten H_1' der Mittelpunkt der Strecke $P_1'P_2'$ und H_2' unendlich fern (§ 3, **10**, II).

8. Begriff der perspektiven Beziehung zweier Punktreihen oder zweier Strahlbüschel.

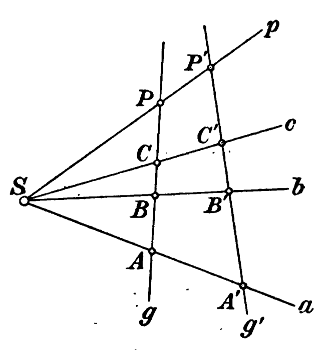


Fig. 43a.

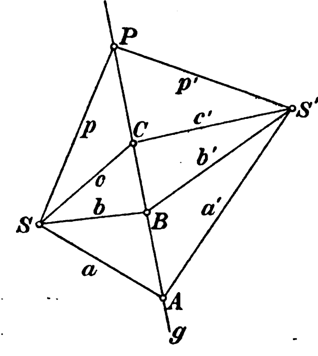


Fig. 43b.

Zwei Punktreihen $ABCP\ldots$ und $A'B'C'P'\ldots$ befinden sich (Fig. 43a) *in perspektiver Lage* (sind perspektiv aufeinander bezogen), wenn sie beide zu demselben Strahlbüschel $abcp\ldots$ perspektiv liegen (§ 5, **1**). Je zwei auf demselben Strahl des Büschels liegende Punkte AA', BB', CC', PP' sind *entsprechende Punkte* beider Reihen.

Zwei Strahlbüschel $abcp\ldots$ und $a'b'c'p'\ldots$ befinden sich (Fig. 43b) *in perspektiver Lage* (sind perspektiv aufeinander bezogen), wenn sie beide zu derselben Punktreihe $ABCP\ldots$ perspektiv liegen (§ 5, **1**). Je zwei durch denselben Punkt der Reihe gehende Strahlen aa', bb', cc', pp' sind *entsprechende Strahlen* beider Büschel.

9. Die Gleichheit der Doppelverhältnisse. Aus dem Satze in § 5, **3** folgt daher[28]):

Befinden sich zwei Punktreihen in perspektiver Lage, so haben je vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 der einen dasselbe Doppelverhältnis, wie die vier entsprechenden Punkte P_1', P_2' P_3', P_4' der andern:

(6) $(P_1P_2P_3P_4) = (P_1'P_2'P_3'P_4')$.

Befinden sich zwei Strahlbüschel in perspektiver Lage, so haben je vier Strahlen p_1, p_2, p_3, p_4 des einen dasselbe Doppelverhältnis, wie die vier entsprechenden Strahlen p_1', p_2', p_3', p_4' des andern:

(6') $(p_1p_2p_3p_4) = (p_1'p_2'p_3'p_4')$.[29])

§ 6. Die Verhältnis- und Doppelverhältniskoordinaten.

1. Begriff der Verhältniskoordinaten des Punktes und des Strahles.

Sind E_1 und E_2 zwei getrennte feste Punkte der Geraden (Fig. 44a), so entspricht nach § 3, **1**; **2** jedem Punkte P derselben ein Wert des Teilungsverhältnisses:

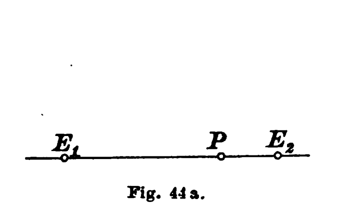


Fig. 44a.

Sind e_1 und e_2 zwei getrennte feste gerichtete Strahlen (Fig. 44b) des Strahlbüschels, so entspricht nach § 4, **2**—**4** jedem ungerichteten Strahle p desselben ein Wert des Teilungsverhältnisses:

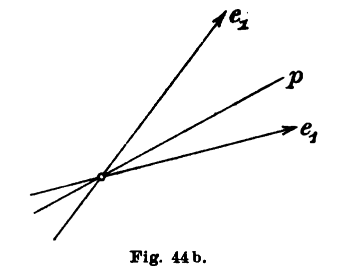


Fig. 44b.

(1) $$\frac{E_1P}{E_2P} = \lambda$$

und umgekehrt.

Man kann daher λ als „Verhältniskoordinate“ des Punktes P in bezug auf die „Anfangspunkte“ E_1, E_2 einführen.[30])

Diese selbst erhalten die Koordinaten: $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$, der Mittelpunkt der Strecke E_1E_2: $\lambda = -1$, der unendlich ferne Punkt: $\lambda = +1$ (nach § 3, 3; 4).

(1′) $$\frac{\sin e_1 p}{\sin e_2 p} = \lambda$$

und umgekehrt.

Man kann daher λ als „Verhältniskoordinate“ des Strahles p in bezug auf die gerichteten „Anfangsstrahlen“ e_1, e_2 einführen.

Diese selbst erhalten die Koordinaten: $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$, die innere und äußere Halbierungslinie $\lambda = -1$ und $\lambda = +1$ (nach § 4, 5).

2. Beziehung zwischen gemeinen Koordinaten und Verhältniskoordinaten.

Haben in bezug auf das gemeine Koordinatensystem (§ 1, 6) die Punkte E_1 und E_2 (Fig. 45a) die

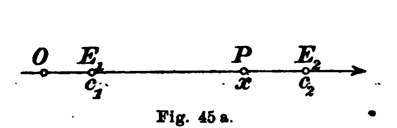


Fig. 45 a.

Koordinaten $x = c_1$ und $x = c_2$, so bestehen nach § 3, (2); (3) zwischen den Koordinaten x und λ des Punktes P die Beziehungen:

(2) $$\lambda = \frac{x - c_1}{x - c_2},$$

(3) $$x = \frac{c_1 - \lambda c_2}{1 - \lambda}.$$

Haben in bezug auf das gemeine Koordinatensystem der gerichteten Strahlen (§ 2, 7) die Strahlen e_1

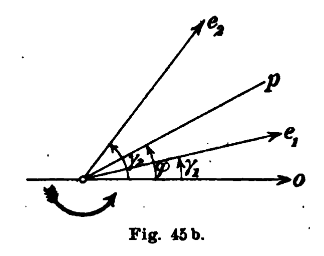


Fig. 45 b.

und e_2 (Fig. 45b) die Koordinaten $\varphi = \gamma_1$ und $\varphi = \gamma_2$, so bestehen nach § 4, (2) und (3) zwischen den Koordinaten $\operatorname{tg}\varphi$ und λ des Strahles p die Beziehungen:

(2′) $$\lambda = \frac{\cos\gamma_1}{\cos\gamma_2}\,\frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\gamma_1}{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\gamma_2},$$

(3′) $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\gamma_1 - \lambda\frac{\cos\gamma_2}{\cos\gamma_1}\operatorname{tg}\gamma_2}{1 - \lambda\frac{\cos\gamma_2}{\cos\gamma_1}}.$$

3. Darstellung des Doppelverhältnisses in Verhältniskoordinaten.

Sind nun x_1 und x_3 die gemeinen und λ_1 und λ_3 die Verhältniskoordinaten zweier Punkte, so ist

Sind nun φ_1 und φ_3 die gemeinen und λ_1 und λ_3 die Verhältniskoordinaten zweier Strahlen,

nach (3):

$$x_1 - x_3 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(c_1 - c_2)}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_3)}.$$

Für vier Punkte x_1, x_2, x_3, x_4 bezüglich $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ wird daher:

$$(4) \qquad \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)}.$$

so ist nach (3'):

$$\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)\frac{\cos\gamma_2}{\cos\gamma_1}(\operatorname{tg}\gamma_1 - \operatorname{tg}\gamma_2)}{\left(1 - \lambda_1\frac{\cos\gamma_2}{\cos\gamma_1}\right)\left(1 - \lambda_3\frac{\cos\gamma_2}{\cos\gamma_1}\right)}.$$

Für vier Strahlen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, bezüglich $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ wird daher:

$$(4') \qquad \frac{(\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_3)(\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_4)}{(\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_3)(\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi\ )} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)}.$$

Daraus folgt nach § 3, (7) und § 4, (7) unabhängig vom gemeinen Koordinatensystem:

Haben vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 in bezug auf zwei Anfangspunkte E_1, E_2 (§ 6, 1) *die Verhältniskoodinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, so ist ihr Doppelverhältnis:*

$$(5) \qquad \delta = (P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)}.$$

Haben vier Strahlen p_1, p_2, p_3, p_4 in bezug auf zwei Anfangsstrahlen e_1, e_2 (§ 6, 1) *die Verhältniskoordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, so ist ihr Doppelverhältnis:*

$$(5') \qquad \delta = (p_1 p_2 p_3 p_4) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)}.$$

Aus (5) mit $\lambda_3 = 0$ und $\lambda_4 = \infty$ oder auch direkt aus (1) folgt:

Haben zwei Punkte P_1, P_2 in bezug auf zwei Anfangspunkte E_1, E_2 die Verhältniskoordinaten λ_1, λ_2, so ist ihr Doppelverhältnis zu diesen (§ 3, (5)):

$$(6) \qquad \delta = (E_1 E_2 P_1 P_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Haben zwei Strahlen p_1, p_2 in bezug auf zwei Anfangsstrahlen e_1, e_2 die Verhältniskoordinaten λ_1, λ_2, so ist ihr Doppelverhältnis zu diesen (§ 4, (5)):

$$(6') \qquad \delta = (e_1 e_2 p_1 p_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

4. Begriff der multiplizierten Verhältniskoordinaten des Punktes und des Strahles.

Ist *neben den festen Punkten E_1 und E_2 eine feste Konstante* $a_1 : a_2$ gegeben, so entspricht wie in § 6, 1 jedem Punkte P auch ein Wert des Produkts:

$$(7) \qquad \mu = \frac{a_1}{a_2}\cdot\lambda = \frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{E_1 P}{E_2 P}$$

und umgekehrt.

Ist *neben den festen gerichteten Strahlen e_1 und e_2 eine feste Konstante* $a_1' : a_2'$ gegeben, so entspricht wie in § 6, 1 jedem Strahle p auch ein Wert des Produkts:

$$(7') \qquad \mu = \frac{a_1'}{a_2'}\cdot\lambda = \frac{a_1'}{a_2'}\cdot\frac{\sin e_1 p}{\sin e_2 p}$$

und umgekehrt.

Wir nennen μ die multiplizierte Verhältniskoordinate[31] *des Punktes P mit Bezug auf die Anfangspunkte E_1, E_2 und den Multiplikator $a_1 : a_2$.*

Wir nennen μ die multiplizierte Verhältniskoordinate des Strahles p mit Bezug auf die Anfangsstrahlen e_1, e_2 und den Multiplikator $a_1' : a_2'$.

5. Beziehung zwischen gemeinen Koordinaten und multiplizierten Verhältniskoordinaten.

Bezogen auf das gemeine Koordinatensystem (Fig. 45a) ist:

(8) $$\mu = \frac{a_1}{a_2} \frac{x - c_1}{x - c_2}$$

oder, wenn:

(9) $$c_1 = -\frac{b_1}{a_1}, \quad c_2 = -\frac{b_2}{a_2}$$

gesetzt wird:

(10) $$\mu = \frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2};$$

also:

(11) $$x = \frac{b_2 \mu - b_1}{-a_2 \mu + a_1}.$$

Die multiplizierte Verhältniskoordinate μ ist bei gegebenen Anfangspunkten und gegebenem Multiplikator eine gebrochene lineare Funktion der gemeinen Koordinate x.

Bezogen auf das gemeine Koordinatensystem (Fig. 45b) ist:

(8′) $$\mu = \frac{a_1'}{a_2'} \frac{\cos\gamma_1}{\cos\gamma_2} \cdot \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\gamma_1}{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\gamma_2}$$

oder, wenn:

(9′) $$\begin{cases} \dfrac{a_1'}{a_2'} \dfrac{\cos\gamma_1}{\cos\gamma_2} = \dfrac{a_1}{a_2}, \\ \operatorname{tg}\gamma_1 = -\dfrac{b_1}{a_1}, \quad \operatorname{tg}\gamma_2 = -\dfrac{b_2}{a_2} \end{cases}$$

gesetzt wird:

(10′) $$\mu = \frac{a_1 \operatorname{tg}\varphi + b_1}{a_2 \operatorname{tg}\varphi + b_2};$$

also:

(11′) $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b_2 \mu - b_1}{-a_2 \mu + a_1}.$$

Die multiplizierte Verhältniskoordinate ist bei gegebenen Anfangsstrahlen und gegebenem Multiplikator eine gebrochene lineare Funktion der gemeinen Koordinate $\operatorname{tg}\varphi$ *der ungerichteten Strahlen* (§ 2, (13)).

Umgekehrt definiert eine beliebig gegebene gebrochene lineare Funktion (10) von x die multiplizierte Verhältniskoordinate μ des Punktes x; die Anfangspunkte haben dann die Gleichungen (§ 1, **11**):

(12) $$a_1 x + b_1 = 0, \quad a_2 x + b_2 = 0,$$

und der Multiplikator ist $a_1 : a_2$. Nur muß die Determinante der Gleichungen (12)

(13) $$C = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

von 0 verschieden sein, damit die Anfangspunkte getrennt sind (§ 1, (11)).

Auch eine gegebene gebrochene lineare Funktion (10′) von $\operatorname{tg}\varphi$ definiert die multiplizierte Verhältniskoordinate μ des Strahles $\operatorname{tg}\varphi$; die Anfangsstrahlen haben dann die Gleichungen (§ 2, **12**):

(12′) $$a_1 \operatorname{tg} \varphi + b_1 = 0, \quad a_2 \operatorname{tg} \varphi + b_2 = 0$$

und einen Multiplikator $a_1' : a_2'$. Allerdings bestimmen die Gleichungen (12′) nur die ungerichteten Strahlen $\operatorname{tg} \gamma_1$ und $\operatorname{tg} \gamma_2$ wie in (9′), während alsdann in:

$$\cos \gamma_1 = \frac{a_1}{\varepsilon_1 \sqrt{a_1^2 + b_1^2}}, \quad \cos \gamma_2 = \frac{a_2}{\varepsilon_2 \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

die Vorzeichen ε_1, $\varepsilon_2 = \pm 1$ unbestimmt bleiben und damit die erste Gleichung (9′) für den Multiplikator zwei Werte gibt:

(14′) $$\frac{a_1'}{a_2'} = \frac{\cos \gamma_2}{\cos \gamma_1} \cdot \frac{a_1}{a_2} = \frac{\varepsilon_1 \sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{\varepsilon_2 \sqrt{a_2^2 + a_2^2}}.$$

(Die doppelt gestrichene Quadratwurzel soll immer deren positiven Wert bezeichnen.)

In der Tat muß, *während μ bei gegebenen Koeffizienten in* (10′) im Koordinatensystem der ungerichteten Strahlen *eindeutig* von $\operatorname{tg} \varphi$ abhängt, λ *selbst* wegen der alsdann fehlenden Kenntnis der inneren Winkelfläche nach § 4, **1** *zweideutig* sein.

Will man eine Verfügung über diese Zweideutigkeit treffen, wird man sie zweckmäßig an das Koordinatensystem der ungerichteten Strahlen anknüpfen, auf das sich die Ausgangsformel (10′) bezieht. Setzt man etwa fest, daß *die den Anfangsstrahl o enthaltende Winkelfläche* (Fig. 45b) *die äußere* sei, so muß nach § 4, **2** λ für $\operatorname{tg} \varphi = 0$ einen positiven Wert λ^0 erhalten. Es ist aber für $\operatorname{tg} \varphi = 0$ nach (10′) $\mu = \frac{b_1}{b_2}$ und, da nach (7′) allgemein $\lambda = \frac{a_2'}{a_1'} \mu$, so ist $\lambda^0 = \frac{a_2'}{a_1'} \frac{b_1}{b_2}$. Soll also λ^0 positiv sein, muß $a_1' : a_2'$ das Vorzeichen von $b_1 : b_2$ haben, also nach (14′) etwa[22])

(15′) $$\varepsilon_1 = -\operatorname{sign.} b_1, \quad \varepsilon_2 = -\operatorname{sign.} b_2$$

(oder auch $\varepsilon_1 = \operatorname{sign.} b_1$, $\varepsilon_2 = \operatorname{sign.} b_2$) sein.

Ist durch (10′) *in bezug auf ein Koordinatensystem ungerichteter Strahlen mit dem Anfangsstrahl o eine multiplizierte Verhältniskoordinate μ definiert, so haben die Anfangsstrahlen e_1, e_2 die Gleichungen* (12′) *und der Multiplikator den Wert* (14′) *mit den Vorzeichen* (15′), *falls die den Anfangsstrahl o enthaltende Winkelfläche als äußere gilt.*

6. Die multiplizierten Verhältniskoordinaten als Doppelverhältniskoordinaten.

Der Multiplikator $\frac{a_1}{a_2}$ in (7) kann durch den festen Punkt E_0

Der Multiplikator $\frac{a_1'}{a_2'}$ in (7′) kann durch den festen ungerichteten

bestimmt werden, für den $\mu = 1$ ist, den *„Einheitspunkt" des Koordinatensystems.* Hat dieser die Verhältniskoordinate λ_0, so folgt aus (7) zunächst:

$$1 = \frac{a_1}{a_2}\lambda_0 = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{E_1 E_0}{E_2 E_0}$$

und mit dem hieraus sich ergebenden Werte von $\frac{a_1}{a_2}$:

$$(16) \qquad \mu = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{E_2 E_0}{E_1 E_0} \cdot \frac{E_1 P}{E_2 P} = (E_1 E_2 P E_0).$$

Die multiplizierte Verhältniskoordinate μ des Punktes P ist das Doppelverhältnis, welches er mit den Anfangspunkten und dem Einheitspunkt bildet (Fig. 46a).

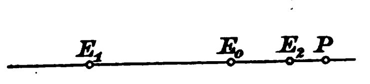


Fig. 46a.

Das Koordinatensystem dieser „Doppelverhältniskoordinate" [32]) *μ besteht aus drei festen Punkten E_1, E_2 und E_0,* die selbst die Koordinaten $\mu = 0$, ∞ und 1 erhalten.

Strahl e_0 bestimmt werden, für den $\mu = 1$ ist, den *„Einheitsstrahl" des Koordinatensystems.* Hat dieser die Verhältniskoordinate λ_0, so folgt aus (7′) zunächst:

$$1 = \frac{a_1'}{a_2'}\lambda_0 = \frac{a_1'}{a_2'} \cdot \frac{\sin e_1 e_0}{\sin e_2 e_0}$$

und mit dem hieraus sich ergebenden Werte von $\frac{a_1'}{a_2'}$:

$$(16') \qquad \mu = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{\sin e_2 e_0}{\sin e_1 e_0} \cdot \frac{\sin e_1 p}{\sin e_2 p} = (e_1 e_2 p e_0).$$

Die multiplizierte Verhältniskoordinate μ des Strahles p ist das Doppelverhältnis, welches er mit den Anfangsstrahlen und dem Einheitsstrahl bildet (Fig. 46b).

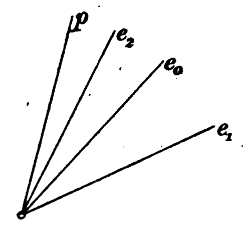


Fig. 46b.

Das Koordinatensystem dieser „Doppelverhältniskoordinate" μ besteht aus drei festen, nach § 4, 6 *ungerichteten Strahlen e_1, e_2 und e_0,* die selbst die Koordinaten $\mu = 0, \infty$ und 1 erhalten.

7. Beziehung zwischen den gemeinen und den Doppelverhältniskoordinaten.

Nach § 3, (7) geht die Darstellung (16) der Doppelverhältniskoordinate durch Einführung der Koordinaten $x = c_1$, c_2 und x_0 der Punkte E_1, E_2 und E_0 (Fig. 47a)

Nach § 4, (7) geht die Darstellung (16′) der Doppelverhältniskoordinate durch Einführung der Koordinaten $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\gamma_1$, $\operatorname{tg}\gamma_2$ und $\operatorname{tg}\varphi_0$ der ungerichteten Strahlen

über in:

$$(17)\qquad \mu = \frac{(c_2 - x_0)(c_1 - x)}{(c_1 - x_0)(c_2 - x)}.$$

e_1, e_2 und e_0 (Fig. 47b) über in:

$$(17')\qquad \mu = \frac{(\operatorname{tg}\gamma_2 - \operatorname{tg}\varphi_0)(\operatorname{tg}\gamma_1 - \operatorname{tg}\varphi)}{(\operatorname{tg}\gamma_1 - \operatorname{tg}\varphi_0)(\operatorname{tg}\gamma_2 - \operatorname{tg}\varphi)}.$$

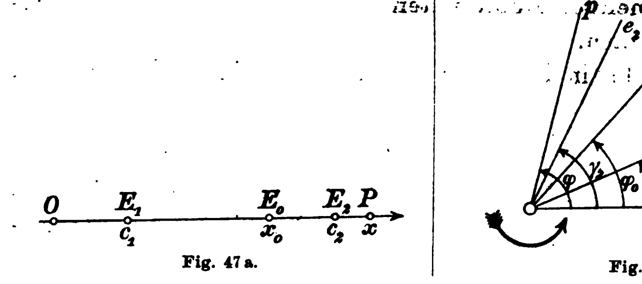


Fig. 47a.

Fig. 47b.

8. Darstellung der Doppelverhältniskoordinaten in abgekürzten Symbolen. Ist die multiplizierte Verhältniskoordinate μ durch die Gleichung (10) gegeben, so daß für den Einheitspunkt $x = x_0$:

$$(18)\qquad 1 = \frac{a_1 x_0 + b_1}{a_2 x_0 + b_2},$$

so erhält man aus (10) und (18) die mit (17) gleichbedeutende (vgl. (9)) Formel:

$$(19)\qquad \mu = \frac{a_2 x_0 + b_2}{a_1 x_0 + b_1} \cdot \frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2}.$$

Der Unterschied der gleich allgemeinen Darstellungen (10) und (19) besteht nur darin, daß jene von den drei Konstanten $a_1 : b_1$, $a_2 : b_2$, $a_1 : a_2$, diese aber von den drei Konstanten $a_1 : b_1$, $a_2 : b_2$, x_0 abhängt, also den Multiplikator $a_1 : a_2$ durch den Einheitspunkt x_0 ersetzt.

Indem wir zur Darstellung (19) die duale hinzufügen und dabei zur Abkürzung setzen:

$$(20)\qquad \begin{cases} X_1 = a_1 x + b_1, & X_2 = a_2 x + b_2 \\ X_1^0 = a_1 x_0 + b_1, & X_2^0 = a_2 x_0 + b_2. \end{cases}$$

$$(20')\qquad \begin{cases} U_1 = a_1 \operatorname{tg}\varphi + b_1, & U_2 = a_2 \operatorname{tg}\varphi + b_2 \\ U_1^0 = a_1 \operatorname{tg}\varphi_0 + b_1, & U_2^0 = a_2 \operatorname{tg}\varphi_0 + b_2 \end{cases}$$

erhalten wir folgendes Resultat:

Sind:

$$(21)\qquad X_1 = 0, \quad X_2 = 0$$

die Gleichungen der Anfangspunkte E_1, E_2 *und* x_0 *die Koordinate des Einheitspunktes* E_0, *so ist die Doppel-*

Sind:

$$(21')\qquad U_1 = 0, \quad U_2 = 0$$

die Gleichungen der Anfangsstrahlen e_1, e_2 *und* $\operatorname{tg}\varphi_0$ *die Koordinate des Einheitsstrahles* e_0, *so ist die Doppel-*

verhältniskoordinate des Punktes x:

(22) $\mu = (E_1 E_2 P E_0) = \frac{X_1}{X_1^0} : \frac{X_2}{X_2^0}$.

verhältniskoordinate des Strahles $\operatorname{tg}\varphi$:

(22') $\mu = (e_1 e_2 p e_0) = \frac{U_1}{U_1^0} : \frac{U_2}{U_2^0}$.

9. Die gemeinen Koordinaten als Spezialfall der Doppelverhältniskoordinaten.

Schreibt man (17) in der Form:

$$\mu = \frac{\frac{x_0}{c_2} - 1}{x_0 - c_1} \cdot \frac{x - c_1}{\frac{x}{c_2} - 1}$$

und setzt $c_1 = 0$, $c_2 = \infty$, $x_0 = 1$, so wird:

(23) $\mu = x$.

Die Doppelverhältniskoordinate μ geht also in die gemeine Koordinate x über[33]), wenn man die Punkte E_1, E_2, E_0 nach den Punkten $x = 0$, $x = \infty$, $x = 1$ des gemeinen Koordinatensystems verlegt (Fig. 48a); die Richtung von 0 über 1 nach ∞ wird der positive Durchlaufungssinn des letztern (vgl. § 1, **6**).

Fig. 48a.

Setzt man in (17') $\operatorname{tg}\gamma_1 = 0$, $\operatorname{tg}\gamma_2 = \infty$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 1$, so wird

(23') $\mu = \operatorname{tg}\varphi$.

Die Doppelverhältniskoordinate μ geht also in die gemeine Koordinate $\operatorname{tg}\varphi$ über, wenn man die Strahlen e_1, e_2, e_0 nach den Strahlen $\operatorname{tg}\varphi = 0$, $\operatorname{tg}\varphi = \infty$, $\operatorname{tg}\varphi = 1$ des gemeinen Koordinatensystems verlegt (Fig. 48b); die Drehung, die den Strahl 0 über 1 in ∞ überführt, wird der positive Drehungssinn des gemeinen Koordinatensystems (vgl. § 2, **11**).

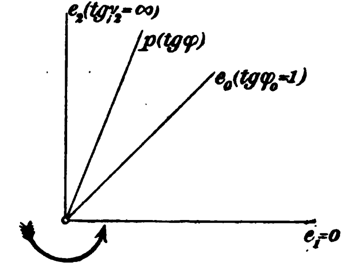


Fig. 48b.

10. Darstellung der Doppelverhältnisse durch Doppelverhältniskoordinaten. Da sich *die multiplizierten Verhältniskoordinaten und die mit ihnen gleich allgemeinen Doppelverhältniskoordinaten* μ nach (7); (7') von den einfachen Verhältniskoordinaten λ nur um einen dem Koordinatensystem eigentümlichen Faktor unterscheiden, so ist für vier beliebige Punkte oder Strahlen

(24) $$\frac{(\mu_1 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_4)}{(\mu_2 - \mu_3)(\mu_1 - \mu_4)} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)}.$$

I. *Haben vier Punkte* P_1, P_2, P_3, P_4 *in bezug auf zwei Anfangs-*

I'. *Haben vier Strahlen* p_1, p_2, p_3, p_4 *in bezug auf zwei Anfangs-*

punkte E_1, E_2 und einen Einheitspunkt E_0 die Doppelverhältniskoordinaten $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, so ist ihr Doppelverhältnis:

$$(25)\quad \begin{cases} \delta = (P_1 P_2 P_3 P_4) \\ \quad = \dfrac{(\mu_1 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_4)}{(\mu_2 - \mu_3)(\mu_1 - \mu_4)}. \end{cases}$$

strahlen e_1, e_2 und einen Einheitsstrahl e_0 die Doppelverhältniskoordinaten $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, so ist ihr Doppelverhältnis:

$$(25')\quad \begin{cases} \delta = (p_1 p_2 p_3 p_4) \\ \quad = \dfrac{(\mu_1 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_4)}{(\mu_2 - \mu_3)(\mu_1 - \mu_4)}. \end{cases}$$

II. *Die Formel* (25) *enthält nach* (16) *gleichzeitig die Darstellung des Doppelverhältnisses $(P_1 P_2 P_3 P_4)$ von vier beliebigen Punkten P_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ durch die Doppelverhältnisse $(E_1 E_2 P_i E_0)$, die diese vier Punkte je mit drei festen Punkten bilden*[34]. Entsprechendes gilt für (25').

Mit $\mu_3 = 0$ und $\mu_4 = \infty$ folgt ebenso wie in § 6, **3**:

III. *Haben zwei Punkte P_1, P_2 in bezug auf zwei Anfangspunkte E_1, E_2 und einen Einheitspunkt E_0 die Doppelverhältniskoordinaten μ_1, μ_2, so ist ihr Doppelverhältnis zu E_1, E_2 selbst:*

$$(26)\quad \delta = (E_1 E_2 P_1 P_2) = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

III'. *Haben zwei Strahlen p_1, p_2 in bezug auf zwei Anfangsstrahlen e_1, e_2 und einen Einheitsstrahl e_0 die Doppelverhältniskoordinaten μ_1, μ_2, so ist ihr Doppelverhältnis zu e_1, e_2 selbst:*

$$(26')\quad \delta = (e_1 e_2 p_1 p_2) = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

11. Punkte und Strahlen mit entgegengesetzt gleichen Doppelverhältniskoordinaten. Hieraus ergibt sich insbesondere nach § 3, (20) und § 4, (8):

Haben zwei Punkte P_1, P_2 in bezug auf zwei Anfangspunkte E_1, E_2 entgegengesetzt gleiche Doppelverhältniskoordinaten $(\mu_1 = -\mu_2)$, so sind sie zu E_1, E_2 harmonisch.

Haben zwei Strahlen p_1, p_2 in bezug auf zwei Anfangsstrahlen e_1, e_2 entgegengesetzt gleiche Doppelverhältniskoordinaten $(\mu_1 = -\mu_2)$, so sind sie zu e_1, e_2 harmonisch.

Ein Spezialfall hiervon findet sich § 1, **7** erwähnt (vgl. (23)).

12. Die Transformation der Doppelverhältniskoordinaten. Führt man an Stelle der auf die Punkte E_1, E_2, E_0 bezogenen Doppelverhältniskoordinate (16):

Fig. 49.

$$(27)\qquad \mu = (E_1 E_2 P E_0)$$

eine neue auf die Punkte J_1, J_2, J_0 bezogene Doppelverhältniskoordinate:

$$(28)\qquad \nu = (J_1 J_2 P J_0)$$

ein (Fig. 49) und setzt voraus, daß die alten Koordinaten μ_1, μ_1, μ_0 der Punkte J_1, J_2, J_0 gegeben sind, so folgt aus (25):

Die neue Doppelverhältniskoordinate v steht mit der alten in der Beziehung:

(29) $$v = \frac{\mu_2 - \mu_0}{\mu_1 - \mu_0} \cdot \frac{\mu_1 - \mu}{\mu_2 - \mu}.$$

§ 7. Die homogenen gemeinen und die Zweiecks- und Zweiseitskoordinaten.

1. Begriff der homogenen gemeinen Koordinaten des Punktes. Mit Beibehaltung des Koordinatensystems § 1, **6** versteht man unter *homogenen gemeinen Koordinaten des Punktes*[35] P zwei Zahlen x', t', deren Verhältnis die gemeine Koordinate x (§ 1, **6**) ist:

Fig. 50a.

(1) $$\frac{x'}{t'} = x.$$

Der Punkt P bestimmt also seine beiden homogenen Koordinaten (Fig. 50a) nur *ihrem Verhältnis nach* eindeutig und ist durch sie eindeutig bestimmt, auch wenn sie nur *ihrem Verhältnis nach* gegeben sind. So hat der Punkt $x = 2$ die homogenen Koordinaten $x', t' = 2, 1$ oder $4, 2$ oder mit beliebigem Faktor $2m, m$.

Der Anfangspunkt O erhält die homogenen Koordinaten: $x', t' = 0, 1$ (oder $0, m$), *der unendlich ferne Punkt P_∞*: $x', t' = 1, 0$ (oder $m, 0$).

Die homogenen Koordinaten sollen stets *endliche* Werte haben und dürfen *niemals beide gleichzeitig* verschwinden.

Wir schreiben weiterhin x, t für x', t'. Um dann von der Koordinate x (§ 1, **6**) zu den homogenen Koordinaten überzugehen, hat man nur $\frac{x}{t}$ für x zu setzen, während man mit $t = 1$ von diesen zu jener zurückkehrt.

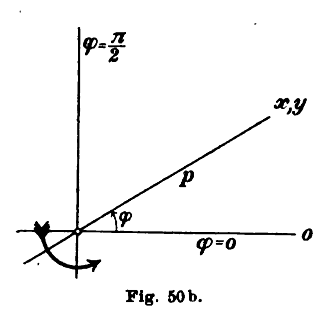


Fig. 50b.

2. Begriff der homogenen gemeinen Koordinaten des Strahles. Mit Beibehaltung des Koordinatensystems § 2, **11** führen wir im Büschel ungerichteter Strahlen zwei Arten[36] von homogenen Koordinaten des Strahles p ein, die wir bezüglich x, y (Fig. 50b) und u, v nennen, und deren Verhältnis mit der gemeinen Koordinate tg φ in den Beziehungen steht:

$$(2) \qquad \frac{x}{y} = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}$$

$$(3) \qquad \frac{u}{v} = -\operatorname{tg}\varphi.$$

Je nach Zweckmäßigkeit werden wir die eine oder die andere Art dieser homogenen Koordinaten gebrauchen.

Der Anfangsstrahl $\varphi = 0$ erhält, indem es auf einen gemeinsamen Faktor nicht ankommt, die homogenen Koordinaten: $x, y = 1, 0$ und $u, v = 0, 1$; der Strahl $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ebenso: $x, y = 0, 1$ und $u, v = 1, 0$.

3. Gleichung des Punktes und des Strahles in homogenen Koordinaten. Führt man die in § 7, 1 und 2 erklärten homogenen Koordinaten in die Gleichungen § 1, (8) und § 2, (14) ein und multipliziert mit t, bezüglich mit x oder v, so ergibt sich:

Die Gleichung des Punktes hat in homogenen Koordinaten die Form:

$$(4) \qquad Ax + Bt = 0.$$

Der durch die Gleichung dargestellte Punkt hat die homogenen Koordinaten:

$$(5) \qquad x : t = -B : A.$$

Die Gleichungen des Anfangspunktes O und des unendlich fernen Punktes P_∞ sind:

$$(6) \qquad x = 0 \quad \text{und} \quad t = 0.$$

Die Gleichung des Strahles hat in den beiderlei homogenen Koordinaten die Form:

$$(4') \quad Ax + By = 0; \qquad (4'') \quad Bu - Av = 0.$$

Die Gleichungen des Anfangsstrahles o ($\operatorname{tg}\varphi = 0$) und des zu ihm senkrechten Strahles $\left(\operatorname{tg}\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ sind:

$$(6') \quad y = 0 \quad \text{und} \quad x = 0; \qquad (6'') \quad u = 0 \quad \text{und} \quad v = 0.$$

4. Das Doppelverhältnis in homogenen Koordinaten. Das Doppelverhältnis von vier durch ihre homogenen Koordinaten x_i, t_i ($i = 1, 2, 3, 4$) gegebenen Punkte P_i wird nach § 3, (7), nachdem man auf gleiche Benennung gebracht hat[37]):

$$(7) \qquad \delta = (P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{(x_1 t_3 - x_3 t_1)(x_2 t_4 - x_4 t_2)}{(x_2 t_3 - x_3 t_2)(x_1 t_4 - x_4 t_1)}.$$

Ist daher der Punkt P_4 mit $t_4 = 0$ der unendlich ferne Punkt P_∞, so wird:

$$\delta = (P_1 P_2 P_3 P_\infty) = \frac{x_1 t_3 - x_3 t_1}{x_2 t_3 - x_3 t_2} \cdot \frac{t_2}{t_1},$$

woraus mit $t_1 = t_2 = t_3 = 1$ wieder das Resultat § 3, (26) hervorgeht.

5. Begriff der homogenen Doppelverhältniskoordinaten. Wenn man in der Auffassung von § 7, 1 auch die multiplizierte Verhältniskoordinate μ (§ 6, 4) in der Weise bezeichnet, daß man für Punkte und Strahlen bezüglich setzt:

$$\mu = \frac{x_1}{x_2}, \quad \mu = \frac{u_1}{u_2}, \tag{8}$$

so erhält man in x_1, x_2 und u_1, u_2 die *homogenen multiplizierten Verhältniskoordinaten* des Punktes und Strahles. Wir wollen x_1, x_2 kurz als *Zweieckskoordinaten* und u_1, u_2 als *Zweiseitskoordinaten* bezeichnen, indem wir die Anfangspunkte E_1, E_2 zugleich das *Koordinatenzweieck* und die Anfangsstrahlen das *Koordinatenzweiseit* nennen.

Auch diese homogenen Koordinaten x_1, x_2 oder u_1, u_2, wie x, t in § 7, 1, kommen nur *ihren Verhältnissen nach* in Betracht, sollen nur *endliche Werte* haben und dürfen *niemals beide gleichzeitig verschwinden.*

Im Anschluß an die beiden Deutungen von μ in § 6, 4 und § 6, 6 können wir die neuen Koordinaten auf zwei Arten[38]) selbständig erklären:

6. Die Zweiecks(Zweiseits)koordinaten als multiplizierte Abstände (Sinus).

Für die erste Erklärung sind die stets getrennten *Eckpunkte* E_1, E_2 *des Koordinatenzweiecks und zwei Multiplikatoren* a_1, a_2 *als Bestandteile des Koordinatensystems* gegeben (Fig. 51a).

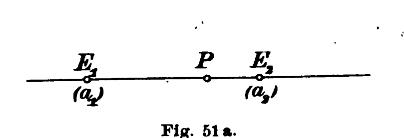


Fig. 51a.

Die Zweieckskoordinaten x_1, x_2 *des Punktes P sind dann zwei Zahlen, die sich verhalten wie die mit* a_1 *und* a_2 *multiplizierten Abstände des*

Für die erste Erklärung sind die stets getrennten gerichteten *Seitenstrahlen* e_1, e_2 *des Koordinatenzweiecks und zwei Multiplikatoren* a_1', a_2' *als Bestandteile des Koordinatensystems* gegeben (Fig. 51b).

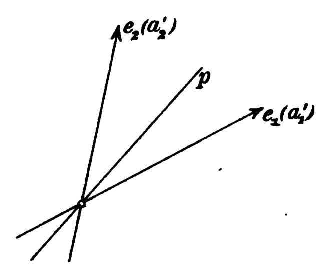


Fig. 51b.

Die Zweiseitskoordinaten u_1, u_2 *des Strahles p sind dann zwei Zahlen, die sich verhalten wie die mit* a_1' *und* a_2' *multiplizierten Sinus der*

Punktes von den Eckpunkten E_1 und E_2:

(9) $x_1 : x_2 = a_1 . E_1 P : a_2 . E_2 P.$

Die Eckpunkte selbst erhalten die Koordinaten (vgl. § 7, 1):

(10) $\begin{cases} E_1 : x_1, x_2 = 0, 1 \\ E_2 : x_1, x_2 = 1, 0. \end{cases}$

Winkel des Strahles gegen die Seitenstrahlen e_1 und e_2:

(9') $u_1 : u_2 = a_1' . \sin e_1 p : a_2' . \sin e_2 p.$

Die Seitenstrahlen selbst erhalten die Koordinaten:

(10') $\begin{cases} e_1 : u_1, u_2 = 0, 1 \\ e_2 : u_1, u_2 = 1, 0. \end{cases}$

7. Die Zweiecks- und Zweiseitskoordinaten als Doppelverhältnisse.

Für die zweite Erklärung sind *die Eckpunkte E_1, E_2 des Koordinatenzweiecks und der Einheitspunkt E_0 als Bestandteile des Koordinatensystems* gegeben (Fig. 52a).

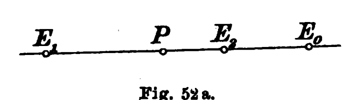


Fig. 52a.

Die Zweieckskoordinaten x_1, x_2 des Punktes P sind dann zwei Zahlen, deren Verhältnis das Doppelverhältnis des Punktes zu den Punkten E_1, E_2, E_0 ist:

(11) $x_1 : x_2 = (E_1 E_2 P E_0) = \frac{E_2 E_0}{E_1 E_0} \cdot \frac{E_1 P}{E_2 P}.$

Der Einheitspunkt erhält die Koordinaten:

(12) $E_0 : x_1, x_2 = 1, 1.$

Für die zweite Erklärung sind *die ungerichteten Seitenstrahlen e_1, e_2 des Koordinatenzweiseits und der Einheitsstrahl e_0 als Bestandteile des Koordinatensystems* gegeben (Fig. 52b).

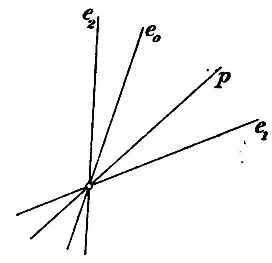


Fig. 52b.

Die Zweiseitskoordinaten u_1, u_2 des Strahles p sind dann zwei Zahlen, deren Verhältnis das Doppelverhältnis des Strahles zu den Strahlen e_1, e_2, e_0 ist:

(11') $u_1 : u_2 = (e_1 e_2 p e_0) = \frac{\sin e_2 e_0}{\sin e_1 e_0} \cdot \frac{\sin e_1 p}{\sin e_2 p}.$

Der Einheitsstrahl erhält die Koordinaten:

(12') $e_0 : u_1, u_2 = 1, 1.$

8. Beziehung zwischen Zweiecks(Zweiseits)koordinaten und homogenen gemeinen Koordinaten. Indem man die homogene Bezeichnung (1), (3), (8) in § 6, (10); (10') einführt (in (10') unter Umkehrung der Vorzeichen von b_1, b_2 und einen Proportionalitätsfaktor ϱ anwendet, ergibt sich:

Die Zweieckskoordinaten x_1, x_2 *sind proportional homogenen linearen Funktionen der homogenen gemeinen Koordinaten* x, t:

$$(13)\quad \begin{cases} \varrho x_1 = a_1 x + b_1 t \\ \varrho x_2 = a_2 x + b_2 t. \end{cases}$$

Die Zweiseitskoordinaten u_1, u_2 *sind proportional homogenen linearen Funktionen der homogenen gemeinen Koordinaten* u, v:

$$(13')\quad \begin{cases} \varrho u_1 = a_1 u + b_1 v \\ \varrho u_2 = a_2 u + b_2 v. \end{cases}$$

Die Determinante der Koeffizienten (§ 6, (13)) muß hierbei *von Null verschieden* sein.

Die Auflösung der Gleichungen (13) und (13′) gibt umgekehrt mit einem Proportionalitätsfaktor σ (Anm. 2, I, 2):

$$(14)\quad \begin{cases} \sigma x = \phantom{-a_2 x_1 +{}} b_2 x_1 - b_1 x_2 \\ \sigma t = -a_2 x_1 + a_1 x_2. \end{cases}$$

$$(14')\quad \begin{cases} \sigma u = \phantom{-a_2 u_1 +{}} b_2 u_1 - b_1 u_2 \\ \sigma v = -a_2 u_1 + a_1 u_2. \end{cases}$$

Die *Verhältnisse* der x_1, x_2 und x, t, beziehungsweise der u_1, u_2 und u, v bestimmen sich also *gegenseitig eindeutig*.

Die homogenen *gemeinen* Koordinaten x, t gehen aus (13) mit $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_2 = 1$ als *Spezialfall der Zweieckskoordinaten* hervor (vgl. § 6, 9).

9. Darstellung der Zweieckskoordinaten in abgekürzten Symbolen. Aus § 6, 8 folgt ferner bei Einführung der homogenen Schreibweise mit den Abkürzungen:

$$(15)\quad \begin{cases} X_1 = a_1 x + b_1 t \\ X_1^0 = a_1 x_0 + b_1 t_0, \\ X_2 = a_2 x + b_2 t \\ X_2^0 = a_2 x_0 + b_2 t_0: \end{cases}$$

Sind

$$(16)\quad X_1 = 0, \quad X_2 = 0$$

die Gleichungen der Eckpunkte des Koordinatenzweiecks und x_0, t_0 *die Koordinaten des Einheitspunktes, so sind die Zweieckskoordinaten des Punktes* x, t:

$$(17)\quad x_1 : x_2 = \frac{X_1}{X_1^0} : \frac{X_2}{X_2^0}.$$

$$(15')\quad \begin{cases} U_1 = a_1 u + b_1 v \\ U_1^0 = a_1 u_0 + b_1 v_0, \\ U_2 = a_2 u + b_2 v \\ U_2^0 = a_2 u_0 + b_2 v_0: \end{cases}$$

Sind

$$(16')\quad U_1 = 0, \quad U_2 = 0$$

die Gleichungen der Seitenstrahlen des Koordinatenzweiecks und u_0, v_0 *die Koordinaten des Einheitsstrahles, so sind die Zweiseitskoordinaten des Strahles* u, v:

$$(17')\quad u_1 : u_2 = \frac{U_1}{U_1^0} : \frac{U_2}{U_2^0}.$$

Die rechte Seite der Formel (17) hängt von den drei Konstanten $a_1 : b_1$, $a_2 : b_2$, $x_0 : t_0$ ab.[39])

10. Beziehung zwischen Zweiecks- und Zweiseitskoordinaten bei perspektiver Lage von Punktreihe und Strahlbüschel. Liegen eine Punktreihe g und ein Strahlbüschel S perspektiv (§ 5, 1), so

kann man als Bestandteile der beiderseitigen Koordinatensysteme (Fig. 52a, 52b) entsprechende Elemente E_1, E_2, E_0 und e_1, e_2, e_0 der perspektiven Beziehung wählen (Fig. 53). Sind dann P und p zwei beliebige entsprechende Elemente, so ist nach § 5, **3**:

$$(E_1 E_2 P E_0) = (e_1 e_2 p e_0)$$

und daher nach (11), (11'):

$$(18) \qquad x_1 : x_2 = u_1 : u_2 .$$

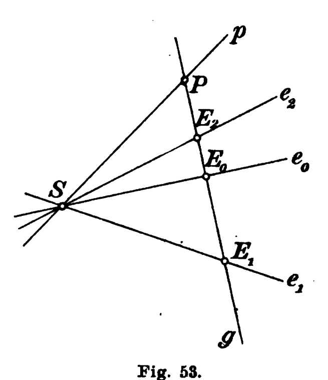


Fig. 53.

Wählt man bei perspektiver Lage von Punktreihe und Strahlbüschel drei Paare entsprechender Elemente als Bestandteile der Koordinatensysteme, so sind die Zweieckskoordinaten eines Punktes ihrem Verhältnisse nach gleich den Zweieckskoordinaten des entsprechenden Strahles[26]) (vgl. § 8, **3**).

Würde man in § 5, (4) $\overline{SO}$ als Längeneinheit nehmen, so würde $x = \operatorname{tg} \varphi$ werden. In der Tat hätte man dann die Punkte $x = 0, \infty, 1$ und die entsprechenden Punkte $\operatorname{tg} \varphi = 0, \infty, 1$ als Bestandteile der beiderseitigen gemeinen Koordinatensysteme genommen (§ 6, **9**).

Infolge der Beziehung (18) können wir die folgenden Betrachtungen auf die Zweieckskoordinaten beschränken, indem wir stillschweigend die Zweiseitskoordinaten einschließen.

11. Darstellung der Doppelverhältnisse in Zweieckskoordinaten. Führt man nach (8) durch die Substitution $\mu_1 = \frac{a_1}{a_2}$, $\mu_2 = \frac{b_1}{b_2}$, $\mu_3 = \frac{c_1}{c_2}$, $\mu_4 = \frac{d_1}{d_2}$ in § 6, (25) die Zweieckskoordinaten $x_1, x_2 = a_1, a_2;\ b_1, b_2;\ c_1, c_2;\ d_1, d_2$ von vier Punkten A, B, C, D ein und setzt allgemein zur Abkürzung:

$$(19) \qquad x_1 y_2 - x_2 y_1 = (xy),$$

so ergibt sich:

Das Doppelverhältnis von vier Punkten A, B, C, D mit den Zweieckskoordinaten $x_1, x_2 = a_1, a_2;\ b_1, b_2;\ c_1, c_2;\ d_1, d_2$ ist[37]):

$$(20) \qquad \delta = (ABCD) = \frac{(ac)(bd)}{(bc)(ad)} = \frac{(a_1 c_2 - a_2 c_1)(b_1 d_2 - b_2 d_1)}{(b_1 c_2 - b_2 c_1)(a_1 d_2 - a_2 d_1)} .$$

Das Doppelverhältnis von zwei Punkten A, B *zu den Eckpunkten* E_1, E_2 des Koordinatenzweiecks folgt (§ 7, (10)) aus (20) mit $c_1 = 0$, $c_2 = 1$; $d_1 = 1$, $d_2 = 0$:

$$(21) \qquad \delta = (E_1 E_2 A B) = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_2}{b_1} .$$

Zwei zu E_1, E_2 harmonische Punkte haben *entgegengesetzte Koordinatenverhältnisse* x_1, x_2 und $x_1, -x_2$ (§ 6, **11**).

12. Gleichung eines Punktes in Zweieckskoordinaten. Wie in § 1, **11** und § 7, **3** kann ein Punkt durch eine *homogene lineare Gleichung* von der Form:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \tag{22}$$

gegeben werden. Seine Zweieckskoordinaten sind dann:

$$x_1 : x_2 = - a_2 : a_1 , \tag{23}$$

woraus zugleich hervorgeht, daß die Gleichung (22) ohne Änderung ihrer Bedeutung mit einem konstanten Faktor multipliziert werden kann.

13. Doppelverhältnis von Punkten, die durch ihre Gleichungen gegeben sind. Sind zwei Punkte G_1, G_2 durch ihre Gleichungen:

$$X_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = 0, \quad X_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = 0 \tag{24}$$

gegeben und zwei Punke P und G_0 durch ihre Koordinaten x_1, x_2 und x_1^0, x_2^0, so erhält man das *Doppelverhältnis* der vier Punkte aus (20), indem man a_1, a_2; b_1, b_2 nach (23) durch $-a_{12}, a_{11}$; $-a_{22}, a_{21}$ und c_1, c_2; d_1, d_2 durch x_1, x_2; x_1^0, x_2^0 ersetzt, also:

$$(G_1 G_2 P G_0) = \frac{(a_{11} x_1 + a_{12} x_2)(a_{21} x_1^0 + a_{22} x_2^0)}{(a_{21} x_1 + a_{22} x_2)(a_{11} x_1^0 + a_{12} x_2^0)} = \frac{X_2^0}{X_1^0} \cdot \frac{X_1}{X_2}, \tag{25}$$

worin:

$$X_1^0 = a_{11} x_1^0 + a_{12} x_2^0, \quad X_2^0 = a_{21} x_1^0 + a_{22} x_2^0.$$

§ 8. Die Transformation der Zweieckskoordinaten.

1. Veränderung des Einheitspunktes bei festen Eckpunkten des Koordinatenzweiecks. Nach § 7, (11) oder (17) ändern sich bei Veränderung des Einheitspunktes E_0 im System der Zweieckskoordinaten x_1, x_2 diese selbst nur je um einen konstanten Faktor. Will man also bei gleichbleibenden Eckpunkten E_1, E_2 des Koordinatenzweiecks an Stelle der alten Koordinaten x_1, x_2 neue Koordinaten y_1, y_2 einführen, deren Einheitspunkt E_0' im alten System die Koordinaten x_1^0, x_2^0 hat, so müssen zwischen den Koordinaten x_1, x_2 und y_1, y_2 desselben Punktes P jedenfalls Beziehungen von der Form:

Fig. 54.

$$\varrho x_1 = m_1 y_1, \quad \varrho x_2 = m_2 y_2$$

bestehen. Die Faktoren m_1, m_2 bestimmen sich aber aus der Bemerkung, das für $y_1, y_2 = 1, 1$ (§ 7, (12)) $x_1, x_2 = x_1^0, x_2^0$ werden soll. Es folgt also (Fig. 54):

Um von den alten Zweieckskoordinaten x_1, x_2 *zu neuen Zweieckskoordinaten* y_1, y_2 *überzugehen, die bei gleichen Eckpunkten* E_1, E_2 *des Koordinatenzweiecks einen anderen Einheitspunkt* $E_0' : x_1, x_2 = x_1^0, x_2^0$ *haben, dienen die Formeln:*

$$\rho x_1 = x_1^0 y_1, \quad \rho x_2 = x_2^0 y_2. \tag{1}$$

Ist insbesondere *der neue Einheitspunkt* E_0' *der vierte harmonische zu den Eckpunkten* E_1, E_2 *und dem alten Einheitspunkte* E_0 ($E_0 : x_1, x_2 = 1, 1$; $E_0' : x_1, x_2 = 1, -1$ nach § 7, (21)), so hat man statt (1):

$$\rho x_1 = y_1, \quad \rho x_2 = -y_2. \tag{2}$$

2. Vertauschung der Eckpunkte des Koordinatenzweiecks. Eine Vertauschung der beiden Eckpunkte E_1, E_2 des Koordinatenzweiecks bei festem Einheitspunkte E_0, die sich in den Formeln:

E_1	E_0	E_2	P
$x_1, x_2 = 0, 1$	$1, 1$	$1, 0$	x_1, x_2
$y_1, y_2 = 1, 0$	$1, 1$	$0, 1$	y_1, y_2

Fig. 55.

$$\rho x_1 = y_2, \quad \rho x_2 = y_1 \tag{3}$$

ausspricht, hat zur Folge, daß für einen beliebigen Punkt P und für die Eckpunkte E_1, E_2 an Stelle von § 7, (11) und (10) die Formeln treten (§ 3, (19)):

$$y_1 : y_2 = (E_1 E_2 E_0 P) = \frac{E_1 E_0}{E_2 E_0} \cdot \frac{E_2 P}{E_1 P}; \quad E_1 : y_1, y_2 = 1, 0; \quad E_2 : y_1, y_2 = 0, 1 \tag{4}$$

(Fig. 55). Wir erwähnen dies, weil wir im folgenden meist von solchen Zweieckskoordinaten Gebrauch machen werden, die gegenüber § 7, (10) durch die eben angegebenen Formeln (4) charakterisiert sind.

3. Transformation des einen Einheitselementes bei perspektiver Lage von Punktreihe und Strahlbüschel. Wir erwähnen es auch zum Zwecke einer Modifikation der Formel § 7, (18). Vertauscht man nämlich E_1 und E_2, und zugleich E_0 mit dem vierten harmonischen Punkte zu E_1, E_2, E_0, so hat man nach (3) und (2) x_1, x_2 durch $x_2, -x_1$ zu ersetzen, indem man die neuen Koordinaten wie die alten mit dem Buchstaben x bezeichnet. Im Strahlbüschel sollen dagegen u_1, u_2 ungeändert bleiben. Dann folgt aber aus § 7, **10**:

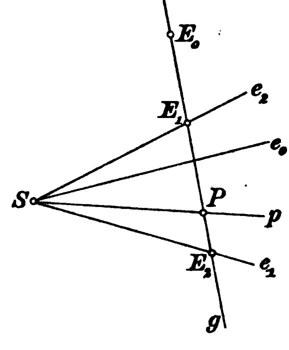


Fig. 56.

Wählt man bei perspektiver Lage von Punktreihe und Strahlbüschel die Bestandteile der beiderseitigen Koordinatensysteme derart, daß E_1, E_2 *auf den Strahlen* e_2, e_1 *liegen* (Fig. 56)

und E_0 der vierte harmonische zu E_1, E_2 und dem Schnittpunkte von e_0 mit g ist, so besteht zwischen Zweiecks- und Zweiseitskoordinaten entsprechender Elemente die Beziehung[40]*):*

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0. \tag{5}$$

4. Einführung eines beliebigen neuen Systems von Zweieckskoordinaten. Wir gehen von einem System von Zweieckskoordinaten x_1, x_2 aus, die sich auf die Ecken E_1, E_2 und den Einheitspunkt E_0 beziehen, so daß nach der Auffassung (4):

Fig. 57.

$$x_1 : x_2 = (E_1 E_2 E_0 P) = \frac{E_1 E_0}{E_2 E_0} \cdot \frac{E_2 P}{E_1 P}. \tag{6}$$

Die Ecken J_1, J_2 und der Einheitspunkt J_0 des neuen Systems (Fig. 57) seien durch ihre Koordinaten $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$; $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$; x_1^0, x_2^0 gegeben. Wie in (6) ist für die neuen Zweieckskoordinaten y_1, y_2:

$$y_1 : y_2 = (J_1 J_2 J_0 P) \tag{7}$$

und daher nach § 7, (20):

$$y_1 : y_2 = \frac{(x_2^{(1)} x_1^0 - x_1^{(1)} x_2^0)(x_2^{(2)} x_1 - x_1^{(2)} x_2)}{(x_2^{(2)} x_1^0 - x_1^{(2)} x_2^0)(x_2^{(1)} x_1 - x_1^{(1)} x_2)} \tag{8}$$

oder mit einem Proportionalitätsfaktor σ:

Sind $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$; $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$; x_1^0, x_2^0 die Koordinaten der neuen Ecken J_1, J_2 und des neuen Einheitspunktes J_0 in bezug auf das alte System E_1, E_2; E_0, so besteht zwischen den neuen Zweieckskoordinaten y_1, y_2 und den alten x_1, x_2 die Beziehung:

$$\begin{cases} \sigma (x_2^{(2)} x_1^0 - x_1^{(2)} x_2^0)\, y_1 = x_2^{(2)} x_1 - x_1^{(2)} x_2 \\ \sigma (x_2^{(1)} x_1^0 - x_1^{(1)} x_2^0)\, y_2 = x_2^{(1)} x_1 - x_1^{(1)} x_2 \end{cases} \tag{9}$$

oder nach x_1, x_2 aufgelöst mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ (Anm. 2,I,2):

$$\begin{cases} \varrho x_1 = x_1^{(1)} (x_2^{(2)} x_1^0 - x_1^{(2)} x_2^0)\, y_1 - x_1^{(2)} (x_2^{(1)} x_1^0 - x_1^{(1)} x_2^0)\, y_2 \\ \varrho x_2 = x_2^{(1)} (x_2^{(2)} x_1^0 - x_1^{(2)} x_2^0)\, y_1 - x_2^{(2)} (x_2^{(1)} x_1^0 - x_1^{(1)} x_2^0)\, y_2. \end{cases} \tag{10}$$[41]

Die Determinante der Koeffizienten von y_1 und $-y_2$ in (10):

$$(x_1^{(1)} x_2^{(2)} - x_2^{(1)} x_1^{(2)})\,(x_2^{(2)} x_1^0 - x_1^{(2)} x_2^0)\,(x_2^{(1)} x_1^0 - x_1^{(1)} x_2^0)$$

ist von Null verschieden, da keine zwei der drei Punkte J_1, J_2, J_0 zusammenfallen.

Die Formeln (9) und (10) enthalten von allen Koordinatenpaaren x_1, x_2; y_1, y_2; $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$; $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$; x_1^0, x_2^0 je nur das *Verhältnis.*

5. Die Transformation der Zweieckskoordinaten als lineare Substitution. Die Gleichungen (10) haben die Form:

$$(11)\qquad \begin{cases} \varrho x_1 = c_{11} y_1 + c_{12} y_2 \\ \varrho x_2 = c_{21} y_1 + c_{22} y_2 \end{cases}$$

mit nicht verschwindender Determinante:

$$(12)\qquad C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}.$$

Die Verhältnisse der Koeffizienten der „linearen Substitution“[42]) (11) sind nach (10) in bestimmter Weise von den Koordinaten der gegebenen Punkte J_1, J_2, J_0 abhängig.

Umgekehrt bestimmen die Gleichungen (11), als Transformationsformeln gedacht, bei beliebig gegebenen Verhältnissen der Koeffizienten $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ die Koordinaten der Punkte J_1, J_2, J_0. Denn diese haben nach § 8, (4) und § 7, (12) im neuen System die Koordinaten:

$$y_1, y_2 = 1, 0; \quad 0, 1; \quad 1, 1.$$

Für ihre Koordinaten $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$; $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$; x_1^0, x_2^0 im alten System folgt daher aus (11) selbst:

$$(13)\quad x_1^{(1)} : x_2^{(1)} = c_{11} : c_{21}; \quad x_1^{(2)} : x_2^{(2)} = c_{12} : c_{22}; \quad x_1^0 : x_2^0 = c_{11} + c_{12} : c_{21} + c_{22}.$$

Entsprechendes gilt für die Auflösungen der Gleichungen (11):

$$(14)\qquad \begin{cases} \sigma y_1 = C_{11} x_1 + C_{21} x_2 \\ \sigma y_2 = C_{12} x_1 + C_{22} x_2, \end{cases}$$

in denen die Koeffizienten die Unterdeterminanten von C sind (Anm. 2, II, 2). Wir heben zusammenfassend hervor:

Für den Übergang von einem alten Zweieckskoordinatensystem x_1, x_2 *zu einem neuen* y_1, y_2 *gelten die Transformationsformeln* (11) *und* (14) *und sind*:

$$(15)\qquad x_1 : x_2 = c_{11} : c_{21}; \quad x_1 : x_2 = c_{12} : c_{22}$$

die alten Koordinaten der neuen Ecken und:

$$(16)\qquad y_1 : y_2 = C_{11} : C_{12}; \quad y_1 : y_2 = C_{21} : C_{22}$$

die neuen Koordinaten der alten Ecken.

Die Einheitspunkte lassen wir in diesem Satze beiseite, da sie nach § 8, 1 auch für sich allein betrachtet werden können.

In gleichem Sinne brauchen wir auch die Formeln (10), indem wir y_1 und y_2 je um einen Faktor ändern, in der kürzeren Form:

$$(17)\qquad \begin{cases} \varrho x_1 = x_1^{(1)} y_1 + x_1^{(2)} y_2 \\ \varrho x_2 = x_2^{(1)} y_1 + x_2^{(2)} y_2, \end{cases}$$

wo wieder $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$ und $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$ die alten Koordinaten der neuen Eckpunkte sind.

6. Darstellung der Transformation durch eine bilineare Gleichung. Da die Gleichungen (11) und (14) nur die Aufgabe haben, die Verhältnisse der x_1, x_2 und der y_1, y_2 eindeutig durcheinander darzustellen, kann man sie mit Elimination von ϱ aus (11) auch durch die eine Gleichung darstellen:

$$c_{21}x_1y_1 + c_{22}x_1y_2 - c_{11}x_2y_1 - c_{12}x_2y_2 = 0. \tag{18}$$

Diese bilineare Gleichung ist also ebenfalls der Ausdruck der Transformation der Zweieckskoordinaten.

7. Beziehung zwischen Zweiecks- und Zweiseitskoordinaten bei perspektiver Lage von Punktreihe und Strahlbüschel. Führt man in § 7, (18) auf der Geraden g mittels der Transformation § 8, (11) statt x_1, x_2 neue Koordinaten y_1, y_2 ein und bezeichnet die letzteren nachträglich wieder mit x_1, x_2, so ergibt sich:

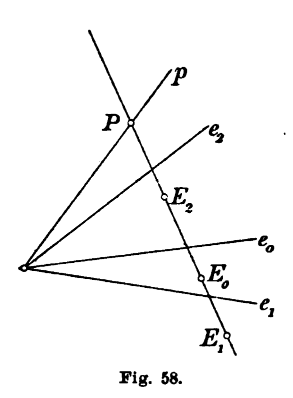


Fig. 58.

Wählt man bei perspektiver Lage von Punktreihe und Strahlbüschel (Fig. 58) *die Bestandteile der beiderseitigen Koordinatensysteme* E_1, E_2, E_0 *und* e_1, e_2, e_0 *ganz unabhängig voneinander, so bestehen zwischen den Koordinaten* x_1, x_2 *des laufenden Punktes* P *der Punktreihe und den Koordinaten* u_1, u_2 *des durch ihn hindurchgehenden Strahles* p *die Beziehungen*[26]*):*

$$\begin{cases} \varrho u_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \\ \varrho u_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \end{cases} \tag{19}$$

oder auch:

$$c_{21}u_1x_1 + c_{22}u_1x_2 - c_{11}u_2x_1 - c_{12}u_2x_2 = 0. \tag{20}$$

8. Invariante der Transformation der Zweieckskoordinaten. Sind P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte der Geraden und $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$; $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$ ihre Koordinaten im alten und $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}$; $y_1^{(2)}, y_2^{(2)}$ ihre Koordinaten im neuen Koordinatensystem von § 8, 5, so ist nach (11):

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11}y_1^{(1)} + c_{12}y_2^{(1)} & c_{21}y_1^{(1)} + c_{22}y_2^{(1)} \\ c_{11}y_1^{(2)} + c_{12}y_2^{(2)} & c_{21}y_1^{(2)} + c_{22}y_2^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_2^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} \end{vmatrix},$$

(Anm. 1, V, 1) also nach (12):

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} x_2^{(1)} \\ x_1^{(2)} x_2^{(2)} \end{vmatrix} = C \begin{vmatrix} y_1^{(1)} y_2^{(1)} \\ y_1^{(2)} y_2^{(2)} \end{vmatrix}. \tag{21}$$

Die Determinante aus den Zweieckskoordinaten zweier beliebigen Punkte ist eine Invariante der Koordinatentransformation.[43])

Ihr Verschwinden bedeutet den Zusammenfall der beiden Punkte.

§ 9. Die Gleichungen der Punktreihe und des Strahlbüschels.

1. Die Gleichung in gemeinen Koordinaten mit multipliziertem Teilungsverhältnis als Parameter. Wenn:

$$(1)\qquad \begin{cases} X_1 = A_1 x + B_1 \\ X_2 = A_2 x + B_2 \end{cases}$$

$$(1')\qquad \begin{cases} U_1 = A_1 + B_1 \operatorname{tg} \varphi \\ U_2 = A_2 + B_2 \operatorname{tg} \varphi \end{cases}$$

gesetzt wird $(A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0)$, so gibt die Gleichung:

$$(2)\qquad \mu = \frac{X_1}{X_2}$$

nach § 6, (10), (12) (mit A, B für a, b) das multiplizierte Teilungsverhältnis μ jedes Punktes x der Geraden, bezogen auf die Anfangspunkte $X_1 = 0$ und $X_2 = 0$ und den Multiplikator $A_1 : A_2$.

$$(2')\qquad \mu = \frac{U_1}{U_2}$$

nach § 6, (10'), (12') (mit B, A für a, b) das multiplizierte Teilungsverhältnis μ jedes Strahles des Strahlbüschels, bezogen auf die Anfangsstrahlen $U_1 = 0$ und $U_2 = 0$ und den Multiplikator

$$\varepsilon_1 \sqrt{A_1^2 + B_1^2} : \varepsilon_2 \sqrt{A_2^2 + B_2^2}$$

(§ 6, (14'), (15')).

Umgekehrt kann man bei gegebenem μ aus (2), bezüglich (2') x und $\operatorname{tg} \varphi$ berechnen und daher mit Hinblick auf § 1, **11** und § 2, **12** sagen:

Sind:

$$(3)\qquad \begin{cases} X_1 = A_1 x + B_1 = 0 \\ X_2 = A_2 x + B_2 = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen zweier verschiedenen Punkte einer Punktreihe im gemeinen Koordinatensystem (Fig. 59 a), *so ist:*

$$(4)\qquad X_1 - \mu X_2 = 0$$

mit:

$$(5)\qquad \mu = \frac{A_1}{A_2} \lambda$$

Fig. 59 a.

Sind:

$$(3')\qquad \begin{cases} U_1 = A_1 + B_1 \operatorname{tg} \varphi = 0 \\ U_2 = A_2 + B_2 \operatorname{tg} \varphi = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen zweier verschiedenen Strahlen eines Strahlbüschels im gemeinen Koordinatensystem (Fig. 59 b), *so ist:*

$$(4')\qquad U_1 - \mu U_2 = 0$$

mit:

$$(5')\qquad \mu = \frac{\varepsilon_1 \sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{\varepsilon_2 \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \lambda, \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = -\operatorname{sign} A_1 \\ \varepsilon_2 = -\operatorname{sign} A_2 \end{cases}$$

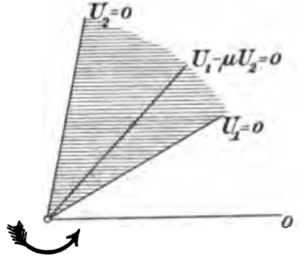


Fig. 59 b.

die Gleichung des Punktes, der die Strecke jener beiden im Verhältnis λ teilt.

Da die Gleichung bei wechselndem μ alle Punkte der Reihe darstellt, nennt man sie die *Gleichung der Punktreihe* mit dem *Parameter* λ, beziehungsweise μ. Die Punkte (3) heißen die *Grundpunkte* der Reihe[44]).

die Gleichung des Strahles, der den Winkel jener beiden im Sinusverhältnis λ teilt. Dabei gilt die den Anfangsstrahl o enthaltende Winkelfläche als äußere[22]), *in der λ positiv ist* (§ 4, **1. 2**).

Man nennt (4') die *Gleichung des Strahlbüschels*, die Strahlen (3') die *Grundstrahlen* des Büschels.

2. Die Gleichung in gemeinen Koordinaten mit Doppelverhältnis als Parameter. In gleicher Weise wie in § 9, **1** ergeben sich die beiden folgenden Sätze aus § 6, **8**:

Sind wieder (3) *die Gleichungen der Grundpunkte G_1, G_2 einer Punktreihe im gemeinen Koordinatensystem*

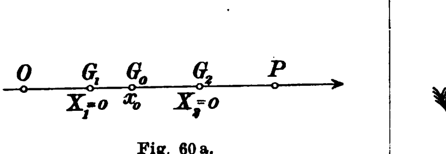


Fig. 60a.

(Fig. 60a) *und x_0 die Koordinate des den Grundpunkten beigegebenen Einheitspunktes G_0, so ist:*

$$(6) \qquad \frac{X_1}{X_1^0} - \mu \frac{X_2}{X_2^0} = 0$$

die Gleichung der Punktreihe, und bedeutet der Parameter μ das Doppelverhältnis des laufenden Punktes P der Reihe zu den Grundpunkten und dem Einheitspunkte:

$$(7) \qquad \mu = (G_1 G_2 P G_0).$$

Sind wieder (3') *die Gleichungen der Grundstrahlen g_1, g_2 eines Strahlbüschels im gemeinen Koordinaten-*

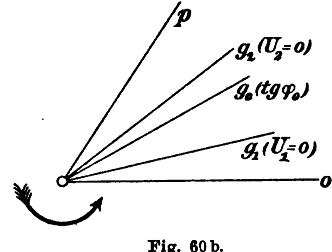


Fig. 60b.

system (Fig. 60b) *und* tg φ_0 *die Koordinate des den Grundstrahlen beigegebenen Einheitsstrahles g_0, so ist:*

$$(6') \qquad \frac{U_1}{U_1^0} - \mu \frac{U_2}{U_2^0} = 0$$

die Gleichung des Strahlbüschels, und bedeutet der Parameter μ das Doppelverhältnis des laufenden Strahles p des Büschels zu den Grundstrahlen und dem Einheitsstrahl:

$$(7') \qquad \mu = (g_1 g_2 p g_0).$$

Die Angabe der innern Winkelfläche ist bei (7') nicht mehr erforderlich (§ 4, **6**).

3. Die Gleichung der Punktreihe in homogenen gemeinen Koordinaten. Bei Anwendung homogener gemeiner Koordinaten x, t und x_0, t_0 für x und x_0 wird die Gleichung (6):

(8) $$\frac{A_1 x + B_1 t}{A_1 x_0 + B_1 t_0} - \mu \frac{A_2 x + B_2 t}{A_2 x_0 + B_2 t_0} = 0.$$

Diese Gleichung kann nun auch auf den Fall angewendet werden, wo mit $A_2 = 0$ *der eine Grundpunkt* $X_2 = A_2 x + B_2 t = 0$ *unendlich fern ist* (§ 7, (6)). Sie wird dann:

(9) $$\frac{A_1 x + B_1 t}{A_1 x_0 + B_1 t_0} - \mu \frac{t}{t_0} = 0,$$

während gleichzeitig nach (7) der Parameter:

(10) $$\mu = (G_1 P_\infty P G_0) = \frac{G_1 P}{G_1 G_0}$$

die Bedeutung des einfachen Teilungsverhältnisses erhält (§ 3, **11**).

4. Die Gleichung der Punktreihe in Zweieckskoordinaten mit Doppelverhältnis als Parameter. Indem wir uns nach der Bemerkung § 7, **10** auf die Punktreihe beschränken, führen wir auf dieser ein System von Zweieckskoordinaten x_1, x_2 mit den Eckpunkten E_1, E_2 und dem Einheitspunkte E_0 ein, so daß wie in § 7, (11):

(11) $$x_1 : x_2 = (E_1 E_2 P E_0).$$

Es seien nun zwei feste Punkte G_1, G_2 der Reihe (Fig. 61) durch ihre Gleichungen:

Fig. 61.

(12) $$X_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = 0, \quad X_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = 0$$

und ein dritter fester Punkt G_0 durch seine Koordinaten x_1^0, x_2^0 gegeben.

Nach § 7, (25) ist das Doppelverhältnis des laufenden Punktes $P = x_1, x_2$ zu den drei festen Punkten:

(13) $$\mu = (G_1 G_2 P G_0) = \frac{X_2^0}{X_1^0} \cdot \frac{X_1}{X_2}.$$

Umgekehrt bestimmt diese Gleichung bei gegebenem μ den Punkt x_1, x_2; sie ist seine Gleichung.

Sind also (12) *die Gleichungen der Grundpunkte* G_1, G_2 *einer Punktreihe in Zweieckskoordinaten* x_1, x_2 *und* x_1^0, x_2^0 *die Koordinaten des den Grundpunkten beigegebenen Einheitspunktes* G_0, *so ist:*

(14) $$\frac{X_1}{X_1^0} - \mu \frac{X_2}{X_2^0} = 0$$

die Gleichung der Punktreihe, und bedeutet der Parameter μ *das Doppelverhältnis des laufenden Punktes* P *der Reihe zu den festen Punkten:*

(15) $$\mu = (G_1 G_2 P G_0).$$

Die Gleichung (14) enthält von den Konstanten der Gleichungen (12) nur die Verhältnisse $a_{11} : a_{12}$, $a_{21} : a_{22}$, wie auch nur die Verhältnisse $x_1^0 : x_2^0$ und $x_1 : x_2$.

Nimmt man die Konstante $X_1^0 : X_2^0$ in den Parameter μ auf und schreibt die Gleichung (14) in der kürzeren Form:

$$X_1 - \mu X_2 = 0, \tag{16}$$

so ist μ schlechthin das multiplizierte Teilungsverhältnis, nach dem P die Strecke $G_1 G_2$ teilt (§ 6, 4).

5. Zusammenfall der Grundpunkte der Reihe mit den Ecken des Koordinatenzweiecks. Fallen die Grundpunkte G_1, G_2 der Punktreihe mit den Ecken E_1 ($x_1 = 0$, § 7, (10)) und E_2 ($x_2 = 0$) des Koordinatenzweiecks zusammen, ist also in (12) $a_{12} = 0$ und $a_{21} = 0$ (Fig. 62), so wird die Gleichung der Punktreihe an Stelle von (14):

E_1 E_0 E_2 / G_1 G_2 G_0

Fig. 62.

$$\frac{x_1}{x_1^0} - \mu \frac{x_2}{x_2^0} = 0, \quad \mu = (E_1 E_2 P G_0). \tag{17}$$

Fällt auch der Einheitspunkt G_0 der Punktreihe mit dem Einheitspunkte E_0 des Koordinatensystems zusammen, wird die Gleichung der Punktreihe:

$$x_1 - \mu x_2 = 0, \quad \mu = (E_1 E_2 P E_0) \tag{18}$$

übereinstimmend mit der Gleichung § 7, (8).

6. Veränderung der Grundpunkte der Punktreihe bei festem Koordinatensystem. In die Gleichung (16) der Punktreihe sollen an Stelle der Grundpunkte G_1, G_2 zwei neue Grundpunkte H_1, H_2 eingeführt werden, die durch ihre Parameter μ_1, μ_2 gegeben sind (Fig. 63). Setzt man dann mit zwei beliebigen konstanten Faktoren m_1 und m_2:

E_1 E_0 E_2 G_1 G_2 H_1 H_2

Fig. 63.

$$Y_1 = m_1 (X_1 - \mu_1 X_2), \quad Y_2 = m_2 (X_1 - \mu_2 X_2), \tag{19}$$

so sind (§ 7, 12):

$$Y_1 = 0, \quad Y_2 = 0 \tag{20}$$

die Gleichungen der Grundpunkte H_1, H_2. Aus (19) folgt aber durch Auflösung nach X_1, X_2:

$$(\mu_1 - \mu_2) X_1 = \mu_1 \frac{Y_2}{m_2} - \mu_2 \frac{Y_1}{m_1}, \quad (\mu_1 - \mu_2) X_2 = \frac{Y_2}{m_2} - \frac{Y_1}{m_1}.$$

Damit wird die Gleichung (16):

$$(\mu - \mu_2) \frac{Y_1}{m_1} - (\mu - \mu_1) \frac{Y_2}{m_2} = 0$$

oder mit der Abkürzung:

$$\nu = \frac{m_1}{m_2} \frac{\mu_1 - \mu}{\mu_2 - \mu}: \tag{21}$$

$$Y_1 - \nu Y_2 = 0. \tag{22}$$

Damit sind also die neuen Grundpunkte (20) in die Gleichung der Punktreihe eingeführt[45]). Der neue Parameter ν bedeutet wieder das multiplizierte Teilungsverhältnis, nach dem der laufende Punkt P der Reihe die Strecke $H_1 H_2$ teilt. Er ist von dem alten Parameter abhängig durch die Formel (21), die bis auf die Bezeichnung des Faktors $m_1 : m_2$ wieder die Formel § 6, (29) ist.

II. Abschnitt.

Die Ebene.

I. Kapitel.

Das gemeine Koordinatensystem.

§ 10. Die gemeinen Koordinaten eines Punktes in der Ebene.

1. Das rechtwinklige Koordinatensystem. Als *Koordinatensystem* in einer Ebene dienen zwei sich senkrecht schneidende gerichtete (§ 1, 3) gerade Linien (Fig. 64). Ihr Schnittpunkt O heißt der *Koordinatenanfangspunkt.* Die beiden Geraden selbst heißen *Koordinatenachsen* und werden als *x-Achse* und *y-Achse* unterschieden. Der Punkt O teilt jede Koordinatenachse in eine *positive* und eine *negative Halbachse.* Die Koordinatenachsen teilen die Ebene in vier *Quadranten.*

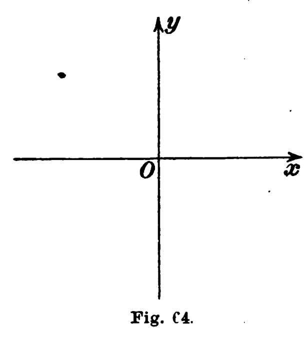


Fig. 64.

2. Projektionen und Koordinaten eines Punktes. Zieht man durch einen beliebigen Punkt P der Ebene (Fig. 65) Senkrechte zur x- und y-Achse (Parallelen zur y- und x-Achse), so schneiden diese die Achsen in bestimmten Punkten P_x und P_y, welche die *orthogonalen Projektionen* des Punktes P auf die Koordinatenachsen heißen.

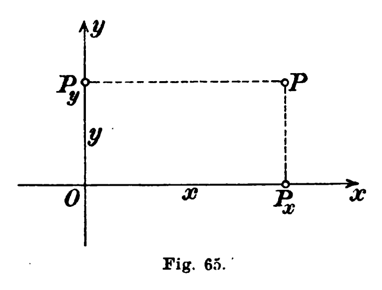


Fig. 65.

Die Entfernungen der Projektionen vom Koordinatenanfangspunkte O (§ 1, 4):

$$x = OP_x, \quad y = OP_y \tag{1}$$

nennen wir *die Koordinaten des Punktes P* in bezug auf das Koordinatensystem Oxy, x die Abszisse oder x-Koordinate, y die Ordinate oder y-Koordinate.

Nach § 1, 6 ist x zugleich die Koordinate des Punktes P_x auf der x-Achse und y die des Punktes P_y auf der y-Achse.[9])

Im Gegensatz zu anderen Koordinaten werden x, y *Cartesische* oder *gemeine* (rechtwinklige) *Koordinaten* oder (rechtwinklige) *Parallelkoordinaten* genannt.[46])

3. Eindeutigkeit der Koordinatenbestimmung. Bei gegebenem Koordinatensysteme gehören nach § 10, 2 zu jedem Punkte P der Ebene zwei eindeutig bestimmte Koordinaten x und y.

Zu irgend zwei als Koordinaten gegebenen Zahlen x und y gehört umgekehrt ein eindeutig bestimmter Punkt P der Ebene.[10])

Denn nach § 1, 6 bestimmen x und y die Punkte P_x und P_y eindeutig. Der Schnittpunkt der durch P_x zur y-Achse und durch P_y zur x-Achse gelegten Parallelen ist aber P.

4. Die Koordinaten als Abstände von den Koordinatenachsen. Indem wir parallelen Geraden der Ebene im allgemeinen auch gleichen

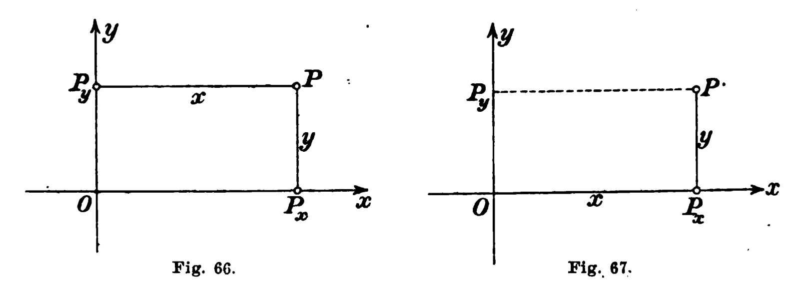


Fig. 66. Fig. 67.

Durchlaufungssinn beilegen, können wir die Koordinaten des Punktes P auch durch die Strecken:

(2) $$x = P_y P, \quad y = P_x P$$

darstellen (Fig. 66). Sie erscheinen dann als die *senkrechten* (parallel der x- und y-Achse gemessenen) *Abstände* des Punktes P von der y- und x-Achse, positiv oder negativ gerechnet, je nachdem die Richtung von den Fußpunkten P_y und P_x nach P hin mit der positiven Richtung der parallelen Achse übereinstimmt oder nicht.[47]) Wir können endlich auch:

(3) $$x = OP_x, \quad y = P_x P$$

nehmen. Die beiden Koordinaten bilden dann einen *gebrochenen Linienzug*, der von O nach P hinführt (Fig. 67).

5. Besondere Werte der Koordinaten. Der Koordinatenanfangspunkt O hat die Koordinaten $x = 0$, $y = 0$. Für alle Punkte der x-Achse ist $y = 0$, für alle der y-Achse $x = 0$.

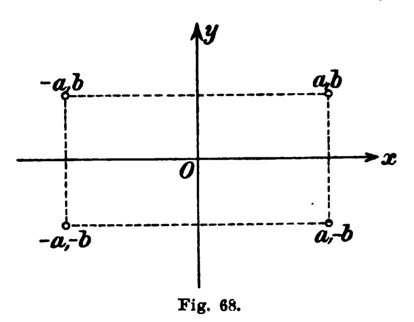


Fig. 68.

Vier Punkte von gleichen absoluten Koordinatenwerten a, b bilden (Fig. 68) die Ecken eines *Rechtecks,* dessen Seiten den Achsen parallel sind und dessen Mittelpunkt O ist (vgl. § 1, 7).

Alle Punkte von gleicher x-Koordinate $x = a$ liegen auf einer Parallelen zur y-Achse, alle Punkte von gleicher y-Koordinate $y = b$ auf einer Parallelen zur x-Achse.

6. Das schiefwinklige Koordinatensystem. Wenn die Koordinatenachsen nicht rechtwinklig, sondern schiefwinklig zueinander sind, so zieht man durch den Punkt P Parallelen zu diesen Achsen (Fig. 69) und erhält so die schiefwinkligen Projektionen P_x und P_y des Punktes P. Die Entfernungen:

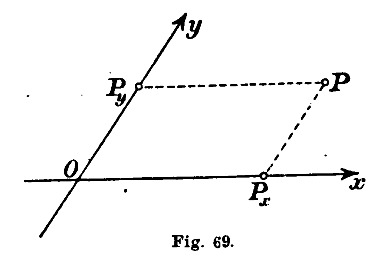


Fig. 69.

(4) $x = OP_x = P_yP, \quad y = OP_y = P_xP$

sind dann die *schiefwinkligen Koordinaten* des Punktes P.

Auch für diese gelten die Angaben § 10, 3—5 mit der unwesentlichen Abänderung, daß in § 10, 4 statt der Bezeichnung „senkrechte Abstände" nur die Bezeichnung „parallel der x- und y-Achse gemessene Abstände" gilt und daß in § 10, 5 statt „Rechteck" gesagt wird „Parallelogramm".

§ 11. Die Richtungswinkel und Richtungskosinus einer Geraden.

1. Positiver Drehungssinn in der Ebene. Zur Bestimmung der relativen Größe der Winkel (§ 2, 4) in der Ebene setzen wir *den der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzten Drehungssinn* allgemein[48]) als *positiven* Drehungssinn fest.[5])

2. Der Richtungswinkel einer gerichteten Geraden gegen die x-Achse. Eine gerichtete (vgl. § 1, 3) unbegrenzte oder begrenzte Gerade g hat danach gegen eine feste gerichtete Gerade, etwa die x-Achse des Koordinatensystems (Fig. 70), einen bis auf Vielfache von 2π bestimmten *Richtungswinkel:*

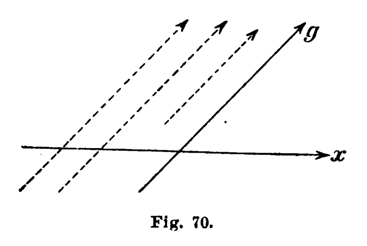


Fig. 70.

(1) $\varphi = xg$

(vgl. § 2, 7).

Alle mit g parallelen und gleichgerichteten Geraden (oder Strecken) haben denselben Richtungswinkel (Fig. 70).

3. Positiv oder negativ orientiertes Achsensystem. Je nachdem bei einem Achsensystem Oxy die positive Halbachse y auf der *linken* oder *rechten Seite* der x-Achse (mit Bezug auf deren positiven Durch-

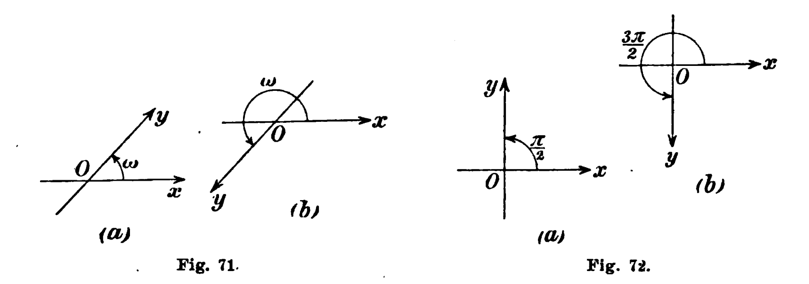


Fig. 71. Fig. 72.

laufungssinn) liegt (Fig. 71, (*a*) und (*b*)), nennen wir das Achsensystem *positiv* oder *negativ orientiert.*

Je nachdem daher das Achsensystem positiv oder negativ orientiert ist, hat man für den Richtungswinkel:

$$\omega = xy \tag{2}$$

der y-Achse gegen die x-Achse beziehungsweise:

$$\omega < \pi;\ \sin\omega > 0 \quad \text{oder} \quad \omega > \pi;\ \sin\omega < 0 \tag{3}$$

und in der Formel[49]):

$$\sin xy = \varepsilon\sqrt{1 - \cos^2 xy} \tag{4}$$

beziehungsweise $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$.

Das rechtwinklige System (Fig. 72, (*a*) und (*b*)) ist positiv oder negativ orientiert[12]), je nachdem $\omega = \frac{\pi}{2}$ oder $\omega = \frac{3\pi}{2}$. Wir benutzen in der Regel das positiv orientierte System.

4. Die Richtungswinkel einer gerichteten Geraden gegen beide Koordinatenachsen. Bei gegebenem Koordinatensystem Oxy zieht man statt des einen Richtungswinkels φ in (1) der Symmetrie wegen auch die beiden Richtungswinkel:

$$\varphi = xg, \quad \psi = yg \tag{5}$$

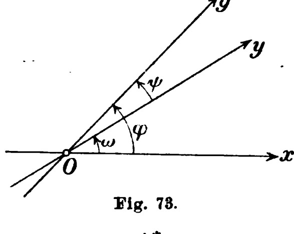


Fig. 73.

in Betracht (Fig. 73). Zwischen diesen besteht nach § 2, (9) die Beziehung:

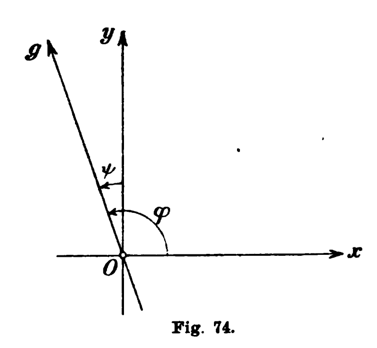


Fig. 74.

$$xg + gy + yx = 0$$

oder nach (2) und (5):

(6) $$\psi = \varphi - \omega;$$

beim positiv (Fig. 74) oder negativ orientierten rechtwinkligen System bezüglich:

(7) $$\psi = \varphi - \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \psi = \varphi + \frac{\pi}{2}.$$

5. Die Richtungskosinus. Die Kosinus der beiden Winkel φ und ψ

(8) $$a = \cos\varphi, \quad b = \cos\psi$$

heißen die *Richtungskosinus*[50]) *der gerichteten Geraden* g. Zur Bildung dieser können statt φ und ψ nach § 2, 4 auch die absoluten konvexen oder konkaven Winkel

(9) $$\overline{\varphi} = \overline{xg}, \quad \overline{\psi} = \overline{yg}$$

benutzt werden.

Entgegengesetzt gerichtete Gerade haben entgegengesetzte Richtungskosinus

(10) $$a, b \quad \text{und} \quad -a, -b.$$

6. Richtungskosinus im rechtwinkligen System. Beim positiv orientierten rechtwinkligen System (Fig. 75) stellen sich die Richtungs-

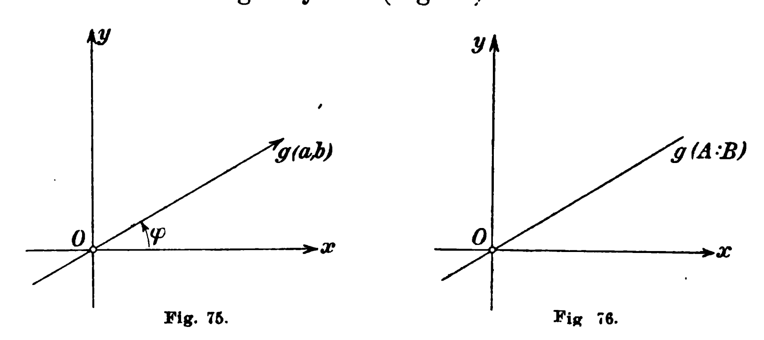


Fig. 75. Fig. 76.

kosinus durch den einen Richtungswinkel φ nach (7) in der Weise dar:

(11) $$a = \cos\varphi, \quad b = \sin\varphi$$

($b = -\sin\varphi$ bei negativ orientiertem System), und besteht daher zwischen ihnen die Relation:

(12) $$a^2 + b^2 = 1.$$

7. Die Verhältnisse der Richtungskosinus. Kennt man daher zwei Größen A, B, die sich wie die Richtungskosinus a, b verhalten:

(13) $$a : b = A : B,$$
so sind diese mit Benutzung der Relation (12) bis auf ein gemeinsames Vorzeichen bestimmt:

(14) $$a = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad b = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Die Verhältnisse der Richtungskosinus bestimmen also (Fig. 76) nach (10) die *ungerichtete* Gerade ($b : a = \operatorname{tg} \varphi$ nach (11)); sie sind *homogene Koordinaten* der ohne Pfeilspitze genommenen Richtung (wie x, y in § 7, (2)).

§ 12. Die Koordinaten einer Strecke.

1. Polarkoordinaten einer Strecke. Eine *Strecke* PP' (Fig. 77) mit dem Anfangspunkte P und dem Endpunkte P' (vgl. § 1, 1) hat eine bestimmte *absolute Länge* (vgl. § 1, 2):

(1) $$s = \overline{PP'}$$

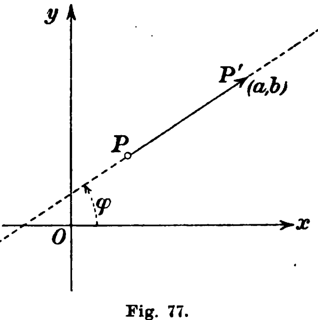


Fig. 77.

und eine bestimmte *Richtung* (vgl. § 11, 2). Während aber die Strecke in einer Geraden (vgl. § 1, 4) nur *zwei* Richtungen haben kann, bleiben einer Strecke in der Ebene *unendlich viele* (∞^1) Richtungen offen. Zur Bestimmung der Richtung dient daher nicht mehr wie dort das *zweifache* Vorzeichen (vgl. jedoch § 12, 8), sondern der *Richtungswinkel* φ oder die *Richtungskosinus* a, b der Strecke:

(2) $$\varphi = xs, \quad a = \cos xs, \quad b = \cos ys.$$

Hierbei wird der Einfachheit wegen s in *doppelter* Bedeutung gebraucht, insofern es in der Regel, wie in (1) die absolute Länge der Strecke, in dem Fall aber, wo es unter dem Kosinus als Schenkel eines Winkels vorkommt, die gerichtete Strecke PP' oder eine Gerade von gleicher Richtung (vgl. § 11, 2) bedeutet.

Wir nennen die absolute Größe s und die Richtungskosinus a, b die Polarkoordinaten der Strecke.[51])

2. Gemeine Koordinaten der Strecke. Die Projektion $P_x P_x'$ einer Strecke PP' (Fig. 78) auf die x-Achse wird von den Projektionen P_x und P_x' der Endpunkte P und P' (§ 10, 2) begrenzt. Sie ist wieder eine Strecke, und zwar eine solche, die nur zwei Richtungen

haben kann, da sie in der festen x-Achse liegt; sie wird daher positiv oder negativ gerechnet im Sinne von § 1, 4.

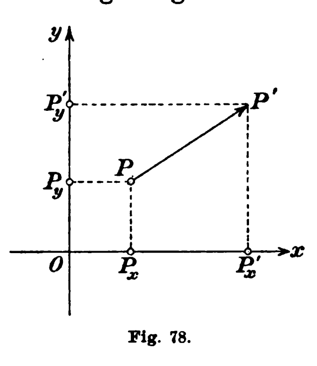


Fig. 78.

Die Projektionen der Strecke PP' auf die beiden Koordinatenachsen:

(3) $$X = P_x P_x', \quad Y = P_y P_y'$$

heißen die *gemeinen rechtwinkligen oder rechtwinkligen Parallelkoordinaten der Strecke.*

Durch die Koordinaten x, y und x', y' der beiden Endpunkte P und P' dargestellt, haben sie nach § 10, 2 und § 1, (5) die Werte:

(4) $$X = x' - x, \quad Y = y' - y.$$

3. Beziehung zwischen gemeinen und Polarkoordinaten. Ist allgemein $A'B'$ die orthogonale Projektion einer Strecke AB auf die gerichtete Gerade x (Fig. 79), so ist:

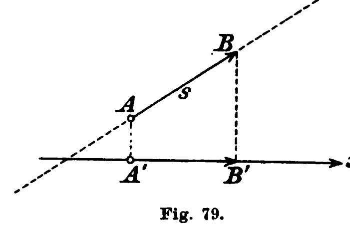


Fig. 79.

(5) $$A'B' = \overline{AB} \cdot \cos xs = \overline{AB} \cdot \cos \overline{xs},$$

wo s unter dem Kosinus wie in § 12, 1 die Strecke AB ihrer Richtung nach bedeutet und die Größe des Winkels nach § 11, 5 relativ oder absolut genommen werden kann.

Infolge dieses Satzes bestehen *zwischen gemeinen und Polarkoordinaten einer Strecke die Beziehungen:*

$$P_x P_x' = \overline{PP'} \cdot \cos xs, \quad P_y P_y' = \overline{PP'} \cdot \cos ys$$

oder:

(6) $$X = as, \quad Y = bs.$$

Mit Einführung der Koordinaten der Endpunkte P und P' werden diese Gleichungen:

(7) $$x' - x = as, \quad y' - y = bs.$$

Hieraus aber ergibt sich durch Auflösung nach a, b, s mit Hinblick auf § 11, (12) die *Darstellung der Polarkoordinaten der Strecke durch die Koordinaten der Endpunkte:*

(8) $$s = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}, \quad a = \frac{x' - x}{s}, \quad b = \frac{y' - y}{s}.$$

4. Beziehung zwischen einer Strecke und ihren Koordinaten. Die Strecke PP' bestimmt ihre Polarkoordinaten und gemeinen Koordinaten vollkommen eindeutig, aber nicht umgekehrt. Denn

parallele gleichgerichtete und gleichlange Strecken P_0P_0' und PP' (Fig. 80) haben dieselben Polarkoordinaten und dieselben gemeinen Koordinaten.

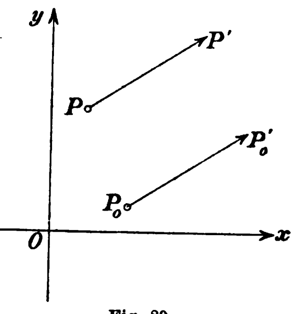


Fig. 80.

Durch die Koordinaten x, y ihres Anfangspunktes P und ihre eigenen Koordinaten s, a, b oder X, Y ist dagegen die Strecke vollkommen bestimmt, da alsdann die Formeln (7) oder (4) auch die Koordinaten x', y' des Endpunktes liefern.

5. Polarkoordinaten des Punktes. Die vom Koordinatenanfangspunkte O nach dem Punkte P hinlaufende Strecke OP (Fig. 81) heißt der *Leitstrahl* (Radius vector) des Punktes P.

Die absolute Länge und der Richtungswinkel (oder die Richtungskosinus) des Leitstrahles (die Polarkoordinaten der Strecke OP):

$$(9)\quad \begin{cases} r = \overline{OP}, \quad \varphi = xr, \quad a = \cos xr, \\ \qquad\qquad b = \cos yr \end{cases}$$

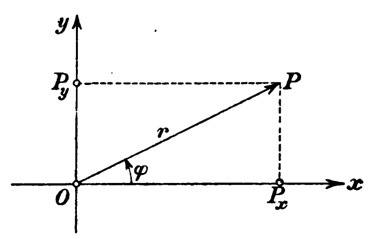


Fig. 81.

heißen die *Polarkoordinaten des Punktes P*. Dabei ist r ebenso wie s in § 12, **1** in doppelter Bedeutung gebraucht.

Alle Punkte von gleichem r liegen auf einem mit dem Radius r um O beschriebenen Kreise; alle von gleichem φ auf einem von O unter dem Richtungswinkel φ ausgehenden Halbstrahl. Für den Punkt O ist $r = 0$ und φ unbestimmt, aber auch unnötig.[52])

6. Beziehung zwischen rechtwinkligen und Polarkoordinaten. Zwischen den Koordinaten x, y und den Polarkoordinaten r, a, b des Punktes P bestehen nach (7) die Beziehungen:

$$(10)\qquad x = ar, \quad y = br$$

oder umgekehrt:

$$(11)\qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad a = \frac{x}{r}, \quad b = \frac{y}{r}.$$

Für einen Punkt mit den Polarkoordinaten $r = 1, a, b$ ist nach (10):

$$(12)\qquad x = a, \quad y = b.$$

Zwischen x, y und r, φ gelten bei positiv orientiertem Koordinatensystem nach § 11, (11) die Gleichungen:

$$(13)\qquad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

und umgekehrt:

$$(14) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}.$$

7. Geschlossenes Streckendreieck. Schließt sich von drei Strecken mit den Koordinaten $X_1 Y_1$, $X_2 Y_2$ und $X_3 Y_3$ die zweite an die erste

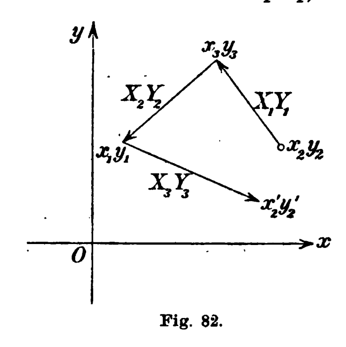


Fig. 82.

Fig. 83.

und die dritte an die zweite an, so ist mit der (Fig. 82) angegebenen Bezeichnung der Endpunkte nach (4):

$$X_1 = x_3 - x_2, \quad X_2 = x_1 - x_3, \quad X_3 = x_2' - x_1,$$
$$Y_1 = y_3 - y_2, \quad Y_2 = y_1 - y_3, \quad Y_3 = y_2' - y_1$$

und daher:

$$X_1 + X_2 + X_3 = x_2' - x_2,$$
$$Y_1 + Y_2 + Y_3 = y_2' - y_2.$$

Daraus folgt (Fig. 83):

Immer dann und nur dann, wenn drei Strecken ein (auch dem Sinne der Seiten nach) geschlossenes Dreieck bilden, sind die Summen ihrer gleichnamigen Koordinaten Null[53]*):*

$$(15) \qquad X_1 + X_2 + X_3 = 0, \quad Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0.$$

Das analoge Resultat gilt für jedes geschlossene Polygon von Strecken.

8. Strecken auf einer und derselben Geraden. Kommen auf einer und derselben gerichteten Geraden g mit den Richtungskosinus a, b mehrere Strecken PP', QQ' (Fig. 84) in Betracht, so haben sie nach § 12, 1 und § 11, (10) die Polarkoordinaten s, a, b oder $s, -a, -b$, wenn s ihre absolute Länge ist. Es ist aber in solchem Falle oft zweckmäßiger, s, a, b und $-s, a, b$ als ihre Polarkoordinaten zu nehmen, also allen Strecken dieselben Richtungskosinus zu geben und

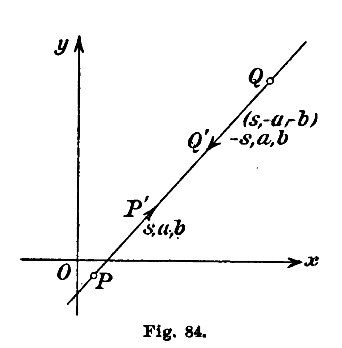


Fig. 84.

ihre Länge nicht absolut, sondern relativ in bezug auf die Richtung a, b zu nehmen (vgl. § 1, 4).

Die Formeln (7) *und* (6) *behalten bei dieser veränderten Auffassung der Polarkoordinaten einer Strecke ihre Gültigkeit,* da sie nur von den Produkten as und bs abhängen.

9. Teilung einer Strecke. Seien (Fig. 85) $P_1 = x_1, y_1$ und $P_2 = x_2, y_2$ zwei Punkte und $P = x, y$ derjenige Punkt, der die Strecke P_1P_2 im Verhältnis λ teilt (vgl. § 3, 1), so daß

$$(16) \qquad \frac{P_1P}{P_2P} = \lambda.$$

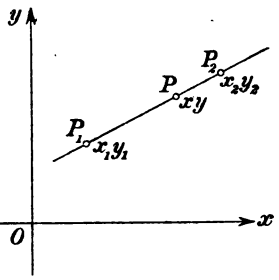


Fig. 85.

Sind dann a, b die Richtungskosinus der Strecke P_1P_2, so haben die Strecken P_1P und P_2P im Sinne von § 12, 8 die Polarkoordinaten P_1P, a, b, und P_2P, a, b, so daß nach (7):

$$x - x_1 = P_1P \cdot a, \quad y - y_1 = P_1P \cdot b,$$
$$x - x_2 = P_2P \cdot a, \quad y - y_2 = P_2P \cdot b.$$

Hieraus folgt aber durch Division mit Rücksicht auf (16):

$$(17) \qquad \frac{x - x_1}{x - x_2} = \lambda, \quad \frac{y - y_1}{y - y_2} = \lambda$$

und durch Auflösen nach x und y:

Die Koordinaten x, y des Punktes, der die Strecke der Punkte x_1, y_1 und x_2, y_2 im Verhältnis λ teilt, sind (vgl. § 3, 2):

$$(18) \qquad x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}.$$

Der *Mittelpunkt der Strecke* hat die Koordinaten:

$$(19) \qquad x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

§ 13. Der Winkel zweier Geraden.

1. Der Winkel zweier gerichteten Geraden. Zwei gerichtete Gerade p_1 und p_2 (Fig. 86) sollen in einem positiv orientierten Koordinatensystem die Richtungswinkel φ_1 und φ_2, bezüglich die Richtungskosinus a_1, b_1 und a_2, b_2 haben, so daß nach § 11, (11):

$$(1) \qquad \begin{cases} a_1 = \cos\varphi_1, & b_1 = \sin\varphi_1, \\ a_2 = \cos\varphi_2, & b_2 = \sin\varphi_2. \end{cases}$$

Nach § 2, (9) ist nun, da die Winkel sich bei paralleler Verschiebung der Geraden x, p_1, p_2 nach einem gemeinsamen Scheitelpunkte nicht ändern (vgl. § 11, 2), stets $p_1p_2 = xp_2 - xp_1$ und damit:

(2) $$\omega = p_1p_2 = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Da hiernach:

(2) $\cos\omega = \cos\varphi_2\cos\varphi_1 + \sin\varphi_2\sin\varphi_1,\quad \sin\omega = \sin\varphi_2\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1\cos\varphi_2,$

so folgt nach (1):

Für den Winkel $\omega = p_1p_2$ zweier durch ihre Richtungskosinus a_1, b_1 und a_2, b_2 gegebenen Geraden ist:

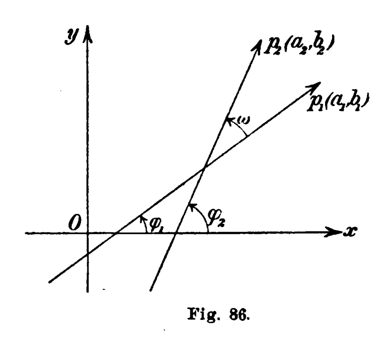


Fig. 86.

(3) $$\cos\omega = \cos\overline{\omega} = a_1a_2 + b_1b_2,$$

(4) $$\sin\omega = a_1b_2 - b_1a_2.$$

Die Formel (3) gilt nach § 2, 4 sowohl für die relative als auch für die absolute Größe des Winkels. In der Tat ändert sich die rechte Seite von (3) bei Vertauschung der beiden Schenkel p_1 und p_2 nicht, während die rechte Seite von (4) das Vorzeichen wechselt.

Der Winkel $\overline{\omega}$ ist nach (3) spitz oder stumpf, je nachdem $a_1a_2 + b_1b_2 > 0$ oder < 0.

2. Senkrechte und parallele Gerade. Zwei gerichtete Gerade mit den Richtungskosinus a_1, b_1 und a_2, b_2 sind nach (3) *senkrecht* zueinander $\left(\omega = \frac{\pi}{2} \text{ oder } \frac{3\pi}{2}\right)$, wenn

(5) $$a_1a_2 + b_1b_2 = 0;$$

dagegen nach (4) und mit Rücksicht auf § 11, 2; 7 *parallel* zueinander ($\omega = 0$ oder π), wenn:

(6) $$a_1 : b_1 = a_2 : b_2;$$

und zwar ist $a_2 = \varepsilon a_1$, $b_2 = \varepsilon b_1$, wo $\varepsilon = +1$ oder -1, je nachdem die Geraden gleichsinnig oder ungleichsinnig parallel sind.

3. Richtungskosinus eines Koordinatensystems gegen ein anderes. Sind a_1, b_1 und a_2, b_2 die Richtungskosinus der Achsen eines schiefwinkligen Koordinatensystems $\Omega\xi\eta$ in bezug auf das rechtwinklige Oxy (Fig. 87), so ist nach (4) die *Determinante D der vier Richtungskosinus:*

(7) $$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \sin\omega = \sin\xi\eta;$$

und daher nach § 11, 3 $D > 0$ oder < 0, je nachdem das System $O\xi\eta$ positiv (wie Oxy) oder negativ orientiert ist.

Ist das System $\Omega\xi\eta$ rechtwinklig (Fig. 88), also $\omega = \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{oder } \frac{3\pi}{2}\right)$,

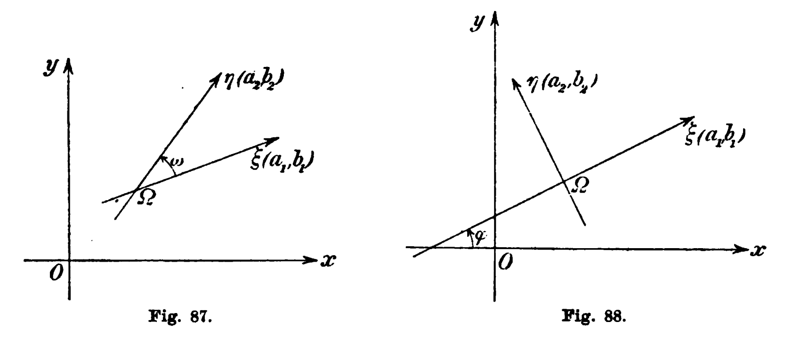


Fig. 87. Fig. 88.

so *lassen sich alle vier Richtungskosinus durch* $\varphi = x\xi$ *ausdrücken.* Es ist nämlich nach (1); (2) mit $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \varphi$ $\left(\frac{3\pi}{2} + \varphi\right)$:

$$(8) \qquad \begin{cases} a_1 = \cos\varphi, & b_1 = \sin\varphi, \\ a_2 = -\sin\varphi, & b_2 = \cos\varphi, \quad (a_2 = \sin\varphi,\ b_2 = -\cos\varphi). \end{cases}$$

Hiernach aber gelten für die vier Richtungskosinus nicht nur die Formeln:

$$(9) \qquad a_1^2 + b_1^2 = 1, \qquad a_2^2 + b_2^2 = 1, \qquad a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$$

(§ 11, (12) und § 13, (5)), sondern auch:

$$(10) \qquad a_1^2 + a_2^2 = 1, \qquad b_1^2 + b_2^2 = 1, \qquad a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

Ferner ist die *Determinante der vier Richtungskosinus des einen rechtwinkligen Systems gegen das andere:*

$$(11) \qquad D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = +1 \text{ oder } -1,$$

je nachdem $O\xi\eta$ positiv (wie Oxy) oder negativ orientiert ist.

4. Die linksläufige und rechtsläufige Normale einer Strecke. Sind s, a, b die Polarkoordinaten einer durch ihre Endpunkte $P = x, y$ und $P' = x', y'$ gegebenen Strecke PP', so ist nach § 12, (8):

$$a = \frac{x' - x}{s}, \quad b = \frac{y' - y}{s}.$$

Sind nun a', b' die Richtungskosinus der linksläufigen (nach links laufenden) Normale n der Strecke, bezüglich der durch die Strecke bestimmten gerichteten Geraden p (Fig. 89), so ist nach (5) und (4) mit $\omega = \frac{\pi}{2}$:

$$aa' + bb' = 0, \qquad ab' - ba' = 1.$$

Daher sind die Richtungskosinus der linksläufigen Normale der Strecke PP':

(12) $$a' = -b = -\frac{y'-y}{s}, \quad b' = a = \frac{x'-x}{s}.$$

Die entgegengesetzten Richtungskosinus kommen der rechtsläufigen Normale zu.

5. Die Teilung des Winkels zweier gerichteten Geraden. Sind (Fig. 90) u, v die Richtungskosinus derjenigen ungerichteten Geraden p,

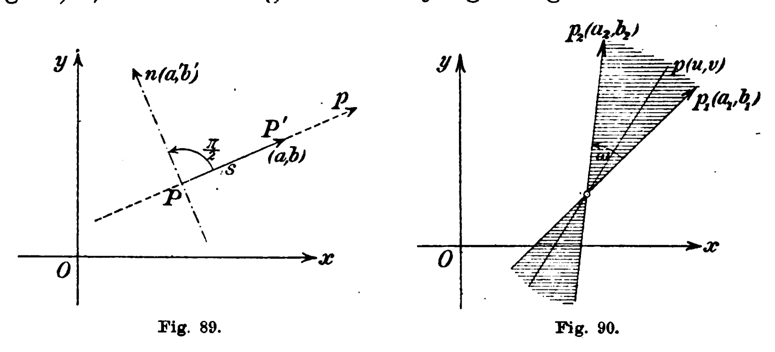


Fig. 89. Fig. 90.

die den Winkel der beiden gerichteten Geraden p_1 und p_2 mit den Richtungskosinus a_1, b_1 und a_2, b_2 im Sinusverhältnis λ teilt (vgl. § 4, 2), so ist nach (4):

$$\frac{\sin p_1 p}{\sin p_2 p} = \frac{a_1 v - b_1 u}{a_2 v - b_2 u} = \lambda$$

und daher:

$$\frac{u}{v} = \frac{a_1 - \lambda a_2}{b_1 - \lambda b_2}$$

und nach § 11, 7:

$$\varrho u = a_1 - \lambda a_2, \quad \varrho v = b_1 - \lambda b_2,$$

wo:

$$\varrho^2 = (a_1 - \lambda a_2)^2 + (b_1 - \lambda b_2)^2 = (a_1{}^2 + b_1{}^2) - 2(a_1 a_2 + b_1 b_2)\lambda$$
$$+ (a_2{}^2 + b_2{}^2)\lambda^2 = 1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2.$$

Die Richtungskosinus der ungerichteten Geraden, die den Winkel der beiden gerichteten Geraden $p_1 = a_1, b_1$ und $p_2 = a_2, b_2$ im Sinusverhältnis λ teilt, sind:

(13) $$u = \frac{a_1 - \lambda a_2}{\varrho}, \quad v = \frac{b_1 - \lambda b_2}{\varrho}, \quad \varrho = \sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2},$$

wo $\omega = p_1 p_2$ ist.

6. Die Richtungskosinus der Halbierungslinien eines Winkels. Insbesondere folgt aus (13) mit $\lambda = -1$ und $\lambda = +1$ für die *Richtungskosinus der inneren und äußeren* Halbierungslinie h_1 und h_2 (Fig. 91) des

Winkels $\omega = p_1 p_2$ (vgl. § 4, 5), da $1 + \cos\omega = 2\cos^2\frac{\omega}{2}$, $1 - \cos\omega = 2\sin^2\frac{\omega}{2}$, ist:

$$(14)\quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{a_1 + a_2}{\varrho}, \quad v_1 = \dfrac{b_1 + b_2}{\varrho}, \quad \varrho = \pm 2\cos\dfrac{\omega}{2} \\ u_2 = \dfrac{a_1 - a_2}{\varrho}, \quad v_2 = \dfrac{b_1 - b_2}{\varrho}, \quad \varrho = \pm 2\sin\dfrac{\omega}{2}. \end{cases}$$

§ 14. Die Transformation der Koordinaten.

1. Übergang von einem Koordinatensystem zu einem parallelen. Es sei (Fig. 92) Oxy das ursprüngliche Koordinatensystem und $O'x'y'$ ein neues Koordinatensystem, dessen Achsen x', y' bezüglich mit den

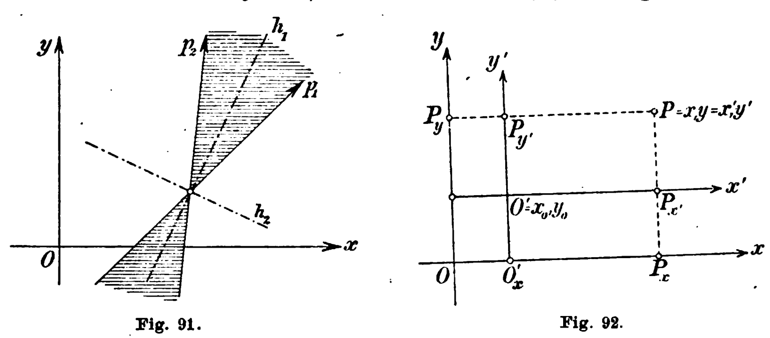


Fig. 91. Fig. 92.

Achsen x, y parallel und gleichgerichtet sind, und dessen Anfangspunkt O' in bezug auf Oxy die Koordinaten x_0, y_0 hat. Alsdann ist zunächst:

$$x_0 = OO_x', \quad y_0 = OO_y'$$

wo O_x' und O_y' die Projektionen von O' auf die Achsen x und y sind; ferner wird für die Koordinaten eines beliebigen Punktes P in bezug auf die beiden Systeme:

$$x = OP_x, \; y = OP_y; \quad x' = O'P_{x'}, \; y' = O'P_{y'},$$

wo die Projektionen P_x, $P_{x'}$ und P_y, $P_{y'}$ des Punktes P auf je zwei gleichnamige parallele Achsen durch dieselbe projizierende Gerade ausgeschnitten werden. Es gelten dann nach § 1, (3) die Beziehungen:

$$OP_x = OO_x' + O_x'P_x = OO_x' + O'P_{x'}, \quad OP_y = OO_y' + O'P_{y'}$$

und folgt:

Zwischen den Koordinaten x, y und x', y' eines und desselben Punktes P in bezug auf zwei parallele Systeme, ein altes Oxy und ein neues $O'x'y'$, bestehen die Gleichungen:

$$(1)\qquad x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y',$$

wo x_0, y_0 *die Koordinaten des neuen Anfangspunktes im alten System sind* (vgl. § 1, (7)).[54])

Dieser Satz gilt mit gleicher Ableitung auch für zwei parallele *schiefwinklige* Systeme (vgl. § 10, **6**).

2. Übergang von einem rechtwinkligen zu einem konzentrischen schiefwinkligen System. Es sei (Fig. 93) Oxy das ursprüngliche rechtwinklige Koordinatensystem. Die von O ausgehenden Achsen eines schiefwinkligen Systems $O\xi\eta$ sollen durch ihre Richtungskosinus a_1, b_1 und a_2, b_2 gegeben sein.

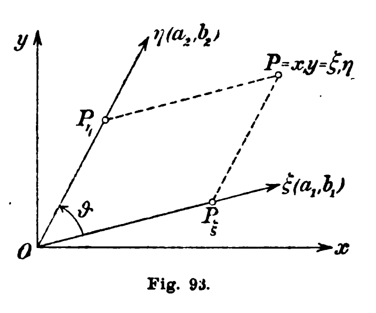


Fig. 93.

Alsdann sind zunächst (Fig. 93) die schiefwinkligen Koordinaten ξ, η eines Punktes P nach § 10, (4):

$$\xi = OP_\xi, \quad \eta = OP_\eta.$$

Zugleich haben die Strecken OP_ξ und $OP_\eta = P_\xi P$ in bezug auf das alte System Oxy im Sinne von § 12, **8** die Polarkoordinaten:

$$\xi, a_1, b_1; \quad \eta, a_2, b_2,$$

also nach § 12, (6) die gemeinen Koordinaten:

$$X_1 = a_1\xi, \; Y_1 = b_1\xi; \quad X_2 = a_2\eta, \; Y_2 = b_2\eta.$$

Da andererseits die Strecke PO nach § 12, (4) die gemeinen Koordinaten:

$$X_3 = -x, \quad Y_3 = -y$$

hat, und die drei Strecken OP_ξ, $P_\xi P$, PO ein geschlossenes Dreieck bilden, so ist nach § 12, **7**:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0, \quad Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0,$$

also:

Zum Übergang von einem rechtwinkligen System Oxy zu einem schiefwinkligen System $O\xi\eta$ (Fig. 93), *dessen Achsen in bezug auf jenes die Richtungskosinus a_1, b_1 und a_2, b_2 haben, dienen die Formeln*[55]):

$$(2) \qquad \begin{cases} x = a_1\xi + a_2\eta \\ y = b_1\xi + b_2\eta. \end{cases}$$

Die *Determinante der vier Richtungskosinus* ist nach § 13, **3**:

$$(3) \qquad D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \sin\vartheta = \sin\xi\eta$$

und ist positiv oder negativ, je nachdem $O\xi\eta$ positiv (wie Oxy) oder negativ orientiert ist.

Durch Auflösung (Anm. 2, I, (2)) der Gleichungen (2) ergibt sich die Darstellung der neuen Koordinaten ξ, η durch die alten x, y, nämlich, wenn A_1, B_1, A_2, B_2 die Unterdeterminanten von D bedeuten (Anm. 1, I, (2)):

$$(4) \qquad \begin{cases} D\xi = A_1 x + B_1 y \\ D\eta = A_2 x + B_2 y \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} \sin\vartheta \cdot \xi = b_2 x - a_2 y \\ \sin\vartheta \cdot \eta = -b_1 x + a_1 y. \end{cases}$$

3. Übergang von einem rechtwinkligen zu einem konzentrischen rechtwinkligen System.[56]) Ist das neue System $O\xi\eta$ ebenso wie das alte Oxy rechtwinklig (Fig. 94), so ist nach § 13, 3 die Determinante der vier Richtungskosinus:

$$(5) \qquad D = +1 \quad \text{oder} \quad -1,$$ [57])

je nachdem das neue System mit dem positiv orientierten alten gleich oder ungleich orientiert $\left(\vartheta = \frac{\pi}{2} \text{ oder } \vartheta = \frac{3\pi}{2}\right)$ ist.

Fig. 94.

Die auch jetzt gültigen Gleichungen (2):

$$(6) \qquad \begin{cases} x = a_1 \xi + a_2 \eta \\ y = b_1 \xi + b_2 \eta \end{cases}$$

geben aber, mit a_1, b_1 oder mit a_2, b_2 multipliziert und addiert, infolge von § 13, (9) neben (4) die Auflösung:

$$(7) \qquad \begin{cases} \xi = a_1 x + b_1 y \\ \eta = a_2 x + b_2 y. \end{cases}$$

Der Vergleich mit (4) gibt, wenn $D = 1$ ist:

$$(8) \qquad \begin{cases} A_1 = b_2 = a_1, & B_1 = -a_2 = b_1 \\ A_2 = -b_1 = a_2, & B_2 = a_1 = b_2 \end{cases}$$

in Übereinstimmung mit § 13, (8).

Sind beide Systeme positiv orientiert, kann man in (6) und (7) nach § 13 (8) auch $\varphi = x\xi$ einführen (Fig. 94) und erhält:

$$(9) \qquad \begin{cases} x = \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi \\ y = \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi, \end{cases}$$

$$(10) \qquad \begin{cases} \xi = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ \eta = -x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases}$$

4. Übergang von einem rechtwinkligen System zu einem beliebigen neuen schiefwinkligen System. Sei in bezug auf das ursprüngliche rechtwinklige System Oxy ein schiefwinkliges System

$\Omega\xi\eta$ durch die Koordinaten x_0, y_0 seines Anfangspunktes Ω und die Richtungskosinus a_1, b_1 und a_2, b_2 seiner Achsen gegeben. Man lasse dann von Ω (Fig. 95) ein drittes mit Oxy paralleles System $\Omega x'y'$ ausgehen und bezeichne mit x, y; ξ, η; x', y' die Koordinaten eines Punktes P mit Bezug auf die drei Systeme. Dann ist nach (1):

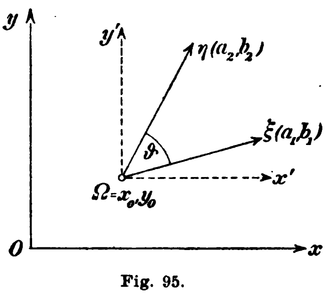


Fig. 95.

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y'$$

und, da die Richtungskosinus der Achsen ξ, η gegen $\Omega x'y'$ dieselben sind, wie gegen Oxy, nach (2):

$$x' = a_1\xi + a_2\eta, \quad y' = b_1\xi + b_2\eta.$$

Zwischen x, y und ξ, η bestehen daher die Formeln:

$$(11) \qquad \begin{cases} x = x_0 + a_1\xi + a_2\eta \\ y = y_0 + b_1\xi + b_2\eta \end{cases}$$

und umgekehrt, wie in § 14, 2:

$$(12) \qquad \begin{cases} D\xi = A_1(x-x_0) + B_1(y-y_0) \\ D\eta = A_2(x-x_0) + B_2(y-y_0). \end{cases}$$

Mit $x = 0$, $y = 0$ erhält man aus (12) für die Koordinaten ξ_0, η_0 des alten Anfangspunktes O im neuen System $\Omega\xi\eta$:

$$(13) \qquad \begin{cases} D\xi_0 = -A_1x_0 - B_1y_0 \\ D\eta_0 = -A_2x_0 - B_2y_0. \end{cases}$$

Damit aber kann man die Formeln (12) in die Form bringen:

$$(14) \qquad \begin{cases} D\xi = D\xi_0 + A_1x + B_1y \\ D\eta = D\eta_0 + A_2x + B_2y. \end{cases}$$

5. Übergang von einem rechtwinkligen System zu einem beliebigen neuen rechtwinkligen System. Für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ werden die Formeln (11) und (12) mit Rücksicht auf (5) und (8)[58]):

$$(15) \qquad \begin{cases} x = x_0 + a_1\xi + a_2\eta \\ y = y_0 + b_1\xi + b_2\eta, \end{cases}$$

$$(16) \qquad \begin{cases} \xi = a_1(x-x_0) + b_1(y-y_0) \\ \eta = a_2(x-x_0) + b_2(y-y_0), \end{cases}$$

und mit den neuen Koordinaten des alten Anfangspunktes (Fig. 96):

$$(17) \qquad \begin{cases} \xi_0 = -a_1x_0 - b_1y_0 \\ \eta_0 = -a_2x_0 - b_2y_0 \end{cases}$$

die Formeln (16) einfacher und mit (15) gleichförmig:

$$(18)\qquad \begin{cases} \xi = \xi_0 + a_1 x + b_1 y \\ \eta = \eta_0 + a_2 x + b_2 y. \end{cases}$$

In der Tat sind a_1, a_2 und b_1, b_2 die Richtungskosinus der alten Achsen x, y im neuen System $\Omega\xi\eta$.

6. Übergang von einem schiefwinkligen zu einem konzentrischen schiefwinkligen System. Sind auf ein rechtwinkliges System Oxy

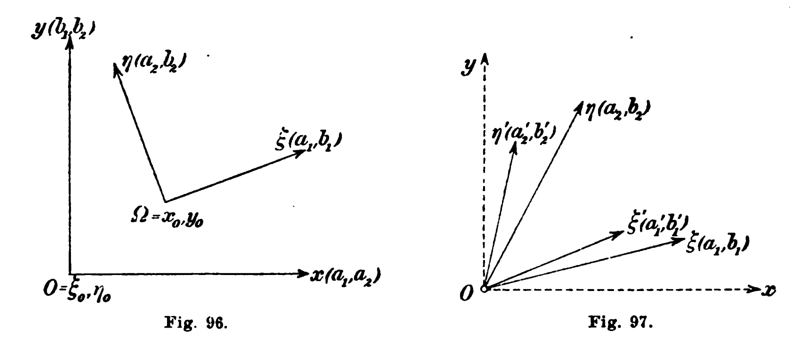


Fig. 96. Fig. 97.

bezogen, a_1, b_1 und a_2, b_2 die Richtungskosinus der Achsen eines schiefwinkligen Systems $O\xi\eta$ und a_1', b_1' und a_2', b_2' die der Achsen eines neuen schiefwinkligen Systems $O\xi'\eta'$ (Fig. 97), so ist nach (4) und (2)

$$\begin{cases} \sin\xi\eta\cdot\xi = b_2 x - a_2 y \\ \sin\eta\xi\cdot\eta = b_1 x - a_1 y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a_1'\xi' + a_2'\eta' \\ y = b_1'\xi' + b_2'\eta' \end{cases}$$

und nach Elimination von x und y:

$$\sin\xi\eta\cdot\xi = (a_1'b_2 - b_1'a_2)\,\xi' + (a_2'b_2 - b_2'a_2)\,\eta'$$
$$\sin\eta\xi\cdot\eta = (a_1'b_1 - b_1'a_1)\,\xi' + (a_2'b_1 - b_2'a_1)\,\eta'.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf § 13, (4):

Zwischen den Koordinaten ξ, η und ξ', η' eines Punktes in bezug auf zwei konzentrische schiefwinklige Systeme $O\xi\eta$ und $O\xi'\eta'$ (Fig. 97) *bestehen die Gleichungen:*

$$(19)\qquad \begin{cases} \sin\xi\eta\cdot\xi = \sin\xi'\eta\cdot\xi' + \sin\eta'\eta\cdot\eta' \\ \sin\eta\xi\cdot\eta = \sin\xi'\xi\cdot\xi' + \sin\eta'\xi\cdot\eta'. \end{cases}$$

Mit $\xi\eta = \vartheta$ und $\xi'\eta' = \frac{\pi}{2}$ wird:

$$\sin\xi'\eta = \sin(\xi'\eta' - \eta\eta') = \cos\eta\eta', \quad \sin\eta'\eta = -\sin(\xi'\eta' + \eta\xi') = -\cos\eta\xi'$$
$$\sin\xi'\xi = \sin(\xi'\eta' - \xi\eta') = \cos\xi\eta', \quad \sin\eta'\xi = -\sin(\xi'\eta' + \xi\xi') = -\cos\xi\xi',$$

womit aus (19) wieder die Formeln (4) folgen, nur daß ξ', η' für x, y steht.

§ 15. Der Flächeninhalt des Dreiecks.

1. Absoluter und relativer Flächeninhalt. Drei Punkte A, B, C der Ebene, die nicht in gerader Linie liegen, bestimmen ein *Dreieck* (Fig. 98a), das mit ABC oder ACB oder einer andern Permutation der drei Buchstaben bezeichnet werden kann. Indem wir jedoch die drei Punkte nicht unterschiedslos als Eckpunkte des Dreiecks ansehen, sondern *die für das Symbol ABC gewählte Reihenfolge der Eckpunkte betonen, legen wir dem Dreieck einen bestimmten Drehungssinn bei,* den wir (Fig. 98b) auf dem Umfang oder durch einen Pfeilbogen im Innern des Dreiecks andeuten.

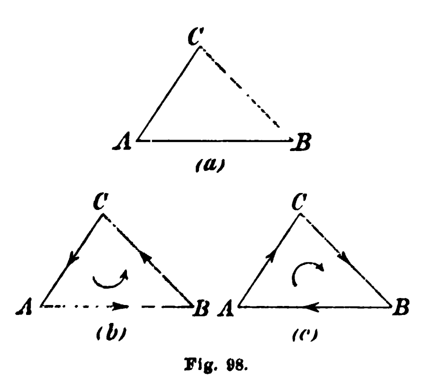


Fig. 98.

Das Symbol ACB würde dann das Dreieck derselben drei Punkte (Fig. 98c), nur mit verändertem Drehungssinne bedeuten (vgl. § 1, **1**). *Der absolute Flächeninhalt* $\overline{ABC}$ des Dreiecks ist von dem Drehungssinne unabhängig:

$$\overline{ABC} = \overline{ACB} \tag{1}$$

(vgl. § 1, (1)).

Der relative Flächeninhalt[6]) ABC soll seinem absoluten Werte nach gleich $\overline{ABC}$, seinem Vorzeichen nach aber *positiv* oder *negativ* sein, *je nachdem der Drehungssinn des Dreiecks ABC mit dem positiven oder negativen Drehungssinne der Ebene* (vgl. § 11, **1**) *übereinstimmt,* je nachdem also (Fig. 98b) A auf der linken oder der rechten Seite der Strecke BC liegt. Daher ist für dieselben drei Punkte A, B, C stets[7]):

$$ABC = BCA = CAB = -ACB = -BAC = -CBA \tag{2}$$

(vgl. § 1, (2)).

2. Darstellung des relativen Flächeninhaltes eines speziellen Dreiecks. Seien P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte mit den gemeinen Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 und den Polarkoordinaten r_1, a_1, b_1 und r_2, a_2, b_2 (Fig. 99). Dann ist nach § 12, (11):

$$a_1 = \frac{x_1}{r_1}, \; b_1 = \frac{y_1}{r_1}; \quad a_2 = \frac{x_2}{r_2}, \; b_2 = \frac{y_2}{r_2}$$

Fig. 99.

und daher für den Winkel ω der beiden

Leitstrahlen OP_1 und OP_2 nach § 13, (4):

(2) $$r_1 r_2 \cdot \sin\omega = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

Nun ist aber andererseits der doppelte relative Flächeninhalt des Dreiecks OP_1P_2:

(3) $$2 \cdot OP_1P_2 = r_1 r_2 \sin r_1 r_2 = r_1 r_2 \sin\omega,$$

da er, ebenso wie $\sin\omega$, positiv oder negativ ist, je nachdem P_2 auf der linken oder rechten Seite der Strecke OP_1 liegt. Daher folgt:

Der doppelte relative Flächeninhalt des von O und den Punkten $P_1 = x_1, y_1$ und $P_2 = x_2, y_2$ gebildeten Dreiecks ist (Anm. 1, I, (1)):

(4) $$2 \cdot OP_1P_2 = x_1 y_2 - y_1 x_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

3. Darstellung des relativen Flächeninhalts eines beliebigen Dreiecks. Seien jetzt drei beliebige Punkte $P_1 = x_1, y_1$, $P_2 = x_2, y_2$, $P_3 = x_3, y_3$ gegeben (Fig. 100). Wir legen durch P_1 ein zu dem ursprünglichen Koordinatensystem Oxy paralleles Koordinatensystem $P_1x'y'$. Sind dann x_2', y_2' und x_3', y_3' die Koordinaten von P_2 und P_3 in bezug auf dieses, so ist nach § 14, (1):

$$x_2' = x_2 - x_1, \quad y_2' = y_2 - y_1;$$
$$x_3' = x_3 - x_1, \quad y_3' = y_3 - y_1.$$

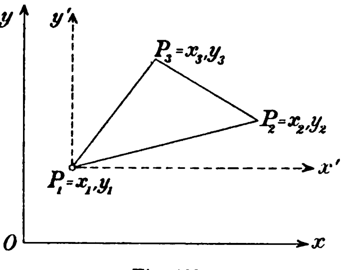


Fig. 100.

Setzen wir diese Werte in die aus (4) folgende Formel:

$$2 \cdot P_1P_2P_3 = \begin{vmatrix} x_2' & y_2' \\ x_3' & y_3' \end{vmatrix}$$

ein, so wird (Anm. 1, II, (6); IV, 4):

(5) $$2 \cdot P_1P_2P_3 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Der doppelte relative Flächeninhalt des von drei Punkten $P_1 = x_1, y_1$, $P_2 = x_2, y_2$, $P_3 = x_3, y_3$ gebildeten Dreiecks ist:

(6) $$2 \cdot P_1P_2P_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Bei einer Transposition der Indizes 1, 2, 3 ändert sich[7]), wie nach (2) erforderlich, das Vorzeichen des Ausdruckes (6).

4. Die von vier Punkten gebildeten Dreiecke. Sind $P_1 = x_1, y_1$; $P_2 = x_2, y_2$; $P_3 = x_3, y_3$; $P_4 = x_4, y_4$ vier Punkte der Ebene, so gibt die Entwicklung der identischen (Anm. 1, IV, 3) Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

nach den Elementen der letzten Kolonne (Anm. 1, III, (17)):

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

und damit nach (6) unabhängig vom Koordinatensystem den Satz (Fig. 101):

Zwischen den relativen Flächeninhalten der vier von vier Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 gebildeten Dreiecke besteht stets die Beziehung[8]):

$$(7) \qquad P_2P_3P_4 + P_3P_1P_4 + P_1P_2P_4 + P_3P_2P_1 = 0,$$

oder wenn man die vier Punkte mit A, B, C, D bezeichnet:

$$(8) \qquad BCD + CAD + ABD + CBA = 0$$

(vgl. § 1, (3)).

5. Der Flächeninhalt des Dreiecks in schiefwinkligen Koordinaten. Führt man in (5) mittels § 14, (2) die schiefwinkligen Ko-

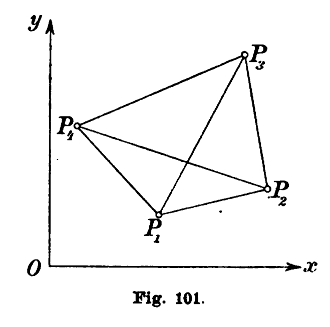


Fig. 101.

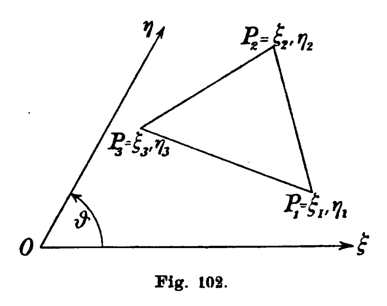


Fig. 102.

ordinaten ξ_1, η_1; ξ_2, η_2; ξ_3, η_3 der Punkt P_1, P_2, P_3 in bezug auf ein mit Oxy konzentrisches schiefwinkliges Koordinatensystem $O\xi\eta$ ($\xi\eta = \vartheta$) ein, so ergibt sich:

$$2 \cdot P_1P_2P_3 = \begin{vmatrix} a_1(\xi_2 - \xi_1) + a_2(\eta_2 - \eta_1) & b_1(\xi_2 - \xi_1) + b_2(\eta_2 - \eta_1) \\ a_1(\xi_3 - \xi_1) + a_2(\eta_3 - \eta_1) & b_1(\xi_3 - \xi_1) + b_2(\eta_3 - \eta_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_2 - \xi_1 & \eta_2 - \eta_1 \\ \xi_3 - \xi_1 & \eta_3 - \eta_1 \end{vmatrix}$$

(Anm. 1, V, 1) oder nach § 14, (3) und mit dem bei (5) gemachten Übergang:

$$(9)\qquad 2\cdot P_1P_2P_3 = \sin\vartheta\cdot\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1 & 1\\ \xi_2 & \eta_2 & 1\\ \xi_3 & \eta_3 & 1\end{vmatrix}.$$

Diese Formel drückt in schiefwinkligen Koordinaten der drei Ecken (Fig. 102) den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks aus.[59])

II. Kapitel.

Die Gleichung der geraden Linie.

§ 16. Die Formen der Gleichung der geraden Linie.

1. Parameterdarstellung der gerichteten geraden Linie. Nach § 12, (7) bestehen zwischen den Polarkoordinaten einer Strecke P_0P, nämlich ihrer Länge s und ihren Richtungskosinus a, b, und den Koordinaten x_0, y_0 und x, y ihrer Endpunkte die Gleichungen (Fig. 103):

$$(1)\qquad x - x_0 = as,\quad y - y_0 = bs.$$

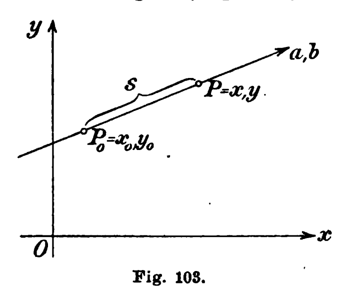


Fig. 103.

Läßt man daher bei festen Werten x_0, y_0, a, b die im Sinne von § 12, 8 relative Länge s der Strecke von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen, so erhält man in:

$$(2)\qquad \begin{cases} x = x_0 + as, \quad y = y_0 + bs,\\ (a^2 + b^2 = 1, \quad -\infty < s < +\infty)\end{cases}$$

der Reihe nach alle Punkte *der gerichteten Geraden, die durch den Punkt x_0, y_0 in der Richtung a, b hindurchgeht.* Jedem Werte von s entspricht ein Punkt der Geraden und umgekehrt.

Man nennt die Gleichungen (2) eine *Parameterdarstellung* der Geraden mit dem Parameter s.[60])

2. Gleichung der durch einen Punkt und eine Richtung bestimmten Geraden. Eliminiert man aus (2) den Parameter s, so findet man die Gerade dargestellt durch die Proportion:

$$(3)\qquad x - x_0 : y - y_0 = a : b$$

oder die Gleichung:

$$(4)\qquad b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0, \qquad (a^2 + b^2 = 1 \text{ oder } \neq 1).$$

Ihr genügt der laufende Punkt der durch den festen Punkt x_0, y_0 in der Richtung a, b hindurchgehenden Geraden; sie heißt daher *die Gleichung der Geraden in laufenden Koordinaten* x, y.

Da in (3) und (4) nur die Verhältnisse von a, b vorkommen, brauchen a, b nicht direkt mehr die Richtungskosinus der Geraden zu sein, sondern sich nur wie diese zu verhalten. Die Gleichung stellt daher die *ungerichtete* Gerade dar (vgl. § 11, 7).

3. Die Gleichung der durch zwei Punkte bestimmten Geraden. *Jede Gerade kann man sich durch zwei getrennte Punkte* $P_1 = x_1, y_1$ *und* $P_2 = x_2, y_2$ *bestimmt denken.* Ein dritter laufender Punkt $P = x, y$ der Ebene bildet mit jenen ein Dreieck (Fig. 104) und liegt immer dann und nur dann in der Geraden P_1, P_2, wenn der Flächeninhalt des Dreiecks Null ist. Nach § 15, (6) folgt daher:

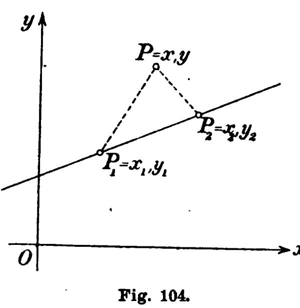


Fig. 104.

Der Punkt x, y liegt immer dann und nur dann in der Geraden der beiden Punkte x_1, y_1 und x_2, y_2, wenn:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Dies ist also die Gleichung der Verbindungslinie der Punkte x_1, y_1 *und* x_2, y_2 *in laufenden Koordinaten* x, y.

4. Allgemeine Form der Gleichung der Geraden. Die Gleichung (5) hat die Form:

$$Ax + By + C = 0, \tag{6}$$

worin:

$$A = y_1 - y_2, \quad B = -(x_1 - x_2), \quad C = x_1 y_2 - y_1 x_2. \tag{7}$$

Jede gegebene Gerade kann also durch eine Gleichung der Form (6) *dargestellt werden.*[61])

Ist jetzt umgekehrt die Gleichung (6) mit willkürlichen Koeffizienten A, B, C gegeben, so wird sie jedenfalls einen Ort von ∞^1 Punkten x, y darstellen, da ihr bei beliebiger Wahl der einen Koordinate durch einen entsprechenden Wert der andern genügt werden kann. Sind nun $P_1 = x_1, y_1$ und $P_2 = x_2, y_2$ irgend zwei getrennte Punkte des fraglichen Ortes, so genügen ihre Koordinaten der Gleichung (6), so daß:

$$(8) \qquad \begin{cases} Ax_1 + By_1 + C = 0, \\ Ax_2 + By_2 + C = 0. \end{cases}$$

Hieraus aber folgt mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ (Anm. 2, II, (12)):

$$(9) \qquad \varrho A = y_1 - y_2, \quad \varrho B = -(x_1 - x_2), \quad \varrho C = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

Die Gleichung (6) aber nimmt durch diese Darstellung ihrer Koeffizienten, von dem Faktor ϱ abgesehen, die Form (5) an, stellt also die Gerade durch die Punkte P_1 und P_2 dar.

Jede gegebene Gleichung von der Form (6) *stellt eine Gerade dar.*

5. Die Anzahl der Konstanten. Die allgemeine Gleichung (6) der Ebene enthält *zwei Konstanten*, die Verhältnisse der drei Koeffizienten A, B, C. In der Tat bestimmen zwei Punkte, welche doch die Gerade vollkommen bestimmen, in (9) nur die Verhältnisse der drei Koeffizienten.

Die drei Koeffizienten der Gleichung einer gegebenen Geraden bleiben daher um einen gemeinsamen Faktor unbestimmt.

Umgekehrt stellen die zwei gegebenen Gleichungen:

$$(10) \qquad \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$$

dieselbe Gerade dar, wenn:

$$(11) \qquad A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2$$

oder mit einem Proportionalitätsfaktor $-\lambda_1 : \lambda_2$ geschrieben:

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = 0, \quad \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 = 0, \quad \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0.$$

Indem man zur Abkürzung setzt:

$$(12) \qquad \begin{cases} X_1 = A_1 x + B_1 y + C_1, \\ X_2 = A_2 x + B_2 y + C_2, \end{cases}$$

spricht man diesen Satz auch so aus:

Die beiden Gleichungen $X_1 = 0$ *und* $X_2 = 0$ *stellen immer dann und nur dann dieselbe Gerade dar, wenn mit zwei nicht verschwindenden Faktoren die in* x, y *identische Gleichung:*

$$(13) \qquad \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = 0$$

besteht.[62])

6. Bedeutung der Koeffizientenverhältnisse der allgemeinen Gleichung. Die Gerade (6) schneidet die Koordinatenachsen in zwei Punkten L und M (Fig. 105), deren Koordinaten sich mit $y = 0$ und $x = 0$ (vgl. § 10, 5) aus (6) ergeben[63]):

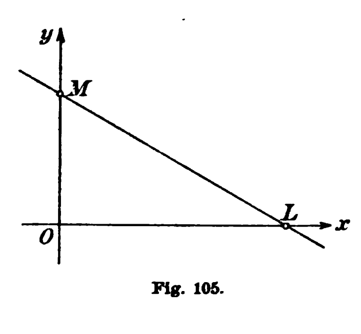


Fig. 105.

(14) $x = OL = -\frac{C}{A}, \quad y = OM = -\frac{C}{B}$.

Mit $C = 0$ geht die Gerade durch O und ihre Gleichung wird von der Form:

(15) $$Ax + By = 0.$$

Mit $B = 0$ wird OM unbegrenzt groß, die Gerade wird der y-Achse parallel und ihre Gleichung von der Form:

(16) $$Ax + C = 0.$$

7. **Die Richtungskosinus der durch die allgemeine Gleichung dargestellten Geraden.** Ist x_0, y_0 ein Punkt der durch Gleichung (6) dargestellten Geraden, also:

$$Ax_0 + By_0 + C = 0,$$

so kann die Gleichung (6) durch Elimination von C in die Form:

(17) $$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

gebracht werden. Dies ist aber die Form (4); es müssen sich also nach (11) die Richtungskosinus a, b der Geraden (17) wie $-B : A$ verhalten. Also *sind die Richtungskosinus der durch die Gleichung:*

$$Ax + By + C = 0$$

gegebenen Geraden (vgl. § 11, 7):

(17) $$a = \frac{-B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad b = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

8. **Gleichung der Geraden in schiefwinkligen Koordinaten.** Die Betrachtungen § 16, **3—6** gelten mit Rücksicht auf § 15, (9) auch für schiefwinklige Koordinaten x, y[64]) (vgl. § 10, **6**).

§ 17. Der Abstand eines Punktes von einer Geraden.

1. **Festsetzung über die positive Richtung einer Geraden.** Kommt es darauf an, eine durch ihre Gleichung:

(1) $$Ax + By + C = 0$$

in bezug auf ein positiv orientiertes Koordinatensystem gegebene Gerade g als *gerichtete* Gerade gelten zu lassen[65]), so soll *als positive Richtung immer diejenige betrachtet werden, welche den Koordinatenanfangspunkt O zur linken Hand läßt* (Fig. 106).

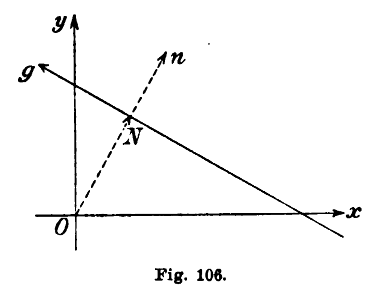


Fig. 106.

Das von O auf die Gerade gefällte Perpendikel ON bezeichnet dann die Richtung der *rechtsläufigen Normalen* n der Geraden g.

2. Bestimmung der Richtungskosinus der gerichteten Geraden und der rechtsläufigen Normale. Sind $P_1 = x_1, y_1$ und $P_2 = x_2, y_2$ irgend zwei in der positiven Richtung von g aufeinanderfolgende Punkte (Fig. 107) von g, so stellen sich die Koeffizienten A, B, C bis auf einen gemeinsamen Faktor, den wir $-\varepsilon\varrho$ ($\varrho > 0$, $\varepsilon = \pm 1$) nennen wollen, durch die Koordinaten von P_1 und P_2 nach § 16, (9) also dar:

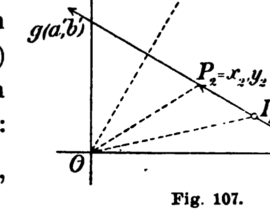


Fig. 107.

$$(2)\begin{cases} -\varepsilon\varrho A = y_1 - y_2, \quad -\varepsilon\varrho B = -(x_1 - x_2), \\ -\varepsilon\varrho C = x_1 y_2 - y_1 x_2, \end{cases}$$

Da nun nach Voraussetzung O auf der linken Seite der Strecke $P_1 P_2$ liegt, ist der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks $O P_1 P_2$ (vgl. § 15, (4)):

$$2 \cdot O P_1 P_2 = x_1 y_2 - y_1 x_2 > 0,$$

also da $\varrho > 0$ sein sollte, nach der letzten Gleichung (2): $-\varepsilon C > 0$ oder:

$$(3) \qquad \varepsilon = -\operatorname{sign} C.$$

Die absolute Länge der Strecke $P_1 P_2$, $s = \overline{P_1 P_2}$, ist nach § 12, (8) mit Rücksicht auf (2):

$$(4) \qquad s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \varrho \sqrt{A^2 + B^2}$$

und die Richtungskosinus der Strecke $P_1 P_2$ ebenso:

$$a' = \frac{x_2 - x_1}{s} = -\frac{B}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad b' = \frac{y_2 - y_1}{s} = \frac{A}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Die der rechtsläufigen Normale sind nach § 13, 4:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{s} = \frac{A}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad b = -\frac{x_2 - x_1}{s} = \frac{B}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Unabhängig von den Punkten P_1 und P_2 folgt also:

Die durch die Gleichung (1) *gegebene und in bezug auf* O (vgl. § 17, 1) *gerichtete Gerade und ihre rechtsläufige Normale haben die Richtungskosinus:*

$$(5) \qquad a' = \frac{-B}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad b' = \frac{A}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$(6) \qquad a = \frac{A}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad b = \frac{B}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2}},$$

wo das Vorzeichen ε *durch* (3) *bestimmt ist.*

3. Der Abstand eines Punktes von der Geraden. *Der Abstand δ eines Punktes $P = x, y$ von der gerichteten Geraden g soll positiv oder negativ gelten, je nachdem der Punkt auf der rechten oder linken Seite von g (mit O ungleichseitig oder mit O gleichseitig) liegt.*

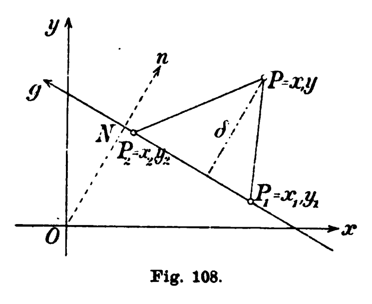


Fig. 108.

Der Flächeninhalt des Dreiecks PP_1P_2 ist daher negativ oder positiv (§ 15, **1**), je nachdem δ positiv oder negativ ist (Fig. 108), also:

$$2 \cdot PP_1P_2 = -s \cdot \delta.$$

Anderseits ist aber nach § 15, (6) mit Benutzung der Gleichungen (2):

$$2 \cdot PP_1P_2 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = -\varrho\varepsilon(Ax + By + C)$$

und daher:

$$s \cdot \delta = \varrho\varepsilon(Ax + By + C).$$

Setzt man hier den Wert s von (4) ein, so folgt:

Der Abstand δ des Punktes $P = x, y$ von der durch die Gleichung (1) *gegebenen und mit Bezug auf O gerichteten Geraden g ist*[66]*):*

$$\delta = \frac{Ax + By + C}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2}}, \tag{7}$$

wo ε wieder durch (3) *bestimmt ist.*

Der Ausdruck (7) ist hiernach für alle Punkte x, y auf der linken Seite der Geraden (1), auf der O liegt, negativ und für alle Punkte auf der rechten Seite positiv, während er für alle Punkte der Geraden selbst verschwindet.

4. Allgemeinere Bestimmung des Vorzeichens ε. Da die Definition § 17, **1** der positiven Richtung der Geraden (1) und die Bestimmung (3) des Vorzeichens ε versagt, wenn die Gerade mit $C = 0$ durch O selbst geht, fügen wir eine andere Auffassung hinzu.

Wir definieren die Richtungskosinus der rechtsläufigen Normale n durch die Formeln (6) mit willkürlich gewähltem Vorzeichen ε und den Abstand eines Punktes von der Geraden g durch die Formel (7) mit demselben Vorzeichen ε.

Schneidet nun die etwa durch O gelegte Normale n (Fig. 109) die Gerade im Punkte $N = x', y'$, so ist nach § 16, (2) für jeden

Punkt $P = x, y$ des von N aus gerechneten positiven Schenkels von n:

$$x = x' + as, \quad y = y' + bs, \quad 0 < s = \overline{NP} < +\infty.$$

Für einen solchen Punkt P ist aber der Abstand (7):

$$\delta = \frac{(Ax' + By' + C) + (Aa + Bb)s}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2}},$$

oder, da x', y' auf der Geraden g liegt, und mit Rücksicht auf (6):

$$\delta = (a^2 + b^2)s = s,$$

also positiv. Dasselbe gilt daher für alle Punkte auf derselben Seite von g.

Die Formeln (6) *und* (7) *gehören immer derart zusammen, daß bei willkürlicher, aber für beide gleicher Wahl des Vorzeichens* ε *die*

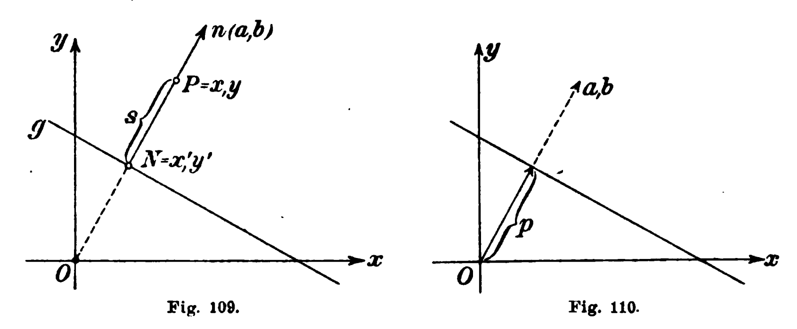


Fig. 109. Fig. 110.

Formel (7) *den Abstand eines beliebigen Punktes* x, y *von der Geraden* (1) *darstellt, positiv gerechnet auf der Seite der Geraden, nach der die Normale* (6) *läuft.*

Man kann daher die Verfügung über die positive Richtung der Geraden auch so treffen, daß sie einen *beliebig gegebenen Punkt* x_0, y_0 *zur linken Hand läßt* (vgl. § 17, **1**). Dann muß in (7):

$$\varepsilon = -\operatorname{sign}(Ax_0 + By_0 + C) \tag{8}$$

sein, damit δ für x_0, y_0 negativ werde. Durch (6) ist dann mit demselben ε die rechtsläufige Normale und durch (5) die positive Richtung der Geraden bestimmt.

Mit $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ kommt man auf die Festsetzung § 17, **1** und auf (3) zurück.

5. Die Hessesche Normalform der Gleichung der Geraden. Bezeichnet $p = \overline{ON}$ die *absolute* Länge des von O auf die Gerade gefällten Perpendikels ON, so sind p, a, b die Polarkoordinaten der Strecke ON (Fig. 110).

Da der Abstand δ des Punktes O von der Geraden g im Sinne von (7) und (3) negativ, also $\delta = -p$ ist, und sich mit $x = 0$, $y = 0$ aus (7) ergeben muß, so wird:

(9) $$-p = \frac{C}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Die Polarkoordinaten p, a, b *des von* O *auf die Gerade* (1) *gefällten Perpendikels sind also durch die Formeln* (6) *und* (9) *bestimmt, wo* ε *den Wert* (3) *hat.*

Führt man sie in die Gleichung (1) und den Ausdruck (7) ein, so wird jene (§ 16, **5**):

(10) $$ax + by - p = 0, \quad a^2 + b^2 = 1, \quad p > 0$$

und dieser:

(11) $$\delta = ax + by - p.$$

Die Gleichung (10) heißt die *Hessesche Normalform*[67]) der Gleichung der Geraden. In bezug auf diese kann man das Resultat von § 17, **3**; **4** so aussprechen:

Ist eine Gerade durch ihre Gleichung (10) *in der Hesseschen Normalform gegeben, so gibt der für einen beliebigen Punkt* x, y *der Ebene gebildete Ausdruck* (11) *den Abstand* δ *dieses Punktes von der Geraden, positiv gerechnet auf der von* O *abgewandten Seite der Geraden* (vgl. § 17, **3**) *oder auf der Seite, nach der die Normale* a, b *hinläuft* (vgl. § 17, **4**).

§ 18. Zwei Geraden und der Geradenbüschel.

1. Der Winkel zweier durch ihre Gleichungen gegebenen Geraden. Zwei Gerade p_1 und p_2 seien durch ihre Gleichungen:

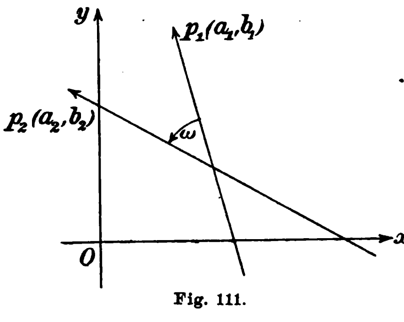


Fig. 111.

(1) $$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

gegeben und wie § 17, **1** so gerichtet, daß sie den Koordinatenanfangspunkt links lassen (Fig. 111). Ihre Richtungskosinus sind nach § 17, (5):

(2) $$\begin{cases} a_1 = \dfrac{-B_1}{\varepsilon_1\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}, & b_1 = \dfrac{A_1}{\varepsilon_1\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}, & \varepsilon_1 = -\operatorname{sign} C_1, \\ a_2 = \dfrac{-B_2}{\varepsilon_2\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, & b_2 = \dfrac{A_2}{\varepsilon_2\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, & \varepsilon_2 = -\operatorname{sign} C_2 \end{cases}$$

Der Winkel $\omega = p_1 p_2$ entspricht daher nach § 13, (3); (4) den Gleichungen:

(3) $$\cos\omega = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$

(4) $$\sin\omega = \frac{A_1 B_2 - B_1 A_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

2. Senkrechte und parallele Gerade. Die beiden Geraden (1) sind nach (3) senkrecht zueinander, wenn:

(5) $$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Sie sind nach (4) parallel, wenn:

(6) $$A_1 : B_1 = A_2 : B_2.$$

Die Gleichung:

(7) $$Ax + By + \varkappa = 0$$

stellt daher bei veränderlichem $\varkappa$ einen *Büschel paralleler Geraden*[13]) dar (Fig. 112),

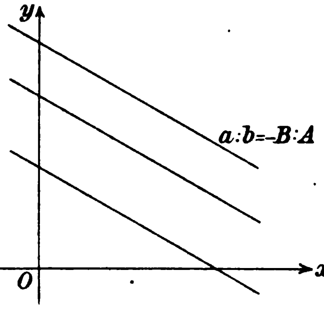


Fig. 112.

für deren gemeinsame Richtungskosinus a, b nach (2) ist (vgl. § 11, 7):

(8) $$a : b = -B : A.$$

3. Der Schnittpunkt zweier Geraden. Für die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden (1) ergibt sich durch Auflösung (Anm. 2, I, 1) der Gleichungen (1):

(9) $$x = \frac{B_1 C_2 - C_1 B_2}{A_1 B_2 - B_1 A_2}, \quad y = \frac{C_1 A_2 - A_1 C_2}{A_1 B_2 - B_1 A_2},$$

falls die beiden Geraden nicht parallel sind, also nicht die Bedingung (6) besteht.

4. Gleichung der Geraden, die den Winkel zweier Geraden in gegebenem Verhältnisse teilt. Da die Geraden p_1 und p_2 dem Punkte O ihre linken Seiten zuwenden, *liegt O stets in der äußeren Winkelfläche* (vgl. § 4, 1). Denn der inneren (in Figur 113 schraffierten) Winkelfläche wendet die eine Gerade ihre rechte, die andere ihre linke Seite zu. Diejenige ungerichtete Gerade p, die den Winkel der

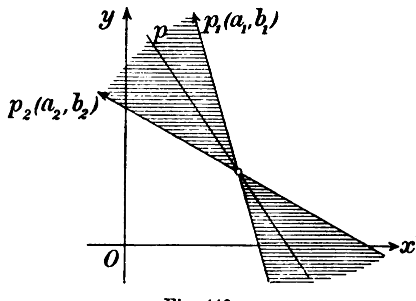


Fig 113.

gerichteten Geraden p_1, p_2 im Sinusverhältnisse λ teilt, hat nach § 13, (13) Richtungskosinus u, v, für deren Verhältnis gilt:

$$u : v = a_1 - \lambda a_2 : b_1 - \lambda b_2.$$

Nach (7) stellt die Gleichung:

$$(b_1 - \lambda b_2)x - (a_1 - \lambda a_2)y + \varkappa = 0,$$

oder wenn wir die Werte (2) benutzen und zur Abkürzung setzen:

$$(10) \qquad \begin{cases} X_1 = A_1 x + B_1 y + C_1, \\ X_2 = A_2 x + B_2 y + C_2, \end{cases}$$

die Gleichung:

$$(11) \qquad \frac{X_1 - C_1}{\varepsilon_1 \sqrt{A_1^2 + B_1^2}} - \lambda \frac{X_2 - C_2}{\varepsilon_2 \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} + \varkappa = 0$$

alle Geraden dar, die jene Richtungskosinus u, v haben. Unter diesen ist die Gerade p dadurch ausgezeichnet, daß sie durch den Schnittpunkt von p_1 und p_2 geht. Sollen dessen Koordinaten, für die $X_1 = 0$ und $X_2 = 0$, der Gleichung (11) genügen[68]), muß

$$\frac{-C_1}{\varepsilon_1 \sqrt{A_1^2 + B_1^2}} - \lambda \frac{-C_2}{\varepsilon_2 \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} + \varkappa = 0$$

sein. Mit dem hierdurch bestimmten Werte von $\varkappa$ wird aber aus (11):

$$(12) \qquad \frac{X_1}{\varepsilon_1 \sqrt{A_1^2 + B_1^2}} - \lambda \frac{X_2}{\varepsilon_2 \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0.$$

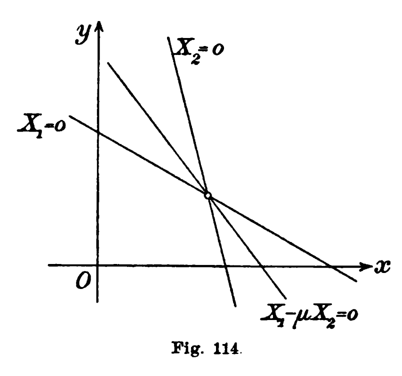


Fig. 114.

Sind daher:

$$(13) \qquad \begin{cases} X_1 = A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \\ X_2 = A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen zweier Geraden (Fig. 114), *so ist die Gleichung derjenigen Geraden, die den Winkel der beiden im Sinusverhältnisse λ teilt*[69]):

$$(14) \qquad X_1 - \mu X_2 = 0,$$

wo:

$$(15) \qquad \mu = \frac{\varepsilon_1 \sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{\varepsilon_2 \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \cdot \lambda, \quad \varepsilon_1 = -\operatorname{sign} C_1, \quad \varepsilon_2 = -\operatorname{sign} C_2$$

und die den Koordinatenanfangspunkt O enthaltende Winkelfläche als äußere gilt, in der λ positiv ist (vgl. § 4, **1**; **3**).

5. Allgemeinere Bestimmung der äußeren Winkelfläche. Ist die äußere Winkelfläche zwischen den Strahlen (13) nicht durch O, sondern *durch einen beliebigen Punkt* x_0, y_0 gegeben, der in ihr liegen soll, so hat man, bei gleicher Begründung wie in § 18, **4**, mit Rücksicht auf § 17, (8), in (15) zu setzen:

$$(16)\qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = -\operatorname{sign}(A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1), \\ \varepsilon_2 = -\operatorname{sign}(A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2). \end{cases}$$

Gehen beispielsweise mit $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ die beiden Strahlen (13) durch O hindurch, und soll die den Punkt $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, also überhaupt die die x-Achse enthaltende Winkelfläche die äußere sein, so ist nach (16): $\varepsilon_1 = -\operatorname{sign} A_1$, $\varepsilon_2 = -\operatorname{sign} A_2$. Man kommt damit auf den Satz § 9, (5′) zurück, da die Strahlen $A_1 x + B_1 y = 0$, $A_2 x + B_2 y = 0$ mit denen § 9, (3′) identisch sind, wenn die x-Achse hier mit dem dortigen Anfangsstrahl o zusammenfällt.[22])

6. Anwendung der Hesseschen Normalform. Bei Anwendung der Hesseschen Normalform der Gleichungen (13) wird nach § 17, (10) der Koeffizient von λ in (15) gleich 1, und lautet der Satz von § 18, **4**:

Sind (Fig. 115):

$$(17)\qquad \begin{cases} N_1 = a_1 x + b_1 y - p_1 = 0, \\ N_2 = a_2 x + b_2 y - p_2 = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen zweier Geraden in der Hesseschen Normalform, so ist die Gleichung derjenigen Geraden, die den Winkel jener beiden im Sinusverhältnisse λ *teilt*[67]):

$$(18)\qquad N_1 - \lambda N_2 = 0.$$

Insbesondere lauten die Gleichungen der *inneren* und *äußeren Halbierungslinie* ($\lambda = -1$ und $\lambda = +1$, vgl. § 4, **5**) bezüglich:

$$(19)\qquad N_1 + N_2 = 0, \quad N_1 - N_2 = 0.$$

7. Die Gleichung des Strahlbüschels mit multipliziertem Teilungsverhältnisse als Parameter. Da nach § 4, **3**; **4** nicht nur jedem Werte des Teilungsverhältnisses λ eine durch den Schnittpunkt S der beiden Geraden (13) gehende Gerade, sondern auch jeder solchen Geraden ein Wert λ eindeutig entspricht, so stellt die Gleichung (14) bei veränderlichem λ, bezüglich μ, alle durch den Schnittpunkt S gehende Geraden dar. Sie ist *die Gleichung des Strahlbüschels*, welcher durch die in (13) gegebenen *Grundstrahlen*, die wir nun g_1 und g_2 nennen wollen (Fig. 116), bestimmt ist.

Der Parameter μ der Büschelgleichung bedeutet nach (15) (vgl. § 6, (7')) *das multiplizierte Teilungsverhältnis* des laufenden Strahles p in bezug auf die beiden Grundstrahlen (vgl. § 9, **1**).

Durch jeden Punkt x_0, y_0 *der Ebene, ausgenommen das Zentrum* S *des Büschels, geht ein bestimmter Strahl* p_0 *des Büschels hindurch.*

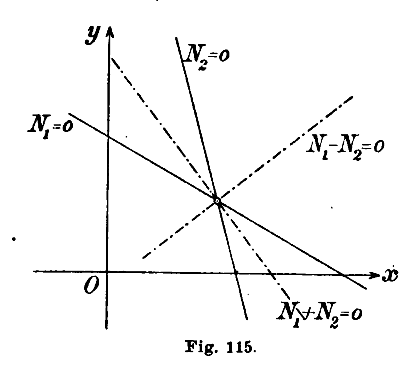


Fig. 115.

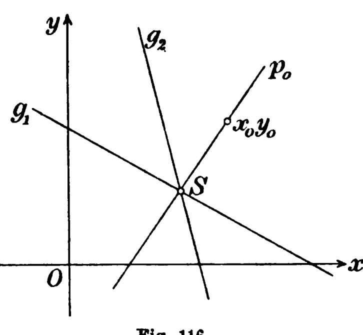


Fig. 116.

Man erhält den Parameter $\mu = \mu_0$ dieses Strahles aus der Bedingung, daß die Koordinaten x_0, y_0 der Gleichung (14) genügen, also aus:

$$X_1^0 - \mu X_2^0 = 0,$$

wo X_1^0 und X_2^0 die mit $x = x_0$, $y = y_0$ gebildeten Ausdrücke (10) sind (vgl. § 18, (16)). Es ist daher:

$$\mu_0 = \frac{X_1^0}{X_2^0}. \tag{19}$$

8. Die Gleichung des Strahlbüschels mit Doppelverhältnis als Parameter. Als *Einheitsstrahl* g_0 *des Büschels* (vgl. § 6, **6**) gilt derjenige Strahl, für den das multiplizierte Teilungsverhältnis μ den Wert 1 hat. Entspricht er dem Werte $\lambda = \lambda_0$ des Teilungsverhältnisses selbst, so ist nach (15):

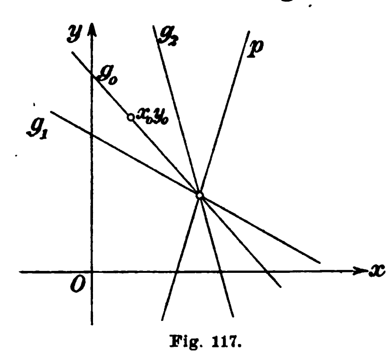


Fig. 117.

$$1 = \frac{\varepsilon_1 \sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{\varepsilon_2 \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \cdot \lambda_0,$$

und damit der Parameter μ des laufenden Strahles p gleich dem Doppelverhältnisse (vgl. § 6, **6**):

$$\mu = \frac{\lambda}{\lambda_0} = (g_1 g_2 p g_0), \tag{20}$$

wobei nun die Pfeilspitzen der Grundstrahlen und die Angabe der äußern Winkelfläche überflüssig werden.

Gibt man den Einheitsstrahl g_0 durch einen Punkt x_0, y_0, durch den er gehen soll (Fig. 117), so ist wie in (19), nur jetzt mit $\mu_0 = 1$:

$$1 = \frac{X_1{}^0}{X_2{}^0}, \tag{21}$$

wonach man die Gleichung (14) in der Form:

$$\frac{X_1}{X_1{}^0} - \mu \frac{X_2}{X_2{}^0} = 0$$

schreiben und sagen kann:

Sind $X_1 = 0$ *und* $X_2 = 0$ *in* (13) *die Gleichungen der Grundstrahlen* g_1 *und* g_2 *eines Strahlbüschels und* x_0, y_0 *die Koordinaten eines festen Punktes, durch den der Einheitsstrahl* g_0 *bestimmt wird, so ist die Gleichung des laufenden Strahles* p *des Büschels:*

$$\frac{X_1}{X_1{}^0} - \mu \frac{X_2}{X_2{}^0} = 0, \tag{22}$$

wo μ *das Doppelverhältnis:*

$$\mu = (g_1 g_2 p g_0) \tag{23}$$

bedeutet.

Die Gleichungen (14) und (22) sind gleich allgemein, aber während (14) von den Konstanten A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 abhängt im Gegensatz zu den Gleichungen (13), die nur die Verhältnisse $A_1 : B_1 : C_1$ und $A_2 : B_2 : C_2$ enthalten (vgl. § 16, **5**), so hängt die Gleichung (22), wie die Gleichungen (13), nur von diesen Verhältnissen und überdies von x_0, y_0 ab (vgl. § 9, **1**; **2**).

9. Doppelverhältnis von vier Strahlen des Büschels. Da in der Gleichung (14) des Büschels der Parameter μ nach § 18, **7** das multiplizierte Teilungsverhältnis oder, was nach § 6, **4** dasselbe ist, die *multiplizierte Verhältniskoordinate* des laufenden Strahles p mit Bezug auf die beiden Grundstrahlen g_1, g_2 als Anfangsstrahlen ist, so folgt aus § 6, **10**, I′:

Das Doppelverhältnis von vier durch ihre Gleichungen[70]*):*

$$X_1 - \mu_1 X_2 = 0, \quad X_1 - \mu_2 X_2 = 0, \quad X_1 - \mu_3 X_2 = 0, \quad X_1 - \mu_4 X_2 = 0 \tag{24}$$

gegebenen Strahlen p_1, p_2, p_3, p_4 *des Büschels* (14) *ist:*

$$\delta = (p_1 p_2 p_3 p_4) = \frac{(\mu_1 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_4)}{(\mu_2 - \mu_3)(\mu_1 - \mu_4)} \tag{25}$$

und aus § 6, **10**, III′:

Das Doppelverhältnis, das zwei durch ihre Gleichungen:

$$X_1 - \mu_1 X_2 = 0, \quad X_1 - \mu_2 X_2 = 0 \tag{26}$$

gegebene Strahlen p_1, p_2 *mit den beiden Grundstrahlen* g_1, g_2 *des Büschels bilden, ist:*

(27) $$\delta = (g_1 g_2 p_1 p_2) = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Für $\mu_2 = -\mu_1$ sind die Strahlen (26) zu den Grundstrahlen *harmonisch* (§ 6, **11**).

Die gleichen Sätze gelten auch für die Form (22) der Gleichung des Büschels.

III. Kapitel:

Die Koordinaten der geraden Linie.

§ 19. Die Koordinaten der geraden Linie und die Gleichung des Punktes.

1. Die Koordinaten der geraden Linie.[71]) Die durch die allgemeine Gleichung:

(1) $$Ax + By + C = 0$$

gegebene Gerade schneidet nach § 16, **6** auf den Koordinatenachsen die Strecken (Fig. 118):

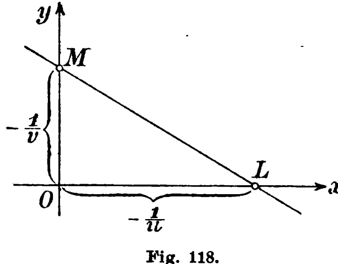


Fig. 118.

(2) $$OL = -\frac{C}{A}, \quad OM = -\frac{C}{B}$$

ab. *Die negativen reziproken Werte der Längen dieser Strecken heißen die Koordinaten der Geraden* und werden als solche mit u, v bezeichnet, so daß:

(3) $$u = \frac{A}{C}, \quad v = \frac{B}{C}.$$

Sind umgekehrt die Koordinaten u, v gegeben, so ist nach (3):

$$A : B : C = u : v : 1$$

und daher die Gleichung der Geraden (§ 16, **5**):

(4) $$ux + vy + 1 = 0.$$

Die Beziehung zwischen einer Geraden und ihren Koordinaten ist daher wechselseitig eindeutig.

2. Die Gleichung des Punktes in laufenden Linienkoordinaten. Sind A, B, C beliebige Konstanten (die nichts mit den in (1) vor-

kommenden Konstanten zu tun haben) und u, v die Koordinaten einer veränderlichen Geraden, so kann man sich die Gleichung:

$$Au + Bv + C = 0 \tag{5}$$

dadurch entstanden denken, daß man in die Gleichung (4) der Geraden u, v die Werte:

$$x = \frac{A}{C}, \quad y = \frac{B}{C} \tag{6}$$

eingesetzt hat. Die Gleichung (5) ist daher die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Punkt (6) auf der Geraden u, v liegt oder, was dasselbe ist, daß die veränderliche Gerade u, v (Fig. 119) durch den festen Punkt (6) geht.

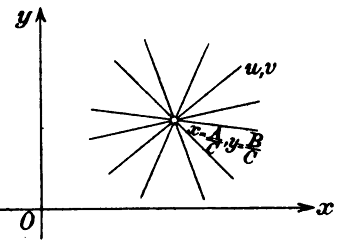


Fig. 119.

Eine veränderliche Gerade geht also dann und nur dann durch den festen Punkt (6), *wenn ihre Koordinaten* u, v *der Gleichung* (5) *genügen.*

Man nennt daher (5) *die Gleichung des Punktes* (6) *in laufenden Linienkoordinaten* u, v.

3. Dualität zwischen den Koordinaten, beziehungsweise den Gleichungen von Linie und Punkt. Wir können die vorstehenden Erklärungen in folgender Weise gegenüberstellen:

Ist:	*Ist:*
(7) $Ax + By + C = 0$	(7′) $Au + Bv + C = 0$
die Gleichung einer Geraden in laufenden Punktkoordinaten x, y, *so sind:*	*die Gleichung eines Punktes in laufenden Linienkoordinaten* u, v, *so sind:*
(8) $u_0 = \frac{A}{C}, \quad v_0 = \frac{B}{C}$	(8′) $x_0 = \frac{A}{C}, \quad y_0 = \frac{B}{C}$
die Koordinaten der Geraden.	*die Koordinaten des Punktes.*
Sind u_0, v_0 *die Koordinaten einer Geraden, so ist:*	*Sind* x_0, y_0 *die Koordinaten eines Punktes, so ist:*
(9) $u_0 x + v_0 y + 1 = 0$	(9′) $x_0 u + y_0 v + 1 = 0$
die Gleichung der Geraden in laufenden Punktkoordinaten x, y.	*die Gleichung des Punktes in laufenden Linienkoordinaten* u, v.

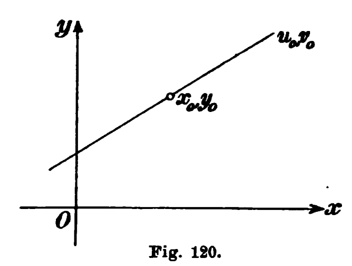


Fig. 120.

4. Bedingung der vereinigten Lage von Punkt und Geraden. Die Gerade u_0, v_0 und der Punkt x_0, y_0 *liegen* (Fig. 120) *vereinigt,* d. h. die Gerade geht durch den Punkt und der Punkt liegt auf der Geraden, immer dann und nur dann, wenn:

(10) $$u_0 x_0 + v_0 y_0 + 1 = 0.$$

5. Spezielle Lagen der Geraden und des Punktes gegen das Koordinatensystem.

Die Gerade:

$$Ax + By = 0$$

geht nach § 16, (15) durch den Anfangspunkt O.

Der Punkt:

$$Au + Bv = 0$$

liegt (nach (8′) mit $C = 0$) unendlich fern (vgl. § 22, (10)).

Die Geraden:

$$Ax + C = 0, \quad By + C = 0$$

sind nach § 16, (16) der y-Achse, bezüglich der x-Achse parallel.

Die Punkte:

$$Au + C = 0, \quad Bv + C = 0$$

liegen (nach (8′)) auf der x-Achse, bezüglich y-Achse.

6. Gerade durch zwei Punkte, Punkt auf zwei Geraden. Die Gleichung eines Punktes hat nach § 19, 2 immer die Form:

(11) $$Au + Bv + C = 0.$$

Sie hängt, wie die Gleichung der Geraden § 16, 5, von *zwei Konstantenverhältnissen* $A : B : C$ ab, die bestimmt sind durch zwei Gerade u_1, v_1 und u_2, v_2, welche durch den Punkt gehen. Denn da deren Koordinaten der Gleichung (11) genügen müssen, so ist:

(12) $$\begin{cases} Au_1 + Bv_1 + C = 0, \\ Au_2 + Bv_2 + C = 0. \end{cases}$$

Eliminiert man nun aus (11) und (12) die Konstantenverhältnisse, so erhält man die Gleichung des Punktes, der in den zwei Geraden liegt, und damit den folgenden rechts stehenden Satz, zu dem der duale, links stehende schon § 16, 3 abgeleitet wurde (Anm. 2, II, 3).

Die Gleichung der Verbindungslinie der beiden Punkte x_1, y_1 und x_2, y_2 ist in laufenden Koordinaten x, y:

(13) $$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung des Schnittpunktes der beiden Geraden u_1, v_1 und u_2, v_2 ist in laufenden Koordinaten u, v:

(13′) $$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Es ist zugleich die Bedingung dafür, daß die drei Punkte x, y; x_1, y_1; x_2, y_2 in einer Geraden liegen.

Es ist zugleich die Bedingung dafür, daß die drei Geraden u, v; u_1, v_1; u_2, v_2 durch einen Punkt gehen.

7. Abstand einer Geraden von einem Punkte. Ist (11) die Gleichung eines Punktes, und sind u_0, v_0 die Koordinaten einer Geraden, so hat der Punkt die Koordinaten:

$$x = \frac{A}{C}, \quad y = \frac{B}{C}$$

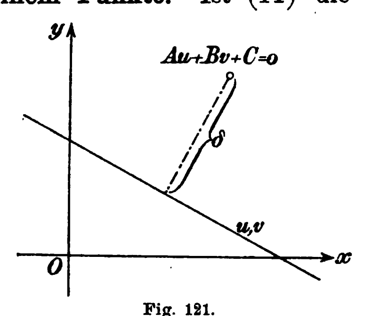


Fig. 121.

und die Gerade die Gleichung:

$$u_0 x + v_0 y + 1 = 0.$$

Nach § 17, (7) ist der senkrechte Abstand des Punktes von der Geraden:

$$\delta = \frac{u_0 \frac{A}{C} + v_0 \frac{B}{C} + 1}{-\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}$$

oder mit Unterdrückung des Index 0 (Fig. 121):

Der senkrechte Abstand der durch ihre Koordinaten u, v gegebenen und gerichteten Geraden (§ 17, 1) *von dem durch seine Gleichung:*

$$Au + Bv + C = 0 \tag{14}$$

gegebenen Punkte ist[72]):

$$\delta = \frac{Au + Bv + C}{-C\sqrt{u^2 + v^2}}. \tag{15}$$

8. Die Hessesche Normalform der Gleichung des Punktes. Bringt man die Gleichung (5) des Punktes durch Division mit C auf die Form[73]):

$$au + bv + 1 = 0, \tag{16}$$

so erhält man die *Hessesche Normalform der Gleichung des Punktes,* die dadurch charakterisiert ist, daß das konstante Glied den Wert 1 hat.

Der senkrechte Abstand der durch ihre Koordinaten u, v gegebenen Geraden von dem durch seine Gleichung (16) *gegebenen Punkte ist nach* § 19, 7:

$$\delta = \frac{au + bv + 1}{-\sqrt{u^2 + v^2}}. \tag{17}$$

§ 20. Zwei Punkte und die Gleichung der Punktreihe.

1. Gleichung des Punktes, der die Strecke zweier Punkte in bestimmtem Verhältnisse teilt. Zwei Punkte P_1 und P_2 seien durch ihre Gleichungen $U_1 = 0$ und $U_2 = 0$ gegeben, wo die Abkürzungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} U_1 = A_1 u + B_1 v + C_1, \\ U_2 = A_2 u + B_2 v + C_2 \end{cases}$$

in derselben Weise wie § 18, (10) gebraucht sind. Die Koordinaten der Punkte sind dann:

$$x_1 = \frac{A_1}{C_1}, \quad y_1 = \frac{B_1}{C_1}; \qquad x_2 = \frac{A_2}{C_2}, \quad y_2 = \frac{B_2}{C_2}.$$

Die Koordinaten des Punktes P, der die Strecke $P_1 P_2$ im Verhältnisse λ teilt, sind nach § 12, (18):

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} = \frac{\frac{A_1}{C_1} - \lambda \frac{A_2}{C_2}}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} = \frac{\frac{B_1}{C_1} - \lambda \frac{B_2}{C_2}}{1 - \lambda}.$$

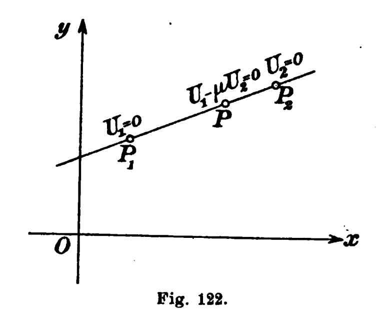


Fig. 122.

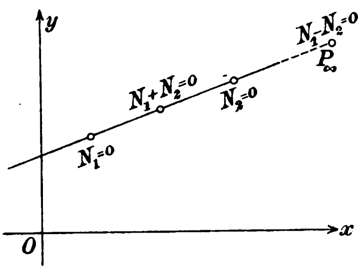


Fig. 123.

Die Gleichung dieses Punktes P ist daher nach § 19, (9′), mit $1 - \lambda$ multipliziert:

$$\left(\frac{A_1}{C_1} - \lambda \frac{A_2}{C_2}\right) u + \left(\frac{B_1}{C_1} - \lambda \frac{B_2}{C_2}\right) v + (1 - \lambda) = 0$$

oder nach (1):

$$\frac{U_1}{C_1} - \lambda \frac{U_2}{C_2} = 0.$$

Sind (Fig. 122):

$$(2)\qquad \begin{cases} U_1 = A_1 u + B_1 v + C_1 = 0, \\ U_2 = A_2 u + B_2 v + C_2 = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen zweier Punkte, so ist die Gleichung desjenigen Punktes, der die Strecke jener im Verhältnisse λ teilt[74]*):*

$$(3)\qquad U_1 - \mu U_2 = 0,$$

wo:

$$(4)\qquad \mu = \frac{C_1}{C_2} \lambda.$$

2. Anwendung der Hesseschen Normalform. Mit $C_1 = 1$, $C_2 = 1$ (vgl. § 19, (16)) nimmt der Satz § 20, **1** die Form an (Fig. 123):

Sind (vgl. § 18, **6**):

$$(5)\qquad \begin{cases} N_1 = a_1 u + b_1 v + 1 = 0, \\ N_2 = a_2 u + b_2 v + 1 = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen zweier Punkte in der Hesseschen Normalform, so ist die Gleichung desjenigen Punktes, der die Strecke jener im Verhältnisse λ teilt:

(6) $$N_1 - \lambda N_2 = 0.$$

Insbesondere lauten die Gleichungen des *Mittelpunktes* und des *unendlich fernen Punktes* der Strecke ($\lambda = -1$ und $\lambda = +1$ nach § 3, **3**; **4**) bezüglich[78]):

(7) $$N_1 + N_2 = 0, \quad N_1 - N_2 = 0$$

(vgl. § 22, (10)).

3. Die Gleichung der Punktreihe mit multipliziertem Teilungsverhältnisse als Parameter. Die Gleichung (3) stellt (vgl. § 18, 7) bei veränderlichem λ, bezüglich μ, alle auf der Verbindungslinie g der Punkte (2) liegenden Punkte dar. Sie ist die *Gleichung der Punktreihe,* welche durch die in (2) gegebenen Grundpunkte, die wir nun G_1 und G_2 nennen wollen (Fig. 124), bestimmt ist.

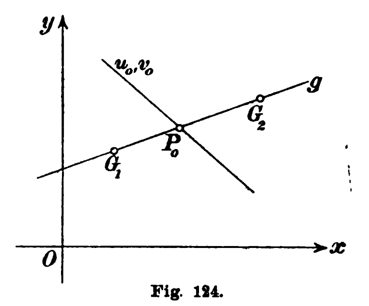


Fig. 124.

Der *Parameter* μ der Gleichung der Punktreihe bedeutet (vgl. § 6, (7)) *das multiplizierte Teilungsverhältnis* des laufenden Punktes P der Reihe in bezug auf die beiden Grundpunkte (vgl. § 9, **1**).

Auf jeder Geraden u_0, v_0 der Ebene, ausgenommen die Verbindungslinie g der Grundpunkte, liegt ein bestimmter Punkt P_0 der Reihe.

Sein Parameter hat (vgl. § 18, (19)) den Wert:

(8) $$\mu_0 = \frac{U_1^0}{U_2^0},$$

wo U_1^0 und U_2^0 die mit $u = u_0$, $v = v_0$ gebildeten Ausdrücke (1) sind.

4. Die Gleichung der Punktreihe mit Doppelverhältnis als Parameter. Ist $\lambda = \lambda_0$ der Wert des Teilungsverhältnisses λ für denjenigen Punkt G_0, für den das multiplizierte Teilungsverhältnis μ den Wert 1 hat, so wird wie in § 19, **8**:

(9) $$\mu = \frac{\lambda}{\lambda_0} = (G_1 G_2 P G_0).$$

Auch folgt in derselben Weise wie dort:

Sind $U_1 = 0$ und $U_2 = 0$ in (2) die Gleichungen der Grundpunkte G_1 und G_2 einer Punktreihe und u_0, v_0 die Koordinaten einer

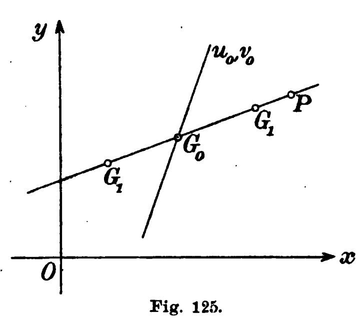


Fig. 125.

festen Geraden (Fig. 125), *durch die der Einheitspunkt* G_0 *bestimmt wird, so ist die Gleichung des laufenden Punktes* P *der Reihe:*

(10) $$\frac{U_1}{U_1^0} - \mu \frac{U_2}{U_2^0} = 0,$$

wo μ *das Doppelverhältnis:*

(11) $$\mu = (G_1 G_2 P G_0)$$

bedeutet.

5. Doppelverhältnis von vier Punkten der Reihe. Da in der Gleichung (3) der Parameter μ das multiplizierte Teilungsverhältnis oder, was nach § 6, 4 dasselbe ist, die *multiplizierte Verhältniskoordinate* des laufenden Punktes P in bezug auf die beiden Grundpunkte G_1, G_2 als Anfangspunkte bedeutet, so folgt aus § 6, **10**, I:

Das Doppelverhältnis von vier durch ihre Gleichungen:

(12) $$U_1 - \mu_1 U_2 = 0, \quad U_1 - \mu_2 U_2 = 0, \quad U_1 - \mu_3 U_2 = 0, \quad U_1 - \mu_4 U_2 = 0$$

gegebenen Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 *der Reihe* (3) *ist:*

(13) $$\delta = (P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{(\mu_1 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_4)}{(\mu_2 - \mu_3)(\mu_1 - \mu_4)}.$$

Das Doppelverhältnis, das zwei durch ihre Gleichungen:

(14) $$U_1 - \mu_1 U_2 = 0, \quad U_1 - \mu_2 U_2 = 0$$

gegebene Punkte P_1, P_2 *mit den beiden Grundpunkten* G_1, G_2 *der Reihe bilden, ist:*

(15) $$\delta = (G_1 G_2 P_1 P_2) = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Für $\mu_2 = -\mu_1$ sind die Punkte (14) zu den Grundpunkten *harmonisch.*

Die gleichen Sätze gelten auch für die Form (10) der Gleichung der Punktreihe.

6. Parameterdarstellung der Koordinaten der Punkte einer Reihe und der Strahlen eines Büschels. Sind zwei Gerade durch ihre Koordinaten u_1, v_1 und u_2, v_2 gegeben, so sind ihre Gleichungen nach § 19, (9):

$$u_1 x + v_1 y + 1 = 0, \quad u_2 x + v_2 y + 1 = 0$$

und daher nach § 18, (14) die Gleichung der Geraden, die den Winkel jener beiden im Sinusverhältnisse λ teilt:

$$(u_1 - \varkappa\lambda u_2)x + (v_1 - \varkappa\lambda v_2)y + (1 - \varkappa\lambda) = 0$$

$$\varkappa = \frac{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2}}. \tag{16}$$

Die Koordinaten dieser Geraden sind daher nach § 19, (8):

$$u = \frac{u_1 - \varkappa\lambda u_2}{1 - \varkappa\lambda}, \quad v = \frac{v_1 - \varkappa\lambda v_2}{1 - \varkappa\lambda}.$$

Neben den Satz § 12, 9, den wir links wiederholen, tritt daher der rechts folgende duale Satz[75]):

Die Koordinaten x, y des Punktes, der die Strecke der Punkte x_1, y_1 und x_2, y_2 im Verhältnisse λ teilt, sind:

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}. \tag{17}$$

Die Koordinaten u, v der Geraden, die den Winkel der Geraden u_1, v_1 und u_2, v_2 im Sinusverhältnisse λ teilt, sind mit dem Werte (16) *von $\varkappa$:*

$$u = \frac{u_1 - \varkappa\lambda u_2}{1 - \varkappa\lambda}, \quad v = \frac{v_1 - \varkappa\lambda v_2}{1 - \varkappa\lambda}. \tag{17'}$$

§ 21. Die Transformation der Linienkoordinaten.

1. Übergang von einem rechtwinkligen Koordinatensystem zu einem andern. Die § 14, (15) und (18) angegebenen Formeln für die Transformation des rechtwinkligen Koordinatensystems lauten, wenn das neue System mit $O'x'y'$ statt $\Omega\xi\eta$ bezeichnet wird (Fig. 126):

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 x' + a_2 y', \\ y = y_0 + b_1 x' + b_2 y', \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x' = x_0' + a_1 x + b_1 y, \\ y' = y_0' + a_2 x + b_2 y, \end{cases} \tag{2}$$

Fig. 126.

wobei (§ 14, (17)):

$$\begin{cases} x_0' = -a_1 x_0 - b_1 y_0, \\ y_0' = -a_2 x_0 - b_2 y_0. \end{cases} \tag{3}$$

2. Darstellung der neuen Linienkoordinaten durch die alten[76]). Hat in bezug auf das alte System Oxy eine gerade Linie g die *Koordinaten* u, v, so ist nach § 19, (9) ihre *Gleichung:*

$$ux + vy + 1 = 0. \tag{4}$$

Führt man in diese Gleichung mittels der Substitution (1) die neuen laufenden Punktkoordinaten x', y' ein, so nimmt sie die Form an:

$$(a_1 u + b_1 v)x' + (a_2 u + b_2 v)y' + (x_0 u + y_0 v + 1) = 0. \tag{5}$$

Hat man in (5) die *Gleichung* der Geraden im neuen System hergestellt, so ergeben sich nach § 19, (7) und (8) die neuen *Koordinaten* (Fig. 126):

$$(6) \qquad u' = \frac{a_1 u + b_1 v}{x_0 u + y_0 v + 1}, \quad v' = \frac{a_2 u + b_2 v}{x_0 u + y_0 v + 1}.$$

3. Darstellung der alten Linienkoordinaten durch die neuen. Hat in bezug auf das neue System $O'x'y'$ eine gerade Linie g die Koordinaten u', v', so ist nach § 19, (9) ihre Gleichung:

$$(7) \qquad u'x' + v'y' + 1 = 0.$$

Durch die Substitution (2) wird diese:

$$(8) \qquad (a_1 u' + a_2 v')x + (b_1 u' + b_2 v')y + (x_0' u' + y_0' v' + 1) = 0.$$

woraus nach § 19, (7) und (8) für die alten Koordinaten der Linie (Fig. 126) folgt:

$$(9) \qquad u = \frac{a_1 u' + a_2 v'}{x_0' u' + y_0' v' + 1}, \quad v = \frac{b_1 u' + b_2 v'}{x_0' u' + y_0' v' + 1}$$

oder nach (3):

$$(10) \qquad \begin{cases} u = \dfrac{a_1 u' + a_2 v'}{-(a_1 x_0 + b_1 y_0)u' - (a_2 x_0 + b_2 y_0)v' + 1} \\ v = \dfrac{b_1 u' + b_2 v'}{-(a_1 x_0 + b_1 y_0)u' - (a_2 x_0 + b_2 y_0)v' + 1}. \end{cases}$$

IV. Kapitel:

Die homogenen gemeinen Koordinaten.

§ 22. Die homogenen gemeinen Koordinaten des Punktes und der Geraden.

1. Begriff der homogenen gemeinen Koordinaten. Unter den homogenen gemeinen Koordinaten[77]) des Punktes oder der Geraden verstehen wir (vgl. § 7, 1) drei Zahlen x', y', t' oder u', v', s', deren Verhältnisse die gemeinen Koordinaten x, y oder u, v des Punktes (vgl. § 10, 2) oder der Geraden (vgl. § 19, 1) sind, derart daß:

$$(1) \qquad \frac{x'}{t'} = x, \quad \frac{y'}{t'} = y. \qquad\qquad (1') \qquad \frac{u'}{s'} = u, \quad \frac{v'}{s'} = v.$$

Die homogenen Koordinaten bestimmen den Punkt oder die Gerade eindeutig, sind aber durch diese *nur ihren Verhältnissen nach* bestimmt.

Sie sollen stets *endliche* Werte haben und dürfen, damit ihre Verhältnisse bestimmt bleiben, *niemals alle drei gleichzeitig verschwinden.*

Wir lassen fernerhin die in (1) und (1') zur Unterscheidung eingeführten Akzente weg. Um dann von den gemeinen zu den homogenen gemeinen Koordinaten überzugehen, haben wir nur x, y; u, v durch $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}; \frac{u}{s}, \frac{v}{s}$ zu ersetzen, während wir umgekehrt mit $t = 1$, $s = 1$ von diesen zu jenen zurückkehren.

2. Die Gleichungen der Geraden und des Punktes in homogenen Koordinaten. Die allgemeine Gleichung der Geraden oder des Punktes (§ 16, (6), § 19, (5)) wird mit Einführung der homogenen Koordinaten unter nachfolgender Multiplikation mit t oder s:

$$Ax + By + Ct = 0. \qquad | \qquad Au + Bv + Cs = 0.$$

3. Die homogenen Koordinaten als Koeffizienten der Gleichungen der Geraden und des Punktes. Die homogenen Koordinaten der Geraden und des Punktes sind unmittelbar auch die Koeffizienten der Gleichungen der Geraden und des Punktes. Denn die Sätze § 19, **3** lauten gegenwärtig:

Ist:	*Ist:*
(2) $Ax + By + Ct = 0$	(2') $Au + Bv + Cs = 0$
die Gleichung einer Geraden in laufenden Punktkoordinaten x, y, t, *so sind:*	*die Gleichung eines Punktes in laufenden Linienkoordinaten* u, v, s, *so sind:*
(3) $u_0 = A, \quad v_0 = B, \quad s_0 = C$	(3') $x_0 = A, \quad y_0 = B, \quad t_0 = C$
die Koordinaten der Geraden.	*die Koordinaten des Punktes.*
Sind u_0, v_0, s_0 *die Koordinaten einer Geraden, so ist:*	*Sind* x_0, y_0, t_0 *die Koordinaten eines Punktes, so ist:*
(4) $u_0 x + v_0 y + s_0 t = 0$	(4') $x_0 u + y_0 v + t_0 s = 0$
ihre Gleichung.	*seine Gleichung.*

Die Angaben (3) und (3') sind dabei nur bis auf einen gemeinsamen Faktor gemeint (vgl. § 16, (11)).

4. Bedingung der vereinigten Lage von Punkt und Geraden in homogenen Koordinaten. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die *vereinigte Lage* des Punktes x, y, t und der Geraden u, v, s (§ 19, **4**) lautet jetzt:

$$ux + vy + st = 0. \tag{5}$$

5. Die unendlich ferne Gerade und der Koordinatenanfangspunkt. Die homogenen Koordinaten ermöglichen eine Anpassung der analytischen Formeln an die Vorstellung, daß alle unendlich

fernen Punkte der Ebene eine Gerade, *die unendlich ferne Gerade* g_∞, bilden[17]).

Diese Vorstellung gründet sich auf die perspektive Beziehung der Geraden der Ebene auf ein Ebenenbündel im Raume (vgl. § 53, 5).

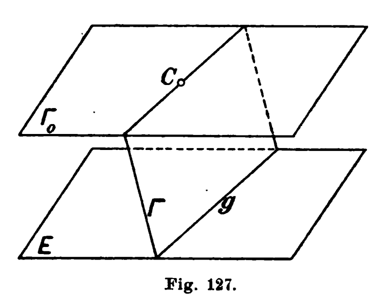


Fig. 127.

Jeder der ∞^2 Ebenen Γ, die durch einen Punkt C des Raumes gehen, entspricht (Fig. 127) eine Gerade g einer festen nicht durch C gehenden Ebene E, nämlich die Schnittlinie der Ebenen Γ und E. Nur einer einzigen durch C gehenden Ebene Γ_0, der zu E parallelen, würde keine solche Gerade entsprechen. Da aber g um so weiter in die Ferne rückt, je mehr sich Γ der Lage Γ_0 nähert, so nimmt man eine unendlich ferne Gerade g_∞ der Ebene E als die der Ebene Γ_0 entsprechende Gerade an.

Hat nun die dritte der homogenen Koordinaten x, y, t eines Punktes P den Wert 0, so wird, da x, y, t nicht alle drei Null sein dürfen, wenigstens eine der gemeinen Koordinaten $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}$ von P unendlich, und damit auch P selbst unendlich fern (vgl. § 10, 4). Ist umgekehrt P unendlich fern, und damit wenigstens eine seiner gemeinen Koordinaten unendlich, so muß, da x, y, t immer endlich bleiben sollen, $t = 0$ sein. Daher ist:

$$t = 0$$

die notwendige und hinreichende Bedingung aller unendlich fernen Punkte. Diese ist aber nach (2) die Gleichung einer Geraden, deren Koordinaten $u_0 = 0$, $v_0 = 0$ sind. Wir sagen daher:

Die unendlich ferne Gerade g_∞ *hat die Gleichung:*

$$t = 0 \tag{6}$$

und die Koordinaten:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad s \neq 0\,(s = 1). \tag{7}$$

Das duale Seitenstück bildet *der Koordinatenanfangspunkt*, der die gemeinen Koordinaten 0, 0, also *die homogenen Koordinaten:*

$$x = 0, \quad y = 0, \quad t \neq 0\,(t = 1) \tag{8}$$

hat und daher nach (4′) *die Gleichung:*

$$s = 0. \tag{9}$$

Die *Gleichung eines unendlich fernen Punktes* ($t_0 = 0$) hat nach (4′) die Form (vgl. § 19, 5):

$$Au + Bv = 0.\text{[78])} \tag{10}$$

6. Schnittpunkt einer Geraden mit der unendlich fernen Geraden. Eine beliebige Gerade, deren Gleichung:

$$(11) \qquad Ax + By + Ct = 0$$

ist, schneidet die unendlich ferne Gerade (6) in einem Punkte, welcher den beiden Gleichungen:

$$(12) \qquad Ax + By = 0, \quad t = 0$$

oder auch:

$$(13) \qquad x : y = -B : A, \quad t = 0$$

entspricht und der unendlich ferne Punkt der Geraden ist (§ 3, 4). Nach § 16, (17) folgt hieraus (Fig. 128):

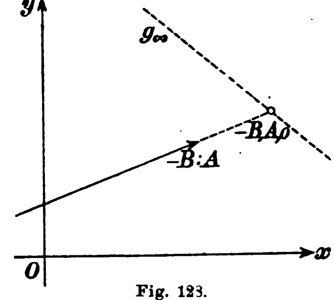


Fig. 128.

Die beiden ersten homogenen Koordinaten des Schnittpunktes einer Geraden mit der unendlich fernen Geraden verhalten sich wie die Richtungskosinus der ersteren.

Da der Punkt (13) überhaupt nur vom Verhältnis $A : B$, nicht von C abhängt, folgt nach § 18, (6):

Parallele Geraden schneiden die unendlich ferne Gerade in demselben Punkte.

7. Verbindungslinie zweier Punkte und Schnittpunkt zweier Geraden. Die Sätze § 19, **6** lauten bei Anwendung homogener Koordinaten:

Die Gleichung der Verbindungslinie der Punkte x_1, y_1, t_1 und x_2, y_2, t_2 ist:

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} x & y & t \\ x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \end{vmatrix} = 0;$$

ihre Koordinaten also nach § 22, **3**:

$$(15) \qquad \begin{cases} u = \begin{vmatrix} y_1 & t_1 \\ y_2 & t_2 \end{vmatrix}, \quad v = \begin{vmatrix} t_1 & x_1 \\ t_2 & x_2 \end{vmatrix}, \\ s = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \end{cases}$$

(Anm. 1, II, (6)).

Die Gleichung des Schnittpunktes der Geraden u_1, v_1, s_1 und u_2, v_2, s_2 ist:

$$(14') \qquad \begin{vmatrix} u & v & s \\ u_1 & v_1 & s_1 \\ u_2 & v_2 & s_2 \end{vmatrix} = 0;$$

seine Koordinaten also nach § 22, **3**:

$$(15') \qquad \begin{cases} x = \begin{vmatrix} v_1 & s_1 \\ v_2 & s_2 \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} s_1 & u_1 \\ s_2 & u_2 \end{vmatrix}, \\ t = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}, \end{cases}$$

(vgl. § 18, (9)).

8. Spezialfälle dieser Sätze. Ist in (14) der eine der beiden Punkte unendlich fern, also etwa $x_2 = a$, $y_2 = b$, $t_2 = 0$, wo nach

§ 22, **6** a, b sich wie die Richtungskosinus der durch diesen Punkt gehenden Geraden verhalten, so wird die Gleichung (14):

$$a(t_1 y - t y_1) - b(t_1 x - t x_1) = 0$$

oder mit $x_0, y_0, 1$ für x_1, y_1, t_1 und $t = 1$ (vgl. § 22, **1**)[79]):

$$b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden, die durch den Punkt x_0, y_0 in der Richtung a, b hindurchgeht (vgl. § 16, (4)).

Sind in (14') mit $u_1 : v_1 = u_2 : v_2$ die beiden Geraden u_1, v_1, s_1 und u_2, v_2, s_2 parallel (vgl. § 18, (6)), so verschwindet der Koeffizient von s und die Gleichung erhält die Form (10).

9. Das Koordinatendreieck der homogenen Koordinaten. Denken wir uns das rechtwinklige Koordinatensystem Oxy durch Hinzunahme der unendlich fernen Geraden g_∞ zu einem „*Koordinatendreieck*" (in Fig. 129 die punktierten Teile unbegrenzt weit zu denken) ergänzt, so haben die Seiten des Dreiecks die Gleichungen (§ 10, **5**; § 22, (6)):

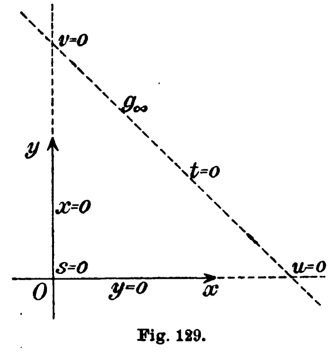


Fig. 129.

$$(16) \quad \begin{cases} x = 0 \ (y\text{-Achse}), \quad y = 0 \ (x\text{-Achse}), \\ t = 0 \ (g_\infty) \end{cases}$$

und daher die Koordinaten (bis auf einen gemeinsamen Faktor):

$$(17) \quad u, v, s = 1, 0, 0; \quad 0, 1, 0; \quad 0, 0, 1,$$

und haben die bezüglich gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks die Koordinaten:

$$(18) \qquad x, y, t = 1, 0, 0; \quad 0, 1, 0; \quad 0, 0, 1$$

und daher die Gleichungen (vgl. (10) und (9)):

$$(19) \quad \begin{cases} u = 0 \ (\text{unendlich ferner Punkt der } x\text{-Achse}), \\ v = 0 \ (\quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \ y\text{-} \ „ \ ), \qquad s = 0 \ (O). \end{cases}$$

10. Gleichungen des Strahlbüschels und der Punktreihe in homogenen Koordinaten. Wenn man in der Gleichung § 18, (22), die nur von den Verhältnissen $A_1 : B_1 : C_1$ und $A_2 : B_2 : C_2$ abhängt, die Bezeichnung der letzteren in u_1, v_1, s_1 und u_2, v_2, s_2 abändert und die Gleichung gleichzeitig in x, y, t und x_0, y_0, t_0 homogen schreibt, so nimmt der Satz § 18, **8** und ebenso der duale § 20, **4** die Form an:

Sind:	*Sind:*
$(20) \begin{cases} X_1 = u_1 x + v_1 y + s_1 t = 0, \\ X_2 = u_2 x + v_2 y + s_2 t = 0 \end{cases}$	$(20') \begin{cases} U_1 = x_1 u + y_1 v + t_1 s = 0, \\ U_2 = x_2 u + y_2 v + t_2 s = 0 \end{cases}$

die Gleichungen der beiden Grundstrahlen g_1, g_2 *eines Strahlbüschels, so ist die Gleichung des laufenden Strahles* p *des Büschels:*

$$(21) \qquad \frac{X_1}{X_1^0} - \mu \frac{X_2}{X_2^0} = 0;$$

dabei ist x_0, y_0, t_0 *ein zur Bestimmung des Einheitsstrahles* g_0 *gegebener Punkt, sind* X_1^0, X_2^0 *die für ihn gebildeten Ausdrücke* X_1, X_2 *und bedeutet* μ *das Doppelverhältnis:*

$$(22) \qquad \mu = (g_1 g_2 p g_0).$$

die Gleichungen der beiden Grundpunkte G_1, G_2 *einer Punktreihe, so ist die Gleichung des laufenden Punktes* P *der Reihe:*

$$(21') \qquad \frac{U_1}{U_1^0} - \mu \frac{U_2}{U_2^0} = 0;$$

dabei ist u_0, v_0, s_0 *ein zur Bestimmung des Einheitspunktes* G_0 *gegebener Strahl, sind* U_1^0, U_2^0 *die für ihn gebildeten Ausdrücke* U_1, U_2 *und bedeutet* μ *das Doppelverhältnis:*

$$(22') \qquad \mu = (G_1 G_2 P G_0).$$

Die Gleichung (21) enthält nur die *Verhältnisse* je der Koordinaten u_1, v_1, s_1; u_2, v_2, s_2; x_0, y_0, t_0 und x, y, t.

Kommt es nicht auf die genaue Feststellung der Bedeutung von μ an, kann man die Gleichungen (21) und (21′) auch in der kürzeren Form schreiben (vgl. § 18, (14) und § 20, (3)):

$$(23) \qquad X_1 - \mu X_2 = 0. \qquad\qquad (23') \qquad U_1 - \mu U_2 = 0.$$

Hier ist dann μ im allgemeinen als das *multiplizierte Teilungsverhältnis*, nach dem g den Winkel von g_1, g_2, oder der Punkt P die Strecke $P_1 P_2$ teilt, zu erklären; es bleibt aber naturgemäß um einen Faktor unbestimmt, da mit den Grundstrahlen g_1, g_2 nur die *Verhältnisse* $u_1 : v_1 : s_1$ und $u_2 : v_2 : s_2$ gegeben sind, während die Gleichung (23) *nicht* ausschließlich von diesen Verhältnissen abhängt.

11. Parameterdarstellung im Strahlbüschel und auf der Punktreihe. Im Anschluß an (23) und (23′) kann man die Sätze von § 22, **10** auch so aussprechen:

Sind u_1, v_1, s_1 *und* u_2, v_2, s_2 *die Koordinaten der beiden Grundstrahlen eines Strahlbüschels, so sind die Koordinaten des laufenden Strahles des Büschels mit einem Proportionalitätsfaktor* ϱ *in der Form darstellbar:*

$$(24) \qquad \begin{cases} \varrho u = u_1 - \mu u_2, \\ \varrho v = v_1 - \mu v_2, \\ \varrho s = s_1 - \mu s_2. \end{cases}$$

Sind x_1, y_1, t_1 *und* x_2, y_2, t_2 *die Koordinaten der beiden Grundpunkte einer Punktreihe, so sind die Koordinaten des laufenden Punktes der Reihe mit einem Proportionalitätsfaktor* ϱ *in der Form darstellbar*[80]*):*

$$(24') \qquad \begin{cases} \varrho x = x_1 - \mu x_2, \\ \varrho y = y_1 - \mu y_2, \\ \varrho t = t_1 - \mu t_2. \end{cases}$$

Es sind die auf homogene Koordinaten bezogenen Parameterdarstellungen § 20, **6**.

12. Büschel paralleler Geraden und unendlich ferne Punktreihe. Ein Spezialfall der Gleichung $X_1 - \mu X_2 = 0$ des Strahlbüschels in (23) wird die Gleichung:

$$(A_1 x + B_1 y + C_1 t) - \mu C_2 t = 0,$$

die nach § 18, 2 oder § 22, 6 ein Büschel paralleler Geraden darstellt.

Ein Spezialfall der Gleichung $U_1 - \mu U_2 = 0$ der Punktreihe in (23′) wird die Gleichung:

$$(A_1 u + B_1 v) - \mu (A_2 u + B_2 v) = 0,$$

die nach (10) eine unendlich ferne Punktreihe darstellt.

§ 23. Die Transformation der homogenen Koordinaten.

1. Übergang von der Ebene auf die Punktreihe. Wir bemerken vorerst, daß in den homogenen Koordinaten x, y, t der Punkte und u, v, s des Strahles in der Ebene die Koordinaten in der Punktreihe und im Strahlbüschel wieder mit enthalten sind.

Für einen Punkt der x-Achse ist $y = 0$, während x, t die in § 7, 1 eingeführten homogenen Koordinaten der Punktreihe sind (vgl. § 10, 5).

Mit Rücksicht aber auf § 22, 6 erklären wir:

Unter homogenen gemeinen Koordinaten x, y eines Punktes auf der unendlich fernen Geraden in bezug auf ein Koordinatenzweieck, dessen Ecken von einem rechtwinkligen Achsensystem Oxy der Ebene ausgeschnitten werden, verstehen wir zwei Zahlen, die sich verhalten, wie die Richtungskosinus α, β der durch den Punkt gehenden Strahlen in bezug auf das System Oxy (Fig. 130).

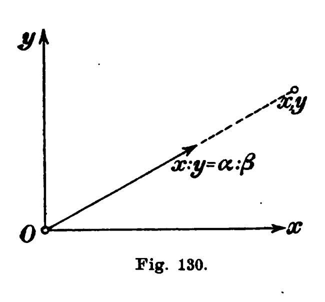


Fig. 130.

Sie stimmen überein mit den *Koordinaten der Richtung* in der Ebene § 11, 7 und *des Strahles im Strahlbüschel* § 7, (2), für die $x : y = 1 : \operatorname{tg} \varphi$ war.

2. Übergang von der Ebene auf den Strahlbüschel. Für eine durch den Punkt O gehende Gerade (Fig. 131):

$$ux + vy = 0$$

(vgl. § 16, (15)) ist von den homogenen Linienkoordinaten u, v, s nach § 22, (2); (3) $s = 0$, während u, v sich nach § 17, (6) wie die Richtungskosinus a, b der Normale der Geraden verhalten und die in § 7, (3)

eingeführten Koordinaten der Geraden im Büschel sind, für die $u : v = -\operatorname{tg}\varphi$ war.

Für eine der y-Achse parallele Gerade:

$$ux + st = 0$$

(vgl. § 16, (16)) ist von den homogenen Linienkoordinaten u, v, s nach § 22, (2); (3) $v = 0$, während wir u, s als homogene Koordinaten im Parallelstrahlbüschel betrachten können.[36])

Unter homogenen gemeinen Koordinaten u, s eines Strahles im Parallelstrahlbüschel in bezug auf ein rechtwinkliges Achsensystem Oxy,

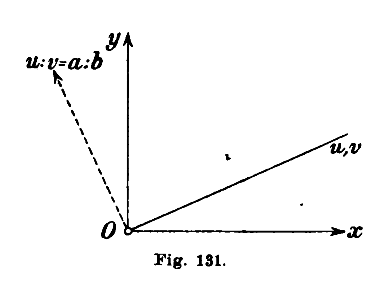


Fig. 131.

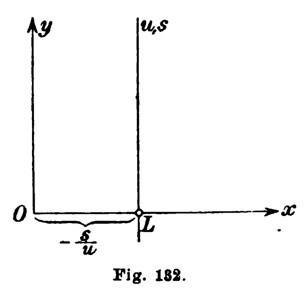


Fig. 132.

dessen y-Achse bei beliebiger Wahl von O dem Büschel angehört, verstehen wir zwei Zahlen, deren negatives reziprokes Verhältnis $-s, u$ gleich dem Abschnitt OL (Fig. 132 und § 19, **1**) *der Geraden auf der x-Achse ist.*

3. Die Transformation der homogenen Koordinaten. Nach den Begriffsbestimmungen von § 22, **1** entnehmen wir aus § 21, (1) und (2) und § 21, (6) und (9) für den Übergang von einem rechtwinkligen System Oxy zu einem andern $O'x'y'$ mit dem Anfangspunkt $O' = x_0, y_0, 1$ und den Achsenrichtungen a_1, b_1 und a_2, b_2 (Fig. 133) die Transformationsformeln:

$$(1) \quad \begin{cases} \varrho x = a_1 x' + a_2 y' + x_0 t' \\ \varrho y = b_1 x' + b_2 y' + y_0 t' \\ \varrho t = \qquad\qquad\qquad t', \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \varrho u = a_1 u' + a_2 v' \\ \varrho v = b_1 u' + b_2 v' \\ \varrho s = x_0' u' + y_0' v' + s', \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \sigma x' = a_1 x + b_1 y + x_0' t \\ \sigma y' = a_2 x + b_2 y + y_0' t \\ \sigma t' = \qquad\qquad\qquad t, \end{cases}$$

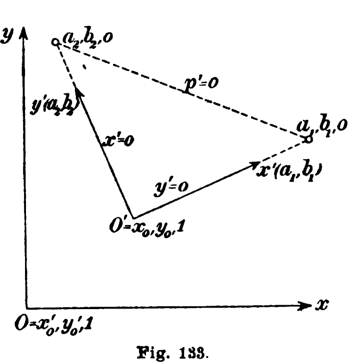


Fig. 133.

$$(4) \qquad \begin{cases} \sigma u' = a_1 u + b_1 v \\ \sigma v' = a_2 u + b_2 v \\ \sigma s' = x_0 u + y_0 v + s. \end{cases}$$

Hier bedeuten x_0', y_0', 1 die Koordinaten von O in bezug auf $O'x'y'$ (vgl. § 21, (3)) und ϱ, σ Proportionalitätsfaktoren.

Die neuen Koordinaten des Punktes und der Geraden sind daher, von dem Faktor σ abgesehen, lineare homogene Funktionen der alten, die gleich Null gesetzt nach § 22, (16); (19) die Gleichungen der Seiten und Ecken des neuen Koordinatendreiecks in bezug auf das alte geben.

4. Parameterdarstellung einer Punktreihe. Mit Hinblick auf § 23, **1** folgt aus (1) mit $y' = 0$ (Fig. 134):

Ist eine Gerade durch einen Punkt $O' = x_0, y_0, 1$ und ihre Richtungskosinus a_1, b_1 gegeben, so stellen sich die Koordinaten x, y, t

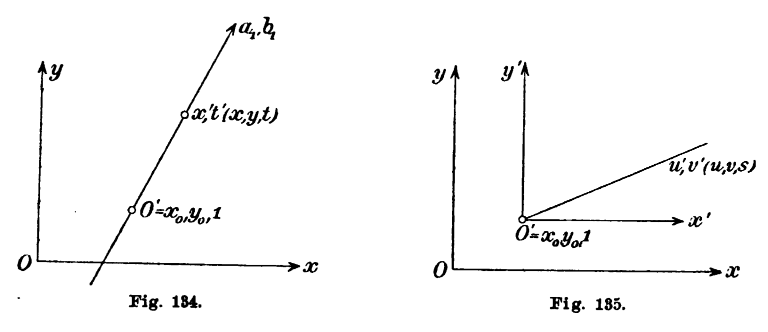


Fig. 134. Fig. 135.

ihres laufenden Punktes in bezug auf das ebene System Oxy mittels der Formeln:

$$(5) \qquad \varrho x = a_1 x' + x_0 t', \quad \varrho y = b_1 x' + y_0 t', \quad \varrho t = t'$$

durch die Koordinaten x', t' des Punktes auf der Geraden dar.

Diese bereits in § 16, **1** nicht homogen gegebene Parameterdarstellung einer endlichen Geraden ist also in den Transformationsformeln (1) enthalten.

Für die unendlich ferne Gerade haben wir nach § 23, **1** schon in den beiden ersten homogenen Koordinaten x, y eines Punktes in bezug auf das alte System zwei unabhängige Parameter, die zugleich Koordinaten des Punktes auf der unendlich fernen Geraden sind.

5. Parameterdarstellung eines Strahlbüschels. Mit $s' = 0$ erhält man aus (2) eine Parameterdarstellung der durch O' gehenden Strahlen. Man kann dabei zur Vereinfachung das System $O'x'y'$ mit Oxy parallel nehmen und findet (Fig. 135):

Ist der Mittelpunkt O' eines Strahlbüschels durch seine Koordi-

naten x_0, y_0, 1 *gegeben, so lassen sich die Koordinaten* u, v, s *des laufenden Strahles in bezug auf das ebene System* Oxy *mittels der Formeln:*

$$(6) \qquad \varrho u = u', \quad \varrho v = v', \quad \varrho s = -x_0 u' - y_0 v'$$

durch die homogenen Koordinaten u', v' *des Strahles im Strahlbüschel in bezug auf das zu* Oxy *parallele System* $O'x'y'$ (vgl. § 23, 2) *darstellen.*

6. Parameterdarstellung des Parallelstrahlenbüschels. Mit $v' = 0$ ergeben sich aus (2) die der y'-Achse parallelen Geraden, wobei man zur Vereinfachung $O' = 0$ nehmen kann (Fig. 136):

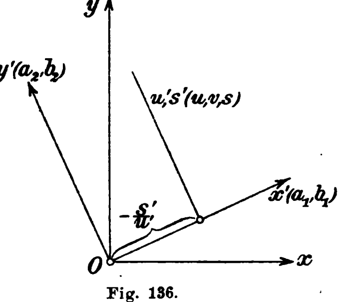
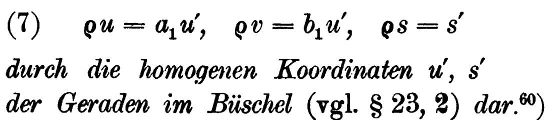


Fig. 136.

Ist ein Parallelstrahlenbüschel durch die Richtungskosinus a_1, b_1 *einer zu ihm senkrechten Geraden gegeben, so stellen sich die Koordinaten* u, v, s *der laufenden Geraden des Büschels in bezug auf das ebene System* Oxy *mittels der Formeln:*



$$(7) \qquad \varrho u = a_1 u', \quad \varrho v = b_1 u', \quad \varrho s = s'$$

durch die homogenen Koordinaten u', s' *der Geraden im Büschel* (vgl. § 23, 2) *dar.*[60])

§ 24. Lagebeziehungen zwischen zwei oder drei Geraden oder Punkten.

1. Identität zwischen den Gleichungen von zwei Geraden oder Punkten. In § 16, 5 wurden die Bedingungen für den Zusammenfall von zwei Geraden angegeben. Wir wiederholen sie in homogenen Koordinaten mit anderer Bezeichnung und mit Hinzufügung des dualen Satzes:

Die beiden Geraden:	*Die beiden Punkte:*
(1) $\begin{cases} X_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 t = 0 \\ X_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 t = 0 \end{cases}$	(1') $\begin{cases} U_1 = a_1' u + b_1' v + c_1' s = 0 \\ U_2 = a_2' u + b_2' v + c_2' s = 0 \end{cases}$
fallen immer dann und nur dann zusammen (haben ∞^1 *Punkte gemein), wenn eine Identität von der Form besteht:*	*fallen immer dann und nur dann zusammen (haben* ∞^1 *Gerade gemein), wenn eine Identität von der Form besteht:*
(2) $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = 0.$	(2') $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 = 0.$

In dieser verschwindet keiner der beiden Faktoren λ_1, λ_2, wenn nicht alle Koeffizienten der einen der beiden Gleichungen (1) verschwinden.

2. Die Unterdeterminanten aus den Koeffizienten der Gleichungen zweier Geraden oder Punkte. Da die Identität (2) mit den drei Gleichungen:

$$(3) \qquad \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = 0, \quad \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = 0, \quad \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = 0$$

gleichbedeutend ist, so folgt auch (§ 16, (11)):

Die beiden Geraden (1) *fallen immer dann und nur dann zusammen, wenn die Unterdeterminanten:*

$$(4) \quad \begin{cases} x_0 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad y_0 = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \\ t_0 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{cases}$$

sämtlich verschwinden.

Wenn die drei Unterdeterminanten (4) *nicht alle verschwinden, haben die beiden Geraden* (1) *einen einzigen Punkt gemein, dessen Koordinaten die drei Unterdeterminanten* x_0, y_0, t_0 *sind* (vgl. § 22, (15′)).

Die beiden Punkte (1′) *fallen immer dann und nur dann zusammen, wenn die Unterdeterminanten:*

$$(4') \quad \begin{cases} u_0 = \begin{vmatrix} b_1' & c_1' \\ b_2' & c_2' \end{vmatrix}, \quad v_0 = \begin{vmatrix} c_1' & a_1' \\ c_2' & a_2' \end{vmatrix}, \\ s_0 = \begin{vmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2' & b_2' \end{vmatrix} \end{cases}$$

sämtlich verschwinden.

Wenn die drei Unterdeterminanten (4′) *nicht alle verschwinden, haben die beiden Punkte* (1′) *eine bestimmte Verbindungslinie, deren Koordinaten die drei Unterdeterminanten* u_0, v_0, s_0 *sind* (vgl. § 22, (15); Anm. 2, II, (12)).

3. Identität[81]) **zwischen den Gleichungen von drei Geraden und drei Punkten.** Nach § 18, 7 wird jede durch den Schnittpunkt der beiden Geraden $X_1 = 0$ und $X_2 = 0$ gehende dritte Gerade durch eine Gleichung von der Form $X_1 - \mu X_2 = 0$ dargestellt, wie auch umgekehrt jede durch eine solche Gleichung dargestellte dritte Gerade durch diesen Schnittpunkt geht. Bezeichnet man also die Gleichung der dritten Geraden kurz mit $X_3 = 0$, so muß nach (2) $\lambda_1(X_1 - \mu X_2) + \lambda_3 X_3 = 0$ sein. Aus der mit $-\lambda_1\mu = \lambda_2$ sich ergebenden Symmetrie der Bedingung folgt dann:

Die drei Geraden:

$$(5) \quad \begin{cases} X_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 t = 0 \\ X_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 t = 0 \\ X_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 t = 0 \end{cases}$$

haben immer dann und nur dann einen Punkt gemein, wenn eine Identität von der Form besteht:

$$(6) \quad \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0.$$

Die drei Punkte:

$$(5') \quad \begin{cases} U_1 = a_1' u + b_1' v + c_1' s = 0 \\ U_2 = a_2' u + b_2' v + c_2' s = 0 \\ U_3 = a_3' u + b_3' v + c_3' s = 0 \end{cases}$$

liegen immer dann und nur dann in einer Geraden, wenn eine Identität von der Form besteht:

$$(6') \quad \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0.$$

In dieser verschwindet nach § 24, 1 keiner der Faktoren λ_1, λ_2, λ_3, wenn nicht zwei von den drei Geraden (5) (Punkten (5′)) zusammenfallen.

4. Die Determinante aus den Koeffizienten der Gleichungen von drei Geraden oder Punkten. Da nach § 22, 1 die homogenen Koordinaten x, y, t niemals alle drei verschwinden, so ist dafür, daß den drei Gleichungen (5) überhaupt durch einen Punkt x, y, t genügt werde, das Verschwinden der Determinante der Koeffizienten erforderlich (Anm. 2, II, 3):

Die drei Geraden (5) gehen immer dann und nur dann durch einen Punkt, wenn die Determinante:

$$(7) \qquad D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

verschwindet.

Die Koordinaten des Schnittpunktes sind nach (4):

$$(8) \qquad \begin{cases} x : y : t = A_1 : B_1 : C_1 \\ \qquad\qquad = A_2 : B_2 : C_2 \\ \qquad\qquad = A_3 : B_3 : C_3, \end{cases}$$

Die drei Punkte (5′) liegen immer dann und nur dann auf einer Geraden, wenn die Determinante:

$$(7') \qquad D' = \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' \end{vmatrix}$$

verschwindet.

Die Koordinaten der Verbindungslinie sind nach (4′):

$$(8') \qquad \begin{cases} u : v : s = A_1' : B_1' : C_1' \\ \qquad\qquad = A_2' : B_2' : C_2' \\ \qquad\qquad = A_3' : B_3' : C_3', \end{cases}$$

wo die großen Buchstaben die bei verschwindender Determinante D (D') reihenweise proportionalen (Anm. 2, II, (10)) Unterdeterminanten der gleichnamigen Elemente von D (D') bedeuten.

Da überdies die Identität (6) bedeutet, daß:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0, \quad \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = 0, \quad \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 = 0,$$

so haben die Faktoren λ_1, λ_2, λ_3 in (6), (6′) bei verschwindendem D (D') die Werte (Anm. 2, II, (10)):

$$(9) \qquad \begin{cases} \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = A_1 : A_2 : A_3 \\ \qquad\qquad\quad = B_1 : B_2 : B_3 \\ \qquad\qquad\quad = C_1 : C_2 : C_3. \end{cases} \qquad (9') \qquad \begin{cases} \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = A_1' : A_2' : A_3' \\ \qquad\qquad\quad = B_1' : B_2' : B_3' \\ \qquad\qquad\quad = C_1' : C_2' : C_3'. \end{cases}$$

5. Das Dreieck von drei Geraden und drei Punkten. Wenn *die Determinante D in (7) nicht verschwindet,* so gibt es keinen Punkt, der auf allen drei Geraden (5) läge. Diese bilden dann die drei Seiten eines *Dreiecks.* Die alsdann nicht mehr proportionalen Unterdeterminanten von D in (8) bestimmen nach (4) die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks, nämlich:

$$(10)\quad \begin{cases} x_1 : y_1 : t_1 = A_1 : B_1 : C_1 \\ x_2 : y_2 : t_2 = A_2 : B_2 : C_2 \\ x_3 : y_3 : t_3 = A_3 : B_3 : C_3. \end{cases}$$

Daher ist (§ 22, (3')) das von den drei *Geraden* (5) bestimmte Dreieck mit dem von den drei *Punkten* (5') bestimmten Dreieck (Fig. 137) identisch, wenn die Elemente von D' die Unterdeterminanten von D:

$$(11)\qquad a_i' = A_i, \quad b_i' = B_i, \quad c_i' = C_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

und damit (Anm. 1, II, (5)) die Unterdeterminanten von D' bis auf den Faktor D die Elemente von D werden:

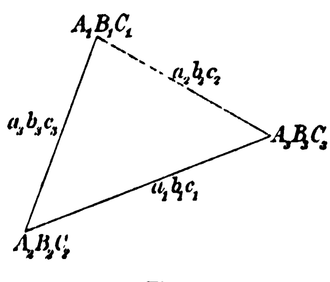


Fig. 137.

$$(12)\quad \begin{cases} A_i' = D a_i, \quad B_i' = D b_i, \\ C_i' = D c_i; \quad D' = D^2. \end{cases}$$

Die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks verhalten sich wie die Unterdeterminanten der Determinante aus den Koordinaten der Seiten (Fig. 137) *und umgekehrt die Koordinaten der Seiten wie die Unterdeterminanten der Determinante aus den Koordinaten der Ecken.*

6. Identität zwischen den Gleichungen von vier Geraden oder vier Punkten. Zwischen den linken Seiten der Gleichungen von vier Geraden:

$$(13)\quad \begin{cases} X_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 t = 0, \qquad X_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 t = 0, \\ X_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 t = 0, \qquad X_4 = a_4 x + b_4 y + c_4 t = 0 \end{cases}$$

besteht stets eine Identität von der Form:

$$(14)\qquad \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 = 0.$$

Denn die Verhältnisse der Faktoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 + a_4\lambda_4 = 0,$$
$$b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3 + b_4\lambda_4 = 0,$$
$$c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + c_3\lambda_3 + c_4\lambda_4 = 0,$$

nämlich (Anm. 2, III, (14)):

$$(15)\qquad \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4 = |a_2 b_3 c_4| : |a_3 b_1 c_4| : |a_1 b_2 c_4| : |a_3 b_2 c_1|.$$

Nach § 24, **3** ist keiner der vier Faktoren Null, falls keine drei der vier Geraden durch einen Punkt gehen. Über die Bedeutung der Faktoren λ_i vgl. § 30, **11**.

7. Endlicher oder unendlich ferner Schnittpunkt zweier Geraden. Der Schnittpunkt (4) der beiden Geraden (1) ist endlich (Fig. 138 *a*) oder unendlich fern (§ 22, (6)), je nachdem

$$t_0 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ oder } 0 \text{ ist.}$$

Im letztern Falle sind die Geraden selbst endlich und parallel (Fig. 138 *b*), wenn weder a_1 und b_1 noch a_2 und b_2 beide verschwinden. Ist aber $a_2 = 0$, $b_2 = 0$, so ist die zweite unendlich fern (Fig. 138 *c*).

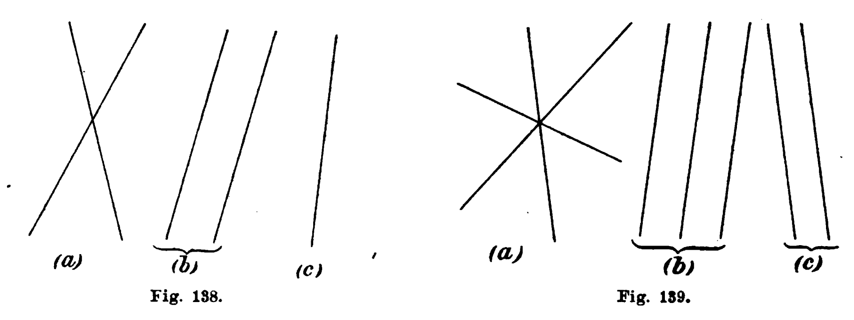


Fig. 138. Fig. 139.

Die Verbindungslinie (4′) der beiden Punkte (1′) ist die unendlich ferne Gerade $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, wenn mit $c_1' = 0$, $c_2' = 0$ beide Punkte unendlich fern sind (§ 22, (10)).

8. Endlicher oder unendlich ferner Schnittpunkt von drei Geraden. Je nachdem bei drei getrennten Geraden (5) die drei Unterdeterminanten C_1, C_2, C_3 in (8) nicht 0 oder 0 sind, ist der gemeinsame Punkt endlich (Fig. 139 *a*) oder unendlich fern. Im letztern Falle sind alle drei Geraden parallel (Fig. 139 *b*) oder zwei parallel und eine die unendlich ferne Gerade (Fig. 139 *c*).

9. Endliche oder unendlich ferne Ecken eines Dreiecks.[82]) Die Ecken (10) des Dreiecks der drei Geraden (5) sind alle drei endlich (Fig. 140 *a*) für $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$, $C_3 \neq 0$. Dagegen ist eine Ecke unendlich fern (Fig. 140 *b*), wenn etwa $C_3 = 0$ und zwei Ecken unendlich fern (Fig. 140 *c*), wenn $C_2 = 0$ und $C_3 = 0$. Im letzteren Falle muß wegen:

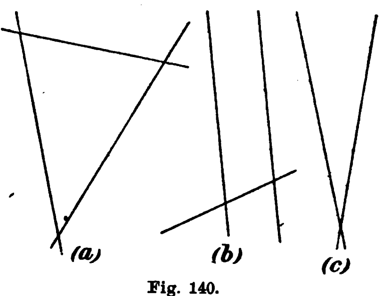


Fig. 140.

$$\begin{aligned} C_1 &= a_2 b_3 - b_2 a_3 \neq 0 \\ -C_2 &= b_3 a_1 - a_3 b_1 = 0 \\ +C_3 &= b_2 a_1 - a_2 b_1 = 0 \end{aligned}$$

notwendig $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, also die eine der drei Geraden selbst unendlich fern sein.

10. Durchschnitt eines Strahlbüschels mit einer Geraden. Sind:

$$(16) \qquad \begin{cases} X_1 = u_1 x + v_1 y + s_1 t = 0 \\ X_2 = u_2 x + v_2 y + s_2 t = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen der Grundstrahlen e_1, e_2 eines Büschels, so ist nach § 22, (23):

$$(17) \qquad X_1 - \mu X_2 = 0$$

die Gleichung des laufenden Strahles p des Büschels. Ist nun eine Gerade g_0, die nicht durch das Zentrum des Büschels geht (Fig. 141), durch die Gleichung:

$$(18) \qquad u_0 x + v_0 y + s_0 t = 0$$

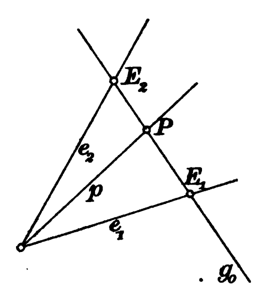


Fig. 141.

gegeben, so sind nach § 22, (14′) die Gleichungen ihrer Schnittpunkte E_1, E_2 mit den Geraden (16) in laufenden Linienkoordinaten u, v, s:

$$(19) \qquad \begin{cases} U_1 = \begin{vmatrix} u & v & s \\ u_1 & v_1 & s_1 \\ u_0 & v_0 & s_0 \end{vmatrix} = 0, \\ U_2 = \begin{vmatrix} u & v & s \\ u_2 & v_2 & s_2 \\ u_0 & v_0 & s_0 \end{vmatrix} = 0, \end{cases}$$

und ist die Gleichung ihres Schnittpunktes P mit der Geraden (17):

$$\begin{vmatrix} u & v & s \\ u_1 - \mu u_2 & v_1 - \mu v_2 & s_1 - \mu s_2 \\ u_0 & v_0 & s_0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder in den Abkürzungen (19) geschrieben (Anm. 1, II, (6)):

$$(20) \qquad U_1 - \mu U_2 = 0.$$

Eine zu dem Strahlbüschel (17) *perspektive Punktreihe hat also die Gleichung* (20); *ein Strahl des Büschels und ein Punkt der Reihe, die einander entsprechen, haben in beiden Gleichungen denselben Parameter* μ.

Daher besteht nach § 18, **9** und § 20, **5** auch zwischen den Doppelverhältnissen von vier entsprechenden Elementen, p_1, p_2, p_3, p_4 einerseits und P_1, P_2, P_3, P_4 anderseits, die Gleichheit:

$$(21) \qquad (P_1 P_2 P_3 P_4) = (p_1 p_2 p_3 p_4),$$

wie bereits § 5, (3) gefunden wurde.[83])

V. Kapitel.

Das Dreieck und das Viereck.

§ 25. Die Transversalensätze.

1. Gleichungen der Seiten und Ecken des Dreiecks. Die Gleichungen der drei Seiten e_1, e_2, e_3 und der drei Ecken E_1, E_2, E_3 eines Dreiecks (vgl § 24, 5) seien in laufenden Punktkoordinaten x, y, t und laufenden Linienkoordinaten u, v, s bezüglich:

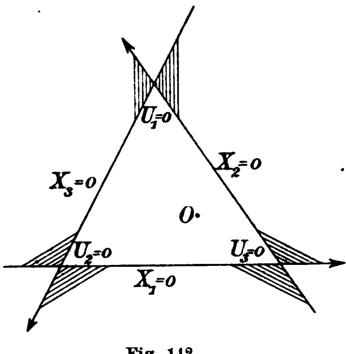


Fig. 142.

$$(1)\quad \begin{cases} X_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 t = 0 \\ X_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 t = 0 \\ X_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 t = 0, \end{cases}$$

$$(1')\quad \begin{cases} U_1 = A_1 u + B_1 v + C_1 s = 0 \\ U_2 = A_2 u + B_2 v + C_2 s = 0 \\ U_3 = A_3 u + B_3 v + C_3 s = 0. \end{cases}$$

Die Determinante $D = | a_1 b_2 c_3 |$ wird von O verschieden vorausgesetzt. Wir nehmen den Koordinatenanfangspunkt O im Inneren des Dreiecks gelegen an und richten die Seiten nach § 17, 1. Die innere Winkelfläche im Sinne von § 18, 4 ist dann an jeder Ecke die den „Außenwinkel" bedeckende (in Fig. 142 schraffierte) Fläche. Zur Abkürzung sei endlich gesetzt:

$$(2)\qquad \varkappa_i = \varepsilon_i \sqrt{a_i^2 + b_i^2}, \quad \varepsilon_i = -\operatorname{sign} c_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

2. Transversalen und Teilpunkte.

Drei beliebige durch die drei Ecken gezogene Transversalen t_1, t_2, t_3 (Fig. 143a) mögen die Winkel

Drei beliebige auf den drei Seiten angenommene Teilpunkte T_1, T_2, T_3 (Fig. 143b) mögen die Seiten des

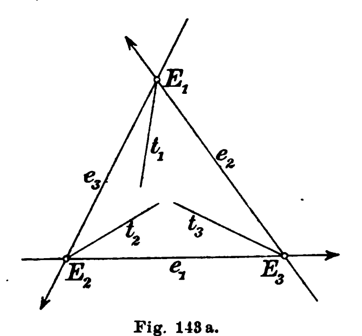


Fig. 143 a.

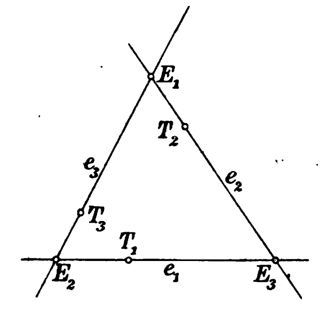


Fig. 143 b.

der gerichteten Seiten in den Sinusverhältnissen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ teilen, so daß:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin e_2 t_1}{\sin e_3 t_1} = \lambda_1, \quad \dfrac{\sin e_3 t_2}{\sin e_1 t_2} = \lambda_2, \\ \dfrac{\sin e_1 t_3}{\sin e_2 t_3} = \lambda_3. \end{cases}$$

Die Gleichungen der drei Transversalen lauten dann nach § 18, 4:

$$(4)\quad \begin{cases} X_2 - \mu_1 X_3 = 0, \\ X_3 - \mu_2 X_1 = 0, \\ X_1 - \mu_3 X_2 = 0, \end{cases}$$

wo:

$$(5)\quad \begin{cases} \mu_1 = \dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_3}\lambda_1, \quad \mu_2 = \dfrac{\varkappa_3}{\varkappa_1}\lambda_2, \\ \mu_3 = \dfrac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\lambda_3. \end{cases}$$

Dreiecks in den Streckenverhältnissen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ teilen, so daß:

$$(3')\quad \begin{cases} \dfrac{E_2 T_1}{E_3 T_1} = \lambda_1, \quad \dfrac{E_3 T_2}{E_1 T_2} = \lambda_2, \\ \dfrac{E_1 T_3}{E_2 T_3} = \lambda_3. \end{cases}$$

Die Gleichungen der drei Teilpunkte lauten dann nach § 20, 1:

$$(4')\quad \begin{cases} U_2 - \mu_1 U_3 = 0, \\ U_3 - \mu_2 U_1 = 0, \\ U_1 - \mu_3 U_2 = 0, \end{cases}$$

wo:

$$(5')\quad \begin{cases} \mu_1 = \dfrac{C_2}{C_3}\lambda_1, \quad \mu_2 = \dfrac{C_3}{C_1}\lambda_2, \\ \mu_3 = \dfrac{C_1}{C_2}\lambda_3. \end{cases}$$

3. Notwendige Bedingung für drei Transversalen durch einen Punkt. *Wenn die drei Transversalen* (4) *alle durch einen gegebenen Punkt* $P_0 = x_0, y_0, t_0$ *gehen,* so ist nach (4):

$$(6)\quad X_2^0 - \mu_1 X_3^0 = 0, \quad X_3^0 - \mu_2 X_1^0 = 0, \quad X_1^0 - \mu_3 X_2^0 = 0,$$

wo X_1^0, X_2^0, X_3^0 die für den Punkt P_0 gebildeten Ausdrücke X_1, X_2, X_3 sind. Die drei Parameter haben also die Werte (§ 18, (19)):

$$(7)\quad \mu_1 = X_2^0 : X_3^0, \quad \mu_2 = X_3^0 : X_1^0, \quad \mu_3 = X_1^0 : X_2^0$$

und genügen somit der Bedingung:

$$(8)\quad \mu_1 \mu_2 \mu_3 = 1.$$

4. Hinreichende Bedingung für drei Transversalen durch einen Punkt. *Wenn umgekehrt die Parameter der Gleichungen* (4) *die Bedingung* (8) *erfüllen,* und wir setzen, unter X_3^0 eine beliebige Konstante verstehend:

$$X_3^0 \mu_1 = X_2^0, \quad \frac{X_3^0}{\mu_2} = X_1^0,$$

wo X_2^0, X_1^0 zwei weitere durch μ_1, μ_2, X_3^0 bestimmte Konstanten sind, so erhalten wir mit Benutzung von (8) für die drei Parameter:

$$(9)\quad \mu_1 = X_2^0 : X_3^0, \quad \mu_2 = X_3^0 : X_1^0, \quad \mu_3 = 1 : \mu_1 \mu_2 = X_1^0 : X_2^0.$$

Andererseits gibt es stets einen bestimmten Punkt x, y, t, der den Gleichungen:

$$(10)\quad X_1 : X_2 : X_3 = X_1^0 : X_2^0 : X_3^0$$

genügt, nämlich (Anm. 2, II, 2) den Punkt:

$$x : y : t = A_1 X_1^0 + A_2 X_2^0 + A_3 X_3^0 : B_1 X_1^0 + B_2 X_2^0 + B_3 X_3^0 : C_1 X_1^0 + C_2 X_2^0 + C_3 X_3^0.$$

Dieser genügt aber nach (10) den drei Gleichungen (4), deren Parameter die Werte (9) haben. Daher gehen die drei Transversalen (4) durch diesen Punkt.

5. Die Transversalensätze. Indem wir die Resultate von § 25, 3 und 4 zusammenfassen, können wir den gefundenen, sowie den dualen Satz in folgenden beiden Formen aussprechen:

I. *Die drei Transversalen:*

$$(11) \quad \begin{cases} X_2 - \mu_1 X_3 = 0, \\ X_3 - \mu_2 X_1 = 0, \\ X_1 - \mu_3 X_2 = 0 \end{cases}$$

des Dreiecks $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$ (vgl. § 25, (1)) *gehen immer dann und nur dann durch einen Punkt, wenn:*

$$(12) \qquad \mu_1 \mu_2 \mu_3 = 1.$$

I′. *Die drei Teilpunkte:*

$$(11') \quad \begin{cases} U_2 - \mu_1 U_3 = 0, \\ U_3 - \mu_2 U_1 = 0, \\ U_1 - \mu_3 U_2 = 0 \end{cases}$$

des Dreiecks $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ (vgl. § 25, (1′)) *liegen immer dann und nur dann auf einer Geraden, wenn:*

$$(12') \qquad \mu_1 \mu_2 \mu_3 = 1.$$

II. *Die drei Transversalen* (11) *gehen immer dann und nur dann durch einen Punkt* $P_0 = x_0, y_0, t_0$, *wenn* μ_1, μ_2, μ_3 *von drei Konstanten* X_1^0, X_2^0, X_3^0 *in der Weise:*

$$(13) \quad \begin{cases} \mu_1 = \frac{X_2^0}{X_3^0}, \quad \mu_2 = \frac{X_3^0}{X_1^0}, \\ \mu_3 = \frac{X_1^0}{X_2^0} \end{cases}$$

abhängen. Zwischen den Konstanten und dem Punkte bestehen die Gleichungen:

$$(14) \qquad a_i x_0 + b_i y_0 + c_i t_0 = \varrho X_i^0,$$

II′. *Die drei Teilpunkte* (11′) *liegen immer dann und nur dann auf einer Geraden* $p_0 = u_0, v_0, s_0$, *wenn* μ_1, μ_2, μ_3 *von drei Konstanten* U_1^0, U_2^0, U_3^0 *in der Weise:*

$$(13') \quad \begin{cases} \mu_1 = \frac{U_2^0}{U_3^0}, \quad \mu_2 = \frac{U_3^0}{U_1^0}, \\ \mu_3 = \frac{U_1^0}{U_2^0} \end{cases}$$

abhängen. Zwischen den Konstanten und der Geraden bestehen die Gleichungen:

$$(14') \qquad A_i u_0 + B_i v_0 + C_i s_0 = \varrho U_i^0,$$

wo $i = 1, 2, 3$ und ϱ ein Proportionalitätsfaktor ist.

Da nach (5) und (5′) stets

$$(15) \qquad \mu_1 \mu_2 \mu_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

ist, so lauten die Sätze I und I′ *unabhängig vom Koordinatensystem.*[84])

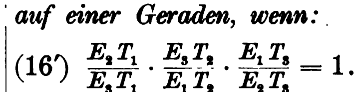
III. *Drei Transversalen* t_1, t_2, t_3 *des Dreiecks* $e_1 e_2 e_3$ (Fig. 144a) *gehen immer dann und nur dann durch*

III′. *Drei Teilpunkte* T_1, T_2, T_3 *des Dreiecks* $E_1 E_2 E_3$ (Fig. 144b) *liegen immer dann und nur dann*

einen Punkt, wenn:

$$(16)\qquad \frac{\sin e_3 t_1}{\sin e_3 t_1} \cdot \frac{\sin e_3 t_2}{\sin e_1 t_2} \cdot \frac{\sin e_1 t_3}{\sin e_2 t_3} = 1.$$

auf einer Geraden, wenn:



$$(16')\qquad \frac{E_2 T_1}{E_3 T_1} \cdot \frac{E_3 T_2}{E_1 T_2} \cdot \frac{E_1 T_3}{E_2 T_3} = 1.$$

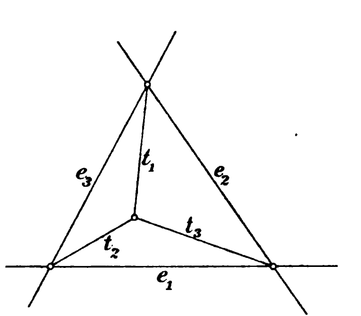


Fig. 144a.

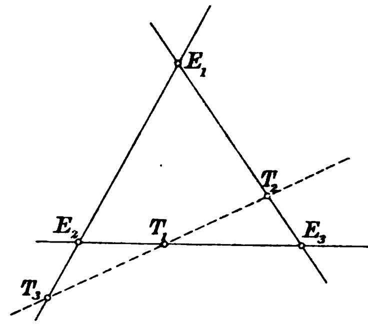


Fig. 144b.

Bei (16) kommt es auch auf die Richtung der Seiten nicht mehr an, da bei Umkehr der in § 25, **1** festgesetzten Richtung einer Seite immer zwei von den drei Quotienten auf der linken Seite von (16) ihr Vorzeichen ändern (vgl. § 4, **6**).

6. Die Halbierungslinien der Dreieckswinkel und die Mittelpunkte der Dreiecksseiten. Die Halbierungslinien der drei innern Dreieckswinkel (der äußern Halbierungslinien der Seitenpaare im

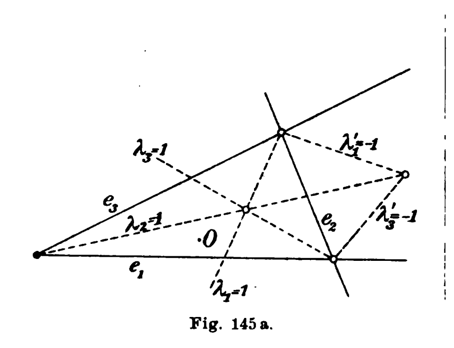


Fig. 145a.

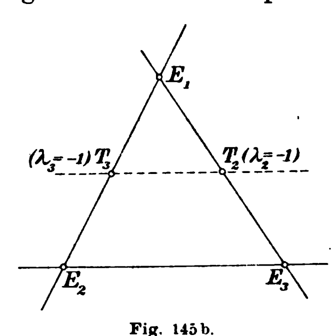


Fig. 145b.

Sinne von § 18, **6**) entsprechen den Werten $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$, die Halbierungslinien der drei Außenwinkel des Dreiecks (innere im Sinne von § 18, **6**) den Werten $\lambda_1' = -1$, $\lambda_2' = -1$, $\lambda_3' = -1$ des Teilungsverhältnisses (Fig. 145a). Da somit:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1, \quad \lambda_1 \lambda_2' \lambda_3' = 1, \quad \lambda_2 \lambda_3' \lambda_1' = 1, \quad \lambda_3 \lambda_1' \lambda_2' = 1,$$

so folgt aus (16):

Die Halbierungslinien der drei Innenwinkel des Dreiecks gehen

durch einen Punkt. Die Halbierungslinien zweier Außenwinkel und des gegenüberliegenden Innenwinkels gehen durch einen Punkt.

Die dualen Sätze lauten nach (16') (vgl. § 20, 2):

Die drei äußern Halbierungspunkte d. h. die drei unendlich fernen Punkte der Seiten liegen auf einer Geraden, der unendlich fernen. Die innern Halbierungspunkte d. h. die Mittelpunkte zweier Seiten und der unendlich ferne Punkt der dritten liegen in einer Geraden: *die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier Seiten ist der dritten Seite parallel* (Fig. 145b; § 22, 6).

7. Die Höhen des Dreiecks. Soll die Transversale:

$$X_2 - \mu_1 X_3 = (a_2 - \mu_1 a_3)x + (b_2 - \mu_1 b_3)y + (c_2 - \mu_1 c_3)t = 0$$

auf der Seite:

$$X_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 t = 0$$

senkrecht stehen (eine *Höhe* sein), so muß nach § 18, (5):

$$a_1(a_2 - \mu_1 a_3) + b_1(b_2 - \mu_1 b_3) = 0$$

sein. Die Parameter μ_1, μ_2, μ_3 der in Form (11) dargestellten drei Höhen sind somit:

$$(17) \qquad \mu_1 = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1 a_3 + b_1 b_3}, \quad \mu_2 = \frac{a_2 a_3 + b_2 b_3}{a_2 a_1 + b_2 b_1}, \quad \mu_3 = \frac{a_3 a_1 + b_3 b_1}{a_3 a_2 + b_3 b_2},$$

und genügen daher der Bedingung (12):

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 = 1.$$

Die drei Höhen des Dreiecks gehen durch einen Punkt.[85])

8. Übergang von den Transversalen auf die Teilpunkte. Seien jetzt T_1, T_2, T_3 die Schnittpunkte von drei Transversalen t_1, t_2, t_3 mit den Gegenseiten. Wir bezeichnen mit α_1, α_2, α_3 die absoluten Größen der drei Innenwinkel des Dreiecks (Fig. 146). Drehen wir dann einen Augenblick die in § 25, 1 festgesetzte Richtung der Seite e_2 in die entgegengesetzte (der eingeklammerten Pfeilspitze in Fig. 146 entsprechende) Richtung um, so ist nach § 5, (1):

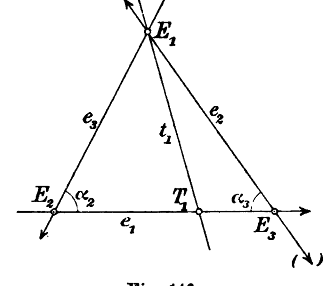


Fig. 146.

$$\frac{E_2 T_1}{E_3 T_1} = \frac{\sin \alpha_3}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin e_3 t_1}{\sin e_2 t_1}.$$

Für die ursprüngliche Richtung von e_2 wird daher:

$$\frac{E_2 T_1}{E_3 T_1} = -\frac{\sin \alpha_3}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin e_3 t_1}{\sin e_2 t_1}$$

und ebenso:

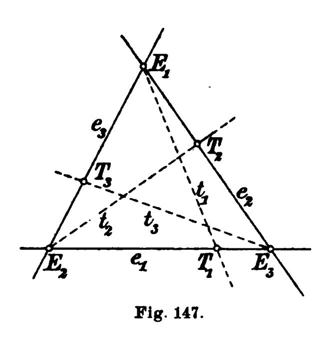


Fig. 147.

$$\frac{E_3 T_2}{E_1 T_2} = -\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_3} \cdot \frac{\sin e_1 t_2}{\sin e_3 t_2},$$
$$\frac{E_1 T_3}{E_2 T_3} = -\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \cdot \frac{\sin e_2 t_3}{\sin e_1 t_3}.$$

Sind daher T_1, T_2, T_3 *die Schnittpunkte dreier beliebigen Transversalen* t_1, t_2, t_3 *mit den gegenüberliegenden Seiten* (Fig. 147), *so ist:*

$$(18) \quad \begin{cases} \dfrac{E_2 T_1}{E_3 T_1} \cdot \dfrac{E_3 T_2}{E_1 T_2} \cdot \dfrac{E_1 T_3}{E_2 T_3} \\ = -\dfrac{\sin e_3 t_1}{\sin e_2 t_1} \cdot \dfrac{\sin e_1 t_2}{\sin e_3 t_2} \cdot \dfrac{\sin e_2 t_3}{\sin e_1 t_3}. \end{cases}$$

9. Zweite Form der Transversalensätze. Danach können wir den Sätzen in § 25, 5, III und III′ auch folgende Form geben:

IV. *Drei Transversalen des Dreiecks* $E_1 E_2 E_3$ *gehen immer dann und nur dann durch einen Punkt* (Fig. 148 a), *wenn ihre Schnittpunkte* T_1, T_2, T_3 *mit den Gegenseiten der Bedingung genügen:*

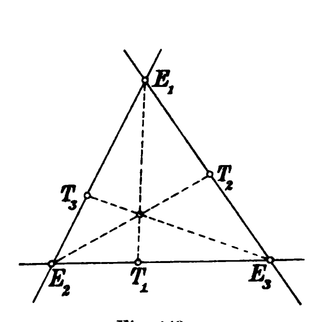


Fig. 148 a.

$$(19) \quad \frac{E_2 T_1}{E_3 T_1} \cdot \frac{E_3 T_2}{E_1 T_2} \cdot \frac{E_1 T_3}{E_2 T_3} = -1.$$

IV′. *Drei Teilpunkte des Dreiecks* $e_1 e_2 e_3$ *liegen immer dann und nur dann auf einer Geraden* (Fig. 148 b), *wenn ihre Verbindungslinien* t_1, t_2, t_3 *mit den Gegenecken der Bedingung genügen:*

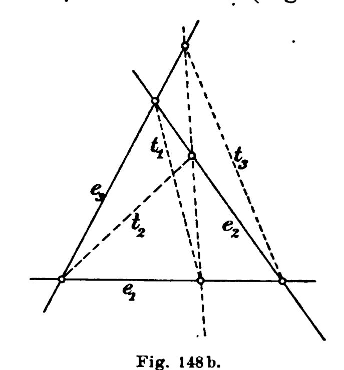


Fig. 148 b.

$$(19') \quad \frac{\sin e_2 t_1}{\sin e_3 t_1} \cdot \frac{\sin e_3 t_2}{\sin e_1 t_2} \cdot \frac{\sin e_1 t_3}{\sin e_2 t_3} = -1.$$

Da aber die Teilpunkte T_1, T_2, T_3 in IV wieder durch die Gleichungen (11′) dargestellt werden können, wo μ_1, μ_2, μ_3 die Bedeutung (5′), (3′) haben, so stellen sich neben die Sätze I und I′ die weiteren:

V. *Die Verbindungslinien der drei Teilpunkte:*

$$(20) \quad \begin{cases} U_2 - \mu_1 U_3 = 0, \\ U_3 - \mu_2 U_1 = 0, \\ U_1 - \mu_3 U_2 = 0 \end{cases}$$

V′. *Die Schnittpunkte der drei Transversalen:*

$$(20') \quad \begin{cases} X_2 - \mu_1 X_3 = 0, \\ X_3 - \mu_2 X_1 = 0, \\ X_1 - \mu_3 X_2 = 0 \end{cases}$$

auf den Seiten des Dreiecks $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ mit den Gegenecken gehen immer dann und nur dann durch einen Punkt, wenn:

(21) $\mu_1 \mu_2 \mu_3 = -1.$

durch die Ecken des Dreiecks $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$ mit den Gegenseiten liegen immer dann und nur dann auf einer Geraden, wenn:

(21') $\mu_1 \mu_2 \mu_3 = -1.$

10. Verbindungslinien der Seitenmittelpunkte mit den Ecken. Da die Mittelpunkte T_1, T_2, T_3 der drei Seiten (Fig. 149) diese im Verhältnis $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ teilen (vgl. § 3, 3), so folgt aus (19) unmittelbar:

Die Verbindungslinien der Mittelpunkte der drei Seiten eines Dreiecks mit den Gegenecken gehen durch einen Punkt.

Fig. 149.

11. Neuer Übergang von den Transversalen auf die Teilpunkte. Die durch die Ecke E_1 gehende Transversale:

$$X_2 + \mu_1 X_3 = 0$$

(§ 18, (14) mit $-\mu_1$ für μ) schneidet die Gegenseite:

$$X_1 = 0$$

in einem Punkte, dessen Gleichung nach § 22, (14') lautet:

$$\begin{vmatrix} u & v & s \\ a_2 + \mu_1 a_3 & b_2 + \mu_1 b_3 & c_2 + \mu_1 c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$$

oder mit Benutzung der Abkürzungen in (1'):

$$U_3 - \mu_1 U_2 = 0.$$

In gleicher Weise folgt allgemein:

Die Transversalen:

$$(22)\qquad \begin{cases} X_2 + \mu_1 X_3 = 0, \\ X_3 + \mu_2 X_1 = 0, \\ X_1 + \mu_3 X_2 = 0 \end{cases}$$

schneiden die Gegenseiten in den Punkten:

$$(23)\qquad \begin{cases} U_2 - \frac{1}{\mu_1} U_3 = 0, \\ U_3 - \frac{1}{\mu_2} U_1 = 0, \\ U_1 - \frac{1}{\mu_3} U_2 = 0. \end{cases}$$

Die Verbindungslinien der Teilpunkte:

$$(22')\qquad \begin{cases} U_2 + \mu_1 U_3 = 0, \\ U_3 + \mu_2 U_1 = 0, \\ U_1 + \mu_3 U_2 = 0 \end{cases}$$

mit den Gegenseiten haben die Gleichungen:

$$(23')\qquad \begin{cases} X_2 - \frac{1}{\mu_1} X_3 = 0, \\ X_3 - \frac{1}{\mu_2} X_1 = 0, \\ X_1 - \frac{1}{\mu_3} X_2 = 0. \end{cases}$$

12. Neue Form der Sätze § 25, 9, V und V′.

Die drei Geraden (23′) gehen nach § 25, 5, II durch einen Punkt x_0, y_0, t_0, wenn mit drei Konstanten X_1^0, X_2^0, X_3^0:

$$(24)\quad \frac{1}{\mu_1}=\frac{X_2^0}{X_3^0},\ \frac{1}{\mu_2}=\frac{X_3^0}{X_1^0},\ \frac{1}{\mu_3}=\frac{X_1^0}{X_2^0}$$

und zwischen Punkt und Konstanten die Gleichungen (14) bestehen.

Die drei Punkte (23) liegen nach § 25, 5, II′ auf einer Geraden u_0, v_0, s_0, wenn mit drei Konstanten U_1^0, U_2^0, U_3^0:

$$(24')\quad \frac{1}{\mu_1}=\frac{U_2^0}{U_3^0},\ \frac{1}{\mu_2}=\frac{U_3^0}{U_1^0},\ \frac{1}{\mu_3}=\frac{U_1^0}{U_2^0}$$

und zwischen Gerader und Konstanten die Gleichungen (14′) bestehen.

Wir erhalten daher die Sätze:

VI. *Die Verbindungslinien der drei Teilpunkte:*

$$(25)\quad \begin{cases} U_2+\mu_1 U_3=0,\\ U_3+\mu_2 U_1=0,\\ U_1+\mu_3 U_2=0 \end{cases}$$

auf den Seiten e_1, e_2, e_3 mit den Gegenecken E_1, E_2, E_3 gehen durch einen Punkt, wenn die Parameter μ_1, μ_2, μ_3 von drei Konstanten X_1^0, X_2^0, X_3^0 in der Weise abhängen:

$$(26)\quad \mu_1=\frac{X_3^0}{X_2^0},\ \mu_2=\frac{X_1^0}{X_3^0},\ \mu_3=\frac{X_2^0}{X_1^0}.$$

Die Koordinaten des gemeinsamen Punktes stehen wie in (14) mit den drei Konstanten in der Beziehung:

$$(27)\quad \begin{cases} a_i x_0+b_i y_0+c_i t_0=\varrho X_i^0,\\ \qquad i=1,2,3. \end{cases}$$

VI′. *Die Schnittpunkte der drei Transversalen:*

$$(25')\quad \begin{cases} X_2+\mu_1 X_3=0,\\ X_3+\mu_2 X_1=0,\\ X_1+\mu_3 X_2=0 \end{cases}$$

durch die Ecken E_1, E_2, E_3 mit den Seiten e_1, e_2, e_3 liegen auf einer Geraden, wenn die Parameter μ_1, μ_2, μ_3 von drei Konstanten U_1^0, U_2^0, U_3^0 in der Weise abhängen:

$$(26')\quad \mu_1=\frac{U_3^0}{U_2^0},\ \mu_2=\frac{U_1^0}{U_3^0},\ \mu_3=\frac{U_2^0}{U_1^0}.$$

Die Koordinaten der gemeinsamen Geraden stehen mit den drei Konstanten in der Beziehung:

$$(27')\quad \begin{cases} A_i u_0+B_i v_0+C_i s_0=\varrho U_i^0,\\ \qquad i=1,2,3. \end{cases}$$

Die Sätze VI und VI′ enthalten mit umgekehrten Vorzeichen der drei Parameter wieder die Sätze V und V′, gehen aber insofern über diese hinaus, als sie in (27) und (27′) die Bestimmung des Punktes x_0, y_0, t_0 und der Geraden u_0, v_0, s_0 aus den Parametern μ_1, μ_2, μ_3 ermöglichen.

§ 26. Harmonikale und Harmonikalpunkt.

1. Begriff der Harmonikale und des Harmonikalpunktes.

Sei $P_0=x_0, y_0, t_0$ ein gegebener Punkt. Sind dann:

Sei $p_0=u_0, v_0, s_0$ eine gegebene Gerade. Sind dann:

$$(1) \quad \begin{cases} X_2 - \mu_1 X_3 = 0, \\ X_3 - \mu_2 X_1 = 0, \\ X_1 - \mu_3 X_2 = 0, \end{cases}$$

wie in § 25, **5**, II die Gleichungen seiner Verbindungslinien t_1, t_2, t_3 mit den Ecken des Dreiecks, so ist:

$$(2) \quad \mu_1 = \frac{X_2^0}{X_3^0}, \quad \mu_2 = \frac{X_3^0}{X_1^0}, \quad \mu_3 = \frac{X_1^0}{X_2^0},$$

$$(1') \quad \begin{cases} U_2 - \mu_1 U_3 = 0, \\ U_3 - \mu_2 U_1 = 0, \\ U_1 - \mu_3 U_2 = 0, \end{cases}$$

wie in § 25, **5**, II′ die Gleichungen ihrer Schnittpunkte T_1, T_2, T_3 mit den Seiten des Dreiecks, so ist:

$$(2') \quad \mu_1 = \frac{U_2^0}{U_3^0}, \quad \mu_2 = \frac{U_3^0}{U_1^0}, \quad \mu_3 = \frac{U_1^0}{U_2^0},$$

worin mit einem Faktor ϱ, auf den es für die Quotienten nicht ankommt:

$$(3) \quad \begin{cases} \varrho X_i^0 = a_i x_0 + b_i y_0 + c_i t_0, \\ \qquad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

$$(3') \quad \begin{cases} \varrho U_i^0 = A_i u_0 + B_i v_0 + C_i s_0, \\ \qquad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

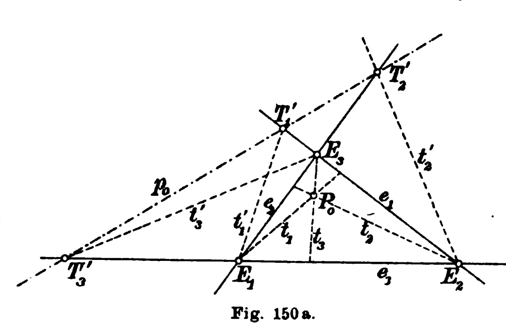


Fig. 150a.

Die vierten harmonischen Strahlen t_1', t_2', t_3' (Fig. 150a) in den Ecken E_1, E_2, E_3 bezüglich zu e_2, e_3, t_1, zu e_3, e_1, t_2 und zu e_1, e_2, t_3 sind nach § 18, (27):

$$(4) \quad \begin{cases} X_2 + \mu_1 X_3 = 0, \\ X_3 + \mu_2 X_1 = 0, \\ X_1 + \mu_3 X_2 = 0. \end{cases}$$

Die vierten harmonischen Punkte T_1', T_2', T_3' (Fig. 150b) auf den Seiten e_1, e_2, e_3 bezüglich zu E_2, E_3, T_1 zu E_3, E_1, T_2 und zu E_1, E_2, T_3 sind nun nach § 20, (15):

$$(4') \quad \begin{cases} U_2 + \mu_1 U_3 = 0, \\ U_3 + \mu_2 U_1 = 0, \\ U_1 + \mu_3 U_2 = 0. \end{cases}$$

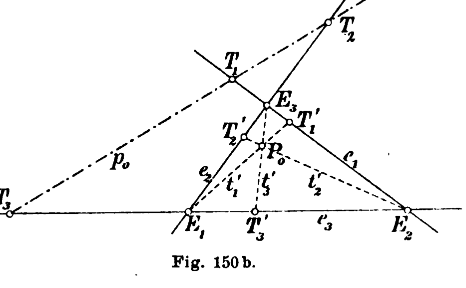


Fig. 150b.

Damit die Schnittpunkte T_1', T_2', T_3' dieser drei Strahlen t_1', t_2', t_3' mit den Gegenseiten e_1, e_2, e_3 auf einer Geraden $p_0 = u_0$, v_0, s_0 liegen, müssen nach § 25, **12**, VI′ die Parameter μ_1, μ_2, μ_3 von drei Konstanten U_1^0, U_2^0, U_3^0 in der

Damit die Verbindungslinien t_1', t_2', t_3' dieser drei Punkte T_1', T_2', T_3' mit den Gegenecken E_1, E_2, E_3 durch einen Punkt $P_0 = x_0$, y_0, t_0 gehen, müssen nach § 25, **12**, VI die Parameter μ_1, μ_2, μ_3 von drei Konstanten X_1^0, X_2^0, X_3^0

Weise abhängen:

$$(5)\quad \mu_1 = \frac{U_3^0}{U_2^0},\ \mu_2 = \frac{U_1^0}{U_3^0},\ \mu_3 = \frac{U_2^0}{U_1^0}$$

und zugleich für die Gerade u_0, v_0, s_0 die Gleichungen:

$$(6)\quad \begin{cases} A_i u_0 + B_i v_0 + C_i s_0 = \varrho\, U_i^0, \\ \qquad i = 1, 2, 3, \end{cases}$$

bestehen.

Das erstere ist aber nach (2) der Fall; man hat nur zu setzen:

$$(7)\quad \begin{cases} U_1^0 = \frac{1}{X_1^0},\ U_2^0 = \frac{1}{X_2^0}, \\ U_3^0 = \frac{1}{X_3^0}. \end{cases}$$

Setzt man hier für U_i^0 die Werte (6), so erhält man durch Auflösung (Anm. 2, II, 2) nach den Verhältnissen von u_0, v_0, s_0 (vgl. § 24, (12)):

$$(8)\quad \begin{cases} \sigma u_0 = \frac{a_1}{X_1^0} + \frac{a_2}{X_2^0} + \frac{a_3}{X_3^0}, \\ \sigma v_0 = \frac{b_1}{X_1^0} + \frac{b_2}{X_2^0} + \frac{b_3}{X_3^0}, \\ \sigma s_0 = \frac{c_1}{X_1^0} + \frac{c_2}{X_2^0} + \frac{c_3}{X_3^0}. \end{cases}$$

in der Weise abhängen:

$$(5')\quad \mu_1 = \frac{X_3^0}{X_2^0},\ \mu_2 = \frac{X_1^0}{X_3^0},\ \mu_3 = \frac{X_2^0}{X_1^0}$$

und zugleich für den Punkt x_0, y_0, t_0 die Gleichungen:

$$(6')\quad \begin{cases} a_i x_0 + b_i y_0 + c_i t_0 = \varrho\, X_i^0, \\ \qquad i = 1, 2, 3, \end{cases}$$

bestehen.

Das erstere ist aber nach (2′) der Fall; man hat nur zu setzen:

$$(7')\quad \begin{cases} X_1^0 = \frac{1}{U_1^0},\ X_2^0 = \frac{1}{U_2^0}, \\ X_3^0 = \frac{1}{U_3^0}. \end{cases}$$

Setzt man hier für X_i^0 die Werte (6′), so erhält man durch Auflösung (Anm. 2, II, 2) nach den Verhältnissen von x_0, y_0, t_0:

$$(8')\quad \begin{cases} \sigma x_0 = \frac{A_1}{U_1^0} + \frac{A_2}{U_2^0} + \frac{A_3}{U_3^0}, \\ \sigma y_0 = \frac{B_1}{U_1^0} + \frac{B_2}{U_2^0} + \frac{B_3}{U_3^0}, \\ \sigma t_0 = \frac{C_1}{U_1^0} + \frac{C_2}{U_2^0} + \frac{C_3}{U_3^0}. \end{cases}$$

Man gewinnt also die Sätze[86]):

Verbindet man (Fig. 150a) *einen gegebenen Punkt P_0 mit den drei Ecken E_1, E_2, E_3 des Dreiecks durch die Geraden t_1, t_2, t_3 und konstruiert in jeder Ecke den vierten harmonischen Strahl t_1', t_2', t_3', so schneiden diese Strahlen die Gegenseiten in drei Punkten T_1', T_2', T_3', die in einer Geraden p_0 liegen.*

Die mittels (8) durch P_0 bestimmte Gerade p_0 heißt die *Harmonikale des Punktes P_0*.

Schneidet man (Fig. 150b) *eine gegebene Gerade p_0 mit den drei Seiten e_1, e_2, e_3 des Dreiecks in den Punkten T_1, T_2, T_3 und konstruiert auf jeder Seite den vierten harmonischen Punkt T_1', T_2', T_3', so gehen die Verbindungslinien t_1', t_2', t_3' dieser Punkte mit den Gegenecken durch einen Punkt P_0.*

Der mittels (8′) durch p_0 bestimmte Punkt P_0 heißt der *Harmonikalpunkt der Geraden p_0*.

2. Die Reziprozität von Harmonikale und Harmonikalpunkt. Da die beiden Gleichungssysteme (7) und (7′), mit Rücksicht auf (3), (3′), (6), (6′) identisch sind und je den Punkt $P_0 = x_0, y_0, t_0$ und die

Gerade u_0, v_0, s_0 wechselseitig eindeutig durcheinander ausdrücken, so folgt, daß die Harmonikale p_0 eines beliebigen Punktes P_0 diesen als Harmonikalpunkt und der Harmonikalpunkt einer beliebigen Geraden diese als Harmonikale hat.

Je ein Punkt und eine Gerade der Ebene entsprechen sich als Harmonikalpunkt und Harmonikale in bezug auf ein Dreieck wechselseitig eindeutig.

Zwischen den Koordinaten x_0, y_0, t_0 und u_0, v_0, s_0 beider bestehen nach (7) und (7'), da es überall nur auf die Verhältnisse der X_i^0 und der U_i^0 ankommt, die Gleichungen:

$$X_1^0 : X_2^0 : X_3^0 = \frac{1}{U_1^0} : \frac{1}{U_2^0} : \frac{1}{U_3^0}. \tag{9}$$

Auch ergibt sich durch Addition der mit x, y, t multiplizierten Gleichungen (8) und durch Addition der mit u, v, s multiplizierten Gleichungen (8') bezüglich (vgl. § 22, (4); (4')):

Die Gleichung der Harmonikale des Punktes x_0, y_0, t_0 lautet in laufenden Koordinaten x, y, t:

$$\frac{X_1}{X_1^0} + \frac{X_2}{X_2^0} + \frac{X_3}{X_3^0} = 0. \tag{10}$$

Die Gleichung des Harmonikalpunktes der Geraden u_0, v_0, s_0 lautet in laufenden Koordinaten u, v, s:

$$\frac{U_1}{U_1^0} + \frac{U_2}{U_2^0} + \frac{U_3}{U_3^0} = 0. \tag{10'}$$

3. Konstruktion der Harmonikale oder des Harmonikalpunktes. Indem wir in Fig. 151 zunächst Fig. 150a wiederholen, fügen wir weitere Elemente hinzu. Seien T_1, T_2, T_3 die Schnittpunkte der Transversalen t_1, t_2, t_3 in (1) mit den Gegenseiten. Dann genügt der Gleichung:

$$-\frac{X_1}{X_1^0} + \frac{X_2}{X_2^0} + \frac{X_3}{X_3^0} = 0$$

der Punkt T_2 als Schnittpunkt der Geraden:

$$X_2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{X_3}{X_3^0} - \frac{X_1}{X_1^0} = 0$$

und der Punkt T_3 als Schnittpunkt der Geraden:

$$X_3 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{X_1}{X_1^0} - \frac{X_2}{X_2^0} = 0.$$

Die drei Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} -\frac{X_1}{X_1^0} + \frac{X_2}{X_2^0} + \frac{X_3}{X_3^0} = 0, \quad \frac{X_1}{X_1^0} - \frac{X_2}{X_2^0} + \frac{X_3}{X_3^0} = 0, \\ \frac{X_1}{X_1^0} + \frac{X_2}{X_2^0} - \frac{X_3}{X_3^0} = 0 \end{aligned}\right. \tag{11}$$

stellen daher die Verbindungslinien $r_1 = T_2 T_3$, $r_2 = T_3 T_1$, $r_3 = T_1 T_2$ dar.

Die Linie r_1 geht aber, wie ihre Gleichung (11) zeigt durch den Schnittpunkt T_1' der Geraden (vgl. (4)):

$$X_1 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{X_2}{X_2^0} + \frac{X_3}{X_3^0} = 0,$$

d. h. e_1 und t_1'; ebenso geht r_2 durch T_2' und r_3 durch T_3'.

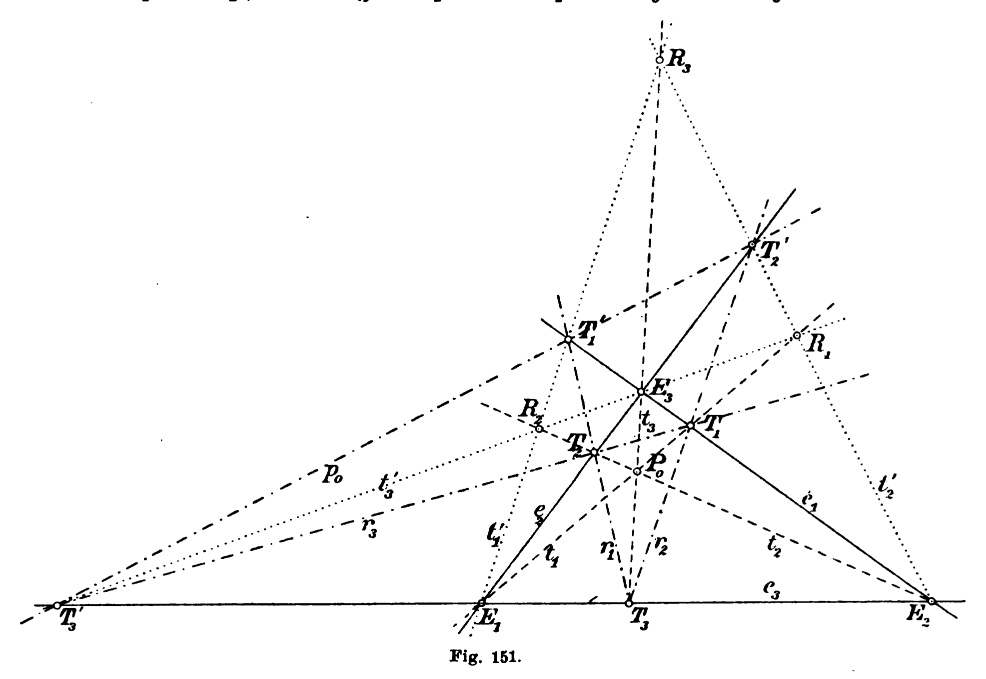


Fig. 151.

Man erhält daher bei Hinzunahme der dualen Betrachtung folgende[29])

Konstruktion der Harmonikale bei gegebenem Harmonikalpunkt. Ist P_0 gegeben, so schneidet man die Seiten e_1, e_2, e_3 mit den Transversalen t_1, t_2, t_3 durch P_0 in T_1, T_2, T_3 und schneidet ferner mit den Verbindungslinien $r_1 = T_2 T_3$, $r_2 = T_3 T_1$, $r_3 = T_1 T_2$ die Seiten e_1, e_2, e_3 in T_1', T_2', T_3'. Dann ist $p_0 = T_1' T_2' T_3'$ die Harmonikale. Zugleich sind $t_1' = E_1 T_1'$, $t_2' = E_2 T_2'$, $t_3' = E_3 T_3'$ die vierten harmonischen

Konstruktion des Harmonikalpunktes bei gegebener Harmonikale. Ist p_0 gegeben, so verbindet man die Ecken E_1, E_2, E_3 mit den Schnittpunkten T_1', T_2', T_3' auf p_0 durch t_1', t_2', t_3' und verbindet ferner die Schnittpunkte $R_1 = t_2' \times t_3'$, $R_2 = t_3' \times t_1'$, $R_3 = t_1' \times t_2'$ mit den Ecken E_1, E_2, E_3 durch t_1, t_2, t_3. Dann ist $P_0 = t_1 \times t_2 \times t_3$ der Harmonikalpunkt. Zugleich sind $T_1 = e_1 \times t_1$, $T_2 = e_2 \times t_2$, $T_3 =$

zu t_1, t_2, t_3 und den betreffenden Seitenpaaren. | $e_3 \times t_3$ die vierten harmonischen zu T_1', T_2', T_3' und den betreffenden Ecken.

Beide Konstruktionen sind in derselben Fig. 151 dargestellt.

§ 27. Das vollständige Viereck und Vierseit.

1. Begriff des vollständigen Vierecks oder Vierseits[87]).

Ein *vollständiges Viereck* ist durch *vier* beliebige *Punkte* 1, 2, 3, 4, seine *Ecken*, gegeben (Fig. 152a).

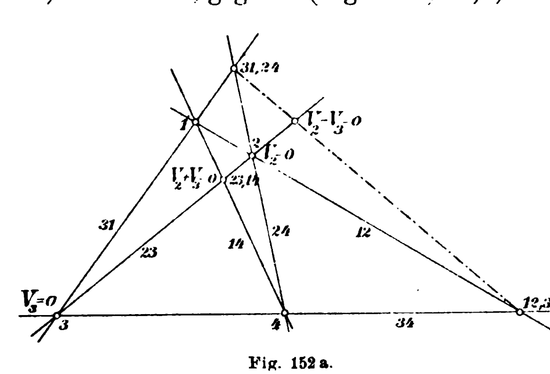


Fig. 152 a.

Es hat *sechs Seiten*, die Verbindungslinien:

23, 31, 12,
14 24, 34

je zweier der vier Ecken. Je zwei dieser sechs Seiten, die zusammen alle vier Ecken enthalten, heißen *Gegenseiten*.

Es hat *drei Nebenecken*, die Schnittpunkte:

23, 14; 31, 24; 12, 34

je zweier Gegenseiten.

Ein *vollständiges Vierseit* ist durch *vier* beliebige *Gerade* 1, 2, 3, 4, seine *Seiten*, gegeben (Fig. 152b).

Es hat *sechs Ecken*, die Schnittpunkte:

23, 31, 12,
14, 24, 34

je zweier der vier Seiten. Je zwei dieser sechs Ecken, die zusammen alle vier Seiten enthalten, heißen *Gegenecken*.

Es hat *drei Nebenseiten* (Diagonalen), die

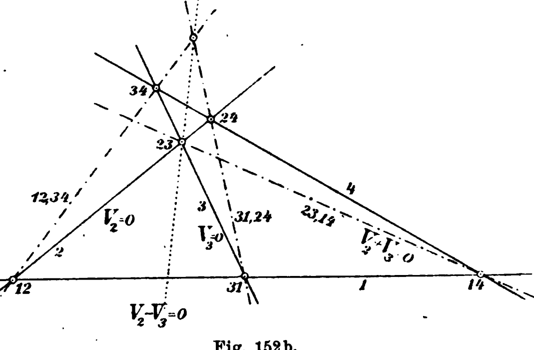


Fig. 152 b.

Verbindungslinien:

23, 14; 31, 24; 12, 34

je zweier Gegenecken.

2. Gleichungen der Ecken oder Seiten und ihre Normierung. Indem wir entweder:

$$U_i = a_i u + b_i u + c_i s \quad \text{oder} \quad U_i = a_i x + b_i y + c_i t,$$

$i = 1, 2, 3, 4$, setzen, denken wir uns die vier Ecken des Vierecks oder die vier Seiten des Vierseits durch die gleichbezeichneten Gleichungen:

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0, \quad U_4 = 0$$

gegeben. Sie sind nach § 24, **6** durch eine Identität von der Form:

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 + \lambda_4 U_4 = 0$$

verknüpft. Setzen wir daher:

$$\lambda_1 U_1 = V_1, \quad \lambda_2 U_2 = V_2, \quad \lambda_3 U_3 = V_3, \quad \lambda_4 U_4 = V_4,$$

so werden die Gleichungen der vier gegebenen Elemente:

$$(1) \qquad V_1 = 0, \quad V_2 = 0, \quad V_3 = 0, \quad V_4 = 0,$$

und besteht zwischen den linken Seiten dieser Gleichungen die Identität:

$$(2) \qquad V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 0.$$

Bei der doppelten Bedeutung der Gleichungen (1) als Gleichungen von Punkten und Geraden gestatten auch die an sie angeknüpften Betrachtungen eine doppelte Auslegung für Viereck und Vierseit mit Vertauschung der Worte Punkt und Gerade, Verbindungslinie und Schnittpunkt. Wir sprechen die Entwicklung nur für das Viereck aus, stellen aber die gefundenen Sätze für Viereck und Vierseit gegenüber.[29])

3. Die Gleichungen der drei Nebenecken oder Nebenseiten. Die beiden Gleichungen:

$$V_2 + V_3 = 0 \quad \text{und} \quad V_1 + V_4 = 0$$

stellen nach (2) denselben Punkt dar (vgl. § 24, (2')). Dieser Punkt liegt, wie nach § 24, (6') die eine Form der Gleichung zeigt, mit den Punkten 2 und 3 in (1) und, wie die andere Form zeigt, mit den Punkten 1 und 4 in einer Geraden. Die Gleichung stellt daher den Schnittpunkt der Geraden 23 und 14 dar. So gilt überhaupt:

Die Gleichungen der drei Nebenecken des Vierecks (Nebenseiten des Vierseits) sind, je in doppelter Form:

$$(3) \qquad \begin{cases} 23, 14: & V_2 + V_3 = 0, \quad V_1 + V_4 = 0, \\ 31, 24: & V_3 + V_1 = 0, \quad V_2 + V_4 = 0, \\ 12, 34: & V_1 + V_2 = 0, \quad V_3 + V_4 = 0. \end{cases}$$

4. Harmonische Punkte auf den Seiten des Vierecks (Strahlen an den Ecken des Vierseits). Auf jeder der sechs Seiten des Vierecks

liegen zwei Ecken und eine Nebenecke (Fig. 152a und zur dualen Betrachtung Fig. 152b), z. B. auf der Seite 2 3:

$$V_2 = 0, \quad V_3 = 0, \quad V_2 + V_3 = 0 \quad \text{oder} \quad V_1 + V_4 = 0.$$

Der vierte harmonische Punkt zu diesen drei Punkten ist nach § 20, (15):

$$V_2 - V_3 = 0. \tag{4}$$

Da nun nach (2) identisch:

$$(V_2 - V_3) + (V_3 + V_1) + (V_3 + V_4) = 0,$$

so liegt nach § 24, (6′) dieser vierte harmonische Punkt mit den Nebenecken 3 1, 2 4 und 1 2, 3 4 (vgl. § 27, (3)) in gerader Linie. So folgt allgemein:

I. *Auf jeder Seite des vollständigen Vierecks bilden die auf ihr liegenden Ecken, die auf ihr liegende Nebenecke und der Schnittpunkt mit der Verbindungslinie der beiden andern Nebenecken vier harmonische Punkte.*

I′. *In jeder Ecke des vollständigen Vierseits bilden die durch sie gehenden Seiten, die durch sie gehende Nebenseite und die Verbindungslinie mit dem Schnittpunkte der beiden andern Nebenseiten vier harmonische Strahlen.*

5. Konstruktion des vierten harmonischen Elementes zu drei gegebenen.[88]) Aus diesen Sätzen ergeben sich folgende linearen (allein mit dem Lineal auszuführenden) Konstruktionen des vierten harmonischen Elementes, wenn drei Elemente gegeben sind:

Auf einer Geraden sind drei Punkte *I*, *II*, *III* gegeben (Fig. 153a). Wir nehmen einen beliebigen Punkt 1 und auf der Verbindungslinie 1 *III* einen beliebigen Punkt 4 an.

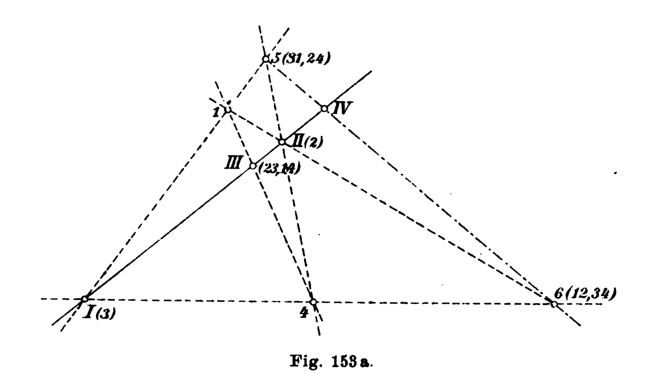


Fig. 153a.

An einem Punkte sind drei Strahlen *I*, *II*, *III* gegeben (Fig. 153b). Wir nehmen eine beliebige Gerade 1 und an dem Schnittpunkt $1 \times III$ einen beliebigen

Der Schnittpunkt der Verbindungslinien $I\,1$ und $II\,4$ sei 5, der der Verbindungslinien $I\,4$ und $II\,1$ sei 6. Der Schnittpunkt der Verbindungslinie 5 6 mit der gegebenen Geraden ist der gesuchte Punkt IV.

Strahl 4 an. Die Verbindungslinie der Schnittpunkte $I \times 1$ und $II \times 4$ sei 5, die der Schnittpunkte $I \times 4$ und $II \times 1$ sei 6. Die Verbindungslinie des Schnittpunktes 5×6 mit dem gegebenen Punkt ist der gesuchte Strahl IV.

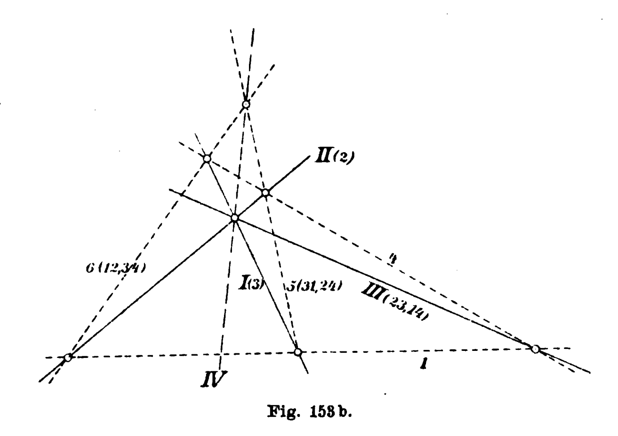


Fig. 153 b.

In der Tat bilden die Punkte $1, II, I, 4$ der Konstruktion links ein vollständiges Viereck, und die Punkte $I, II; III, IV$ sind nach § 27, 4, I harmonische. Die in Fig. 153a und 153b in Klammern beigefügten Bezeichnungen weisen auf Fig. 152a und 152b zurück.

6. Harmonische Punkte auf der Verbindungslinie zweier Nebenecken (Strahlen am Schnittpunkt zweier Nebenseiten). Wir gehen noch einmal auf den durch Gleichung (4) dargestellten Punkt zurück, in dem die Seite 2 3 von der Verbindungslinie der beiden Nebenecken 3 1, 2 4 und 1 2, 3 4 geschnitten wird (Fig. 154a und zur dualen Betrachtung Fig. 154b).

Dazu nehmen wir den Punkt:

$$(5) \qquad V_1 - V_4 = 0 \quad \text{oder} \quad (V_1 + V_2) - (V_2 + V_4) = 0,$$

der, wie seine beiden Darstellungen zeigen (vgl. § 24, (6')), sowohl mit den Punkten 1 und 4 als mit den Punkten 1 2, 3 4 und 3 1, 2 4 (vgl. § 27, (3)) in einer Geraden liegt, also der Schnittpunkt der Seite 1 4 mit der Verbindungslinie der beiden Nebenecken 3 1, 2 4 und 1 2, 3 4 ist. Nun können diese beiden Nebenecken mit Rücksicht auf (3) und (2) in der Form dargestellt werden:

$$2(V_2+V_4)=(V_2+V_4)-(V_3+V_1)=(V_2-V_3)-(V_1-V_4)=0,$$
$$2(V_1+V_2)=(V_1+V_2)-(V_3+V_4)=(V_2-V_3)+(V_1-V_4)=0.$$

Sie sind also nach § 20, (15) zu den durch die Gleichungen (4) und (5) dargestellten Punkten harmonisch. Also allgemein:

II. *Auf der Verbindungslinie zweier Nebenecken des vollständigen Vierecks sind diese selbst zu den Schnittpunkten mit den beiden durch die dritte Nebenecke gehenden Seiten harmonisch.*

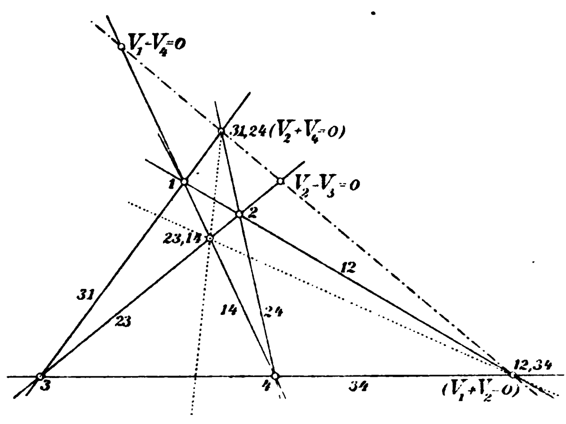


Fig. 154a.

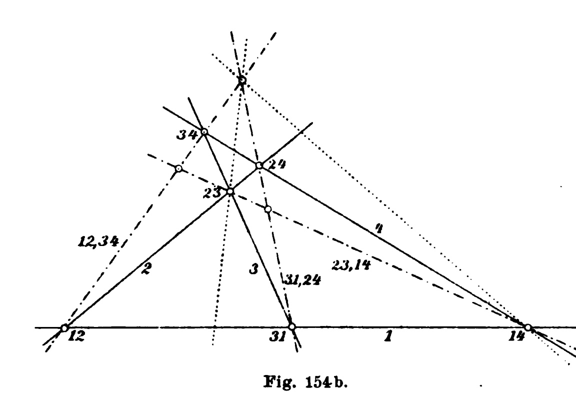


Fig. 154b.

II′. *An dem Schnittpunkte zweier Nebenseiten des vollständigen Vierseits sind diese selbst zu den Verbindungslinien mit den beiden auf der dritten Nebenseite liegenden Ecken harmonisch.*

7. Perspektive Übertragung der Sätze II und II′.

Die vier harmonischen Punkte auf der Verbindungslinie der beiden Nebenecken 3 1, 2 4 und 1 2, 3 4 (Fig. 154a) geben, mit der Nebenecke 2 3, 1 4 verbunden, nach § 5,6 vier harmonische Strahlen, also:

III. *Im vollständigen Viereck sind in jeder Nebenecke die durch sie gehenden Seiten und die Ver-*

Die vier harmonischen Strahlen an dem Schnittpunkte der beiden Nebenseiten 3 1, 2 4 und 1 2, 3 4 (Fig. 154b) geben, mit der Nebenseite 2 3, 1 4 geschnitten, nach § 5,6 vier harmonische Punkte, also:

III′. *Im vollständigen Vierseit sind auf jeder Nebenseite die auf ihr liegenden Ecken und die Schnitt-*

bindungslinien mit den beiden andern Nebenecken harmonisch.

punkte mit den beiden andern Nebenseiten harmonisch.

8. Spezialfall der Parallelogramme.

Faßt man ein Parallelogramm als vollständiges *Viereck* auf (Fig. 155a in übereinstimmender Bezeichnung mit Fig. 154a), so sind zwei Nebenecken 3 1, 1 4 und 1 2, 3 4 unendlich fern und § 27, 7, III lautet:

Die beiden Seiten 2 3 *und* 1 4 *(Diagonalen im gewöhnlichen Sinne) und die durch ihren Schnittpunkt zu den andern Seiten gezogenen Parallelen bilden vier harmonische Strahlen.*

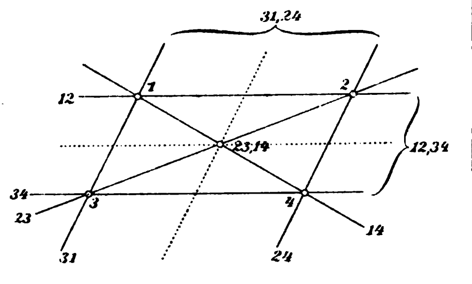


Fig. 155 a.

Faßt man ein Parallelogramm als vollständiges *Vierseit* auf (Fig. 155b in übereinstimmender Bezeichnung mit Fig. 154b), so ist eine Nebenseite 2 3, 1 4 die unendlich ferne Gerade und § 27, 7, III′ lautet:

Jede der beiden endlichen Nebenseiten 3 1, 2 4 *und* 1 2, 3 4 *(Diagonalen im gewöhnlichen Sinne) wird von der andern halbiert* (§ 3, 10, II).

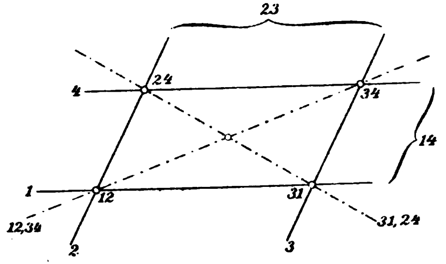


Fig. 155 b.

9. Spezialfall beim Dreieck. Bei einem vollständigen *Vierseit* seien (Fig. 156 in übereinstimmender Bezeichung mit Fig. 154b) die beiden Nebenseiten 3 1, 2 4 und 1 2, 3 4 parallel. Wendet man dann § 27, 7, III′ in der Buchstabenbezeichnung der Fig. 156 auf jede der drei Nebenseiten 3 1, 2 4; 1 2, 3 4 und 2 3, 1 4 an, so erhält man den Satz:

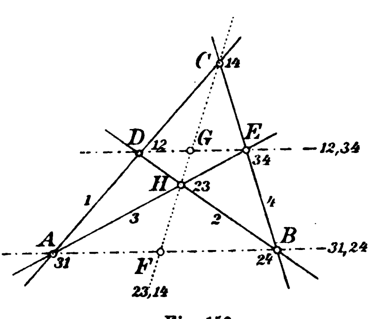


Fig. 156.

In einem Dreieck ABC sei DE irgend eine Parallele zur Seite AB, und sei CGF die Verbindungslinie der Ecke C mit dem Schnittpunkt H der Diagonalen des Vierecks $ABDE$. Dann sind F und G die Mittelpunkte der Strecken AB und DE, und sind die Punkte F, G zu H, C harmonisch.

VI. Kapitel.
Die Dreieckskoordinaten.

§ 28. Die Dreieckskoordinaten des Punktes und der Geraden.

1. Analytische Definition der Dreieckskoordinaten des Punktes. Beim Übergang von einem rechtwinkligen Koordinatensystem Oxy zu einem beliebigen schiefwinkligen $\Omega\xi\eta$ (Fig. 157), dem allgemeinsten bisher betrachteten System, werden bei homogener (§ 22, (1) auch auf schiefwinklige Koordinaten angewendet) Schreibweise der Formeln § 14, (14) die neuen Koordinaten ξ, η, τ eines Punktes P proportional linearen homogenen Funktionen der alten x, y, t, nämlich mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ:

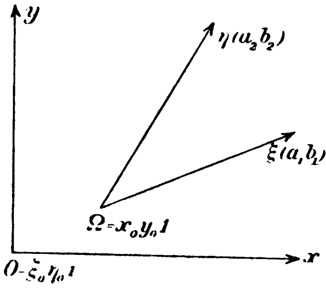


Fig. 157.

$$\begin{aligned}\varrho\xi &= A_1 x + B_1 y + D\xi_0 t,\\ \varrho\eta &= A_2 x + B_2 y + D\eta_0 t,\\ \varrho\tau &= \qquad\qquad\quad\; Dt.\end{aligned}$$

Diese Funktionen geben, gleich Null gesetzt, die Gleichungen der drei Seiten des neuen Koordinatendreiecks (vgl. § 23, **3**) in bezug auf das alte. Die zwei ersten Seiten $\xi = 0$, $\eta = 0$ sind beliebige Gerade, die dritte $\tau = 0$ aber ist die unendlich ferne Gerade.

Indem wir dieses Bildungsgesetz weiter verfolgen, erhalten wir statt der homogenen schiefwinkligen *allgemeinere homogene Koordinaten*, die wir schlechthin *Dreieckskoordinaten*[89]) nennen und, wie folgt, zunächst im Anschluß an ein rechtwinkliges Koordinatensystem Oxy definieren:

Unter Dreieckskoordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punktes P verstehen wir drei Größen, die proportional sind drei beliebig gegebenen homogenen linearen Funktionen seiner homogenen gemeinen Koordinaten x, y, t, also:

$$(1)\qquad \begin{cases}\varrho x_1 = X_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 t,\\ \varrho x_2 = X_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 t,\\ \varrho x_3 = X_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 t,\end{cases}$$

wo ϱ einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet, und X_1, X_2, X_3 als Abkürzungen für die linearen Funktionen wie in § 16, (12) gebraucht sind (vgl. § 7, (13)).

Das von den drei Geraden:

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0 \tag{2}$$

gebildete Dreieck (vgl. Fig. 158) nennen wir das *Koordinatendreieck* des neuen Koordinatensystems, wobei wir voraussetzen (vgl. § 24, 5), daß die Determinante:

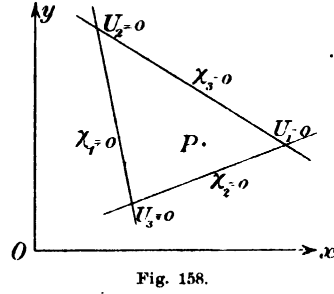


Fig. 158.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{3}$$

nicht verschwinde.

2. Analytische Berechtigung der Dreieckskoordinaten des Punktes. Bezeichnen wir die Unterdeterminanten der Determinante D wie in § 24, 5 mit A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; A_3, B_3, C_3, so folgt durch Auflösung (Anm. 2, II, 2) der drei Gleichungen (1) mit dem Proportionalitätsfaktor σ:

$$\begin{cases} \sigma x = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3, \\ \sigma y = B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3, \\ \sigma t = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3. \end{cases} \tag{4}$$

Die Verhältnisse $x:y:t$ und die Verhältnisse $x_1:x_2:x_3$ bestimmen sich nach (1) und (4) wechselseitig eindeutig. Wie jene (vgl. § 10, **3**; § 22, **1**) stehen also auch diese in wechselseitig eindeutiger Beziehung zu dem Punkte P.

Zu jedem gegebenen Punkte P gehören drei ihren Verhältnissen nach bestimmte Dreieckskoordinaten x_1, x_2, x_3 und zu drei ihren Verhältnissen nach gegebenen Dreieckskoordinaten x_1, x_2, x_3 gehört ein bestimmter Punkt P.

3. Abhängigkeit der Dreieckskoordinaten der Linie von denen des Punktes. Durch Multiplikation der Gleichungen (4) mit den auf das rechtwinklige System Oxy bezüglichen homogenen Koordinaten u, v, s einer Geraden (vgl. § 22, **1**) und nachfolgender Addition ergibt sich:

$$\sigma(ux + vy + st)$$
$$= (A_1 u + B_1 v + C_1 s)x_1 + (A_2 u + B_2 v + C_2 s)x_2 + (A_3 u + B_3 v + C_3 s)x_3$$

oder:

$$ux + vy + st = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3, \tag{5}$$

falls wir die Koeffizienten u_1, u_2, u_3 definieren durch:

$$(6)\qquad \begin{cases} \sigma u_1 = U_1 = A_1 u + B_1 v + C_1 s, \\ \sigma u_2 = U_2 = A_2 u + B_2 v + C_2 s, \\ \sigma u_3 = U_3 = A_3 u + B_3 v + C_3 s. \end{cases}$$

Infolge von (5) erhält nun die *Gleichung der Geraden* u, v, s, die in laufenden Punktkoordinaten x, y, t lautet (§ 22, (4)):

$$(7)\qquad ux + vy + st = 0,$$

in laufenden Dreieckskoordinaten x_1, x_2, x_3 *des Punktes die Form:*

$$(8)\qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

Die in (6) *eingeführten Koeffizienten nehmen wir als Dreieckskoordinaten der Geraden.*

Unter den Dreieckskoordinaten u_1, u_2, u_3 *einer Geraden* p *verstehen wir also drei Größen, die proportional sind drei homogenen linearen Funktionen der homogenen rechtwinkligen Koordinaten* u, v, s *der Geraden.*

Diese drei Funktionen sind, da ihre Koeffizienten die Unterdeterminante der Determinante (3) sind, durch die gegebenen Formeln (1) schon mitbestimmt. Gleich Null gesetzt, geben sie nach § 24, **5** in:

$$(9)\qquad U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0$$

die *Gleichungen der Ecken des Koordinatendreiecks* (Fig. 158).

4. Analytische Berechtigung der Dreieckskoordinaten der Geraden. Durch Auflösen der Gleichungen (6) folgt (vgl. § 24, (12)) mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ:

$$(10)\qquad \begin{cases} \varrho u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3, \\ \varrho v = b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3, \\ \varrho s = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3. \end{cases}$$

Daher gilt, wie in § 28, **2**:

Zu jeder gegebenen Geraden p *gehören drei ihren Verhältnissen nach bestimmte Dreieckskoordinaten* u_1, u_2, u_3, *und zu drei ihren Verhältnissen nach gegebenen Dreieckskoordinaten* u_1, u_2, u_3 *gehört eine bestimmte Gerade* p.

5. Gegenseitige Abhängigkeit der Dreieckskoordinaten des Punktes und der Geraden. Die Definition (1) enthält, da sie wegen des unbestimmten ϱ nur von den Verhältnissen der neun Koeffizienten $a_1, b_1, \ldots, c_3$ abhängt, *acht Konstanten.* Die neun Koeffizienten $A_1, B_1, \ldots, C_3$ sind aber als Unterdeterminanten von D durch die

Koeffizienten $a_1, b_1, \ldots, c_3$ mitbestimmt. Umgekehrt sind aber nach § 24, **5** auch diese ihren Verhältnissen nach durch jene bestimmt.

Man kann daher ebensogut die neun Koeffizienten von (6), *wie die neun Koeffizienten von* (1) *als die ursprünglich gegebenen betrachten.*

In dieser Auffassung folgt durch Multiplikation der Gleichungen (10) mit x, y, t und Addition mit Hinblick auf (1) wiederum die Gleichung (5), und damit (vgl. § 22, (4′)) dual entsprechend wie in § 28, **3**, daß *die Dreieckskoordinaten* x_1, x_2, x_3 *eines Punktes zugleich die Koeffizienten seiner Gleichung:*

$$(11) \qquad x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0$$

in laufenden Linienkoordinaten sind.

Die Dreieckskoordinaten des Punktes und der Linie stehen also wechselseitig in solcher Abhängigkeit voneinander, *daß die Bedingung der vereinigten Lage von Punkt und Gerader in ihnen dieselbe lineare Form* (8) *und* (11) *behält, wie nach* (7) *in homogenen rechtwinkligen Koordinaten* (§ 22, (5)).

6. Koordinatendreieck und Multiplikatoren des neuen Koordinatensystems. Ist das neue Koordinatensystem der x_1, x_2, x_3 und u_1, u_2, u_3 *durch die drei Funktionen* X_1, X_2, X_3 in (1) mit ihren acht Konstantenverhältnissen *gegeben*, so ist *das Koordinatendreieck* mit seinen Seiten (2) und seinen Ecken (9) vollkommen bestimmt.

Ist dagegen *das Koordinatendreieck gegeben*, so bestimmt es nur die drei *Gleichungen* (2) und damit sechs Konstanten, die Verhältnisse $a_1 : b_1 : c_1$, $a_2 : b_2 : c_2$, $a_3 : b_3 : c_3$, läßt aber jede der drei *Funktionen* X_1, X_2, X_3 noch um einen Faktor unbestimmt (§ 16, 5).

Will man bei fest angenommenen Koeffizienten $a_1, b_1, \ldots, c_3$ alle zu demselben Koordinatendreieck (2) gehörigen Systeme von Dreieckskoordinaten umfassen, kann man die Definition (1) ersetzen durch:

$$(12) \qquad \varrho x_1 = m_1 X_1, \quad \varrho x_2 = m_2 X_2, \quad \varrho x_3 = m_3 X_3,$$

wo m_1, m_2, m_3 drei *„Multiplikatoren“* sind, die ihren Verhältnissen nach *zwei* völlig verfügbare *Konstanten* darstellen. Die Definition (12) ist *nicht allgemeiner* als (1); enthält sie doch wie diese die Verhältnisse von neun Konstanten, nämlich $m_i a_i, m_i b_i, m_i c_i$, $i = 1, 2, 3$; aber es ist in der Form (12) der bei *festgehaltenem Koordinatendreieck* noch *veränderliche* Bestandteil des Koordinatensystems in Gestalt der Multiplikatoren m_i ausdrücklich kenntlich gemacht.

Neben (12) hat man alsdann an Stelle von (6):

$$(13) \qquad \sigma u_1 = M_1 U_1, \quad \sigma u_2 = M_2 U_2, \quad \sigma u_3 = M_3 U_3,$$

wo die Multiplikatoren M_1, M_2, M_3 von den Multiplikatoren m_1, m_2, m_3 abhängig sind. Da nämlich die früheren, in (1) und (6) definierten Koordinaten x_i und u_i durch die jetzigen, in (12) und (13) definierten ausgedrückt, gleich $x_i : m_i$ und $u_i : M_i$ werden, so würde die Bedingung (11) der vereinigten Lage jetzt lauten:

$$\frac{u_1}{M_1}\frac{x_1}{m_1} + \frac{u_2}{M_2}\frac{x_2}{m_2} + \frac{u_3}{M_3}\frac{x_3}{m_3} = 0.$$

Soll diese also auch in den neuen Koordinaten x_i, u_i die Form (11) behalten, so muß sein:

$$M_1 m_1 = M_2 m_2 = M_3 m_3 .$$

Ersetzt man die Definition (1) *und* (6) *durch* (12) *und* (13), *indem man bei gleichbleibendem Koordinatendreieck die Multiplikatoren des Koordinatensystems ändert, so muß zwischen den Multiplikatoren* M_i *in* (13) *und* m_i *in* (12) *die Beziehung bestehen:*

$$(14) \qquad M_1 : M_2 : M_3 = \frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2} : \frac{1}{m_3} .$$

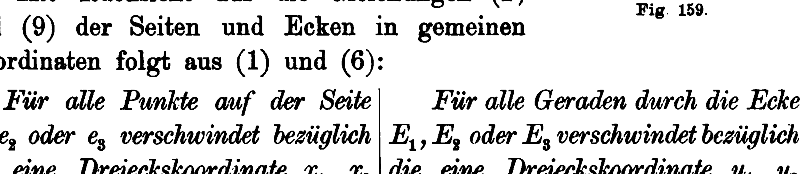
Sie folgt auch daraus, daß die Koeffizienten $M_1 A_1, \ldots, M_3 C_3$ in (13) die Unterdeterminanten 2ten Grades der Determinante der Koeffizienten $m_1 a_1, \ldots, m_3 c_3$ in (12) sind, gerade so wie die Koeffizienten in (6) von denen in (1) abhängen.

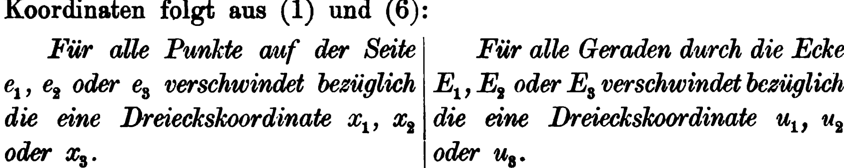
7. Die Bestandteile des Koordinatendreiecks. Wir bezeichnen die Ecken (9) des Koordinatendreiecks mit E_1, E_2, E_3 und die Seiten (2) mit e_1, e_2, e_3.

Der Ecke E_i *liegt die Seite* e_i $(i = 1, 2, 3)$ *gegenüber* (Fig. 159).

Fig. 159.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (2) und (9) der Seiten und Ecken in gemeinen Koordinaten folgt aus (1) und (6):





Für alle Punkte auf der Seite e_1, e_2 *oder* e_3 *verschwindet bezüglich die eine Dreieckskoordinate* x_1, x_2 *oder* x_3.

Für alle Geraden durch die Ecke E_1, E_2 *oder* E_3 *verschwindet bezüglich die eine Dreieckskoordinate* u_1, u_2 *oder* u_3.

Für die Ecke E_1 verschwinden x_2 und x_3, und kann mit Rücksicht auf die Willkür des Faktors ϱ kurz $x_1 = 1$ gesetzt werden, so daß allgemein folgt (vgl. § 8, (4)):

Die Dreieckskoordinaten der drei Ecken des Koordinatendreiecks sind:

Die Dreieckskoordinaten der drei Seiten des Koordinatendreiecks sind:

(15)

	x_1	x_2	x_3
E_1	1	0	0
E_2	0	1	0
E_3	0	0	1

(15')

	u_1	u_2	u_3
e_1	1	0	0
e_2	0	1	0
e_3	0	0	1

8. Die Dreieckskoordinaten als multiplizierte Abstände. Um die bisher analytisch eingeführten und erklärten Dreieckskoordinaten geometrisch zu deuten, setzen wir zur Abkürzung:

$$(16)\qquad \varkappa_i = \varepsilon_i \sqrt{a_i^2 + b_i^2}, \quad \varepsilon_i = -\operatorname{sign} c_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Der senkrechte Abstand p_i eines Punktes $P = x, y, t$ (für den wir hier der Kürze wegen $t = 1$ gelten lassen, vgl. § 22, **1**) von der Ebene $X_i = 0$ ist dann nach § 17, (7):

$$(17)\qquad p_i = \frac{X_i}{\varkappa_i},$$

und der senkrechte Abstand q_i einer Geraden $p = u, v, s$ (für die wir hier $s = 1$ nehmen) von der Ecke $U_i = 0$ ist nach § 19, (15):

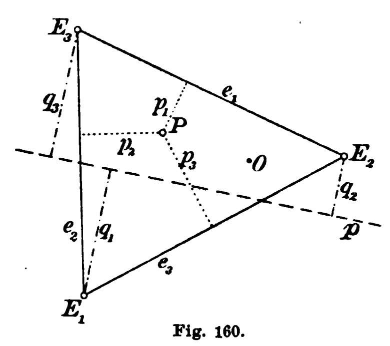


Fig. 160.

$$(17')\qquad q_i = \frac{U_i}{-C_i\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Die Abstände sind, was ihr Vorzeichen betrifft, im Sinne von § 17, **3** nach der Lage des Koordinatenanfangspunktes O zu bestimmen.

Die Definitionen (1) und (6) können hiernach folgendermaßen gedeutet werden (Fig. 160):

Die Dreieckskoordinaten eines Punktes P verhalten sich wie die mit den Konstanten $\varkappa_i$ multiplizierten Abstände p_i des Punktes von den Seiten des Koordinatendreiecks:

$$(18)\qquad x_1 : x_2 : x_3 = \varkappa_1 p_1 : \varkappa_2 p_2 : \varkappa_3 p_3.$$

Die Dreieckskoordinaten einer Geraden p verhalten sich wie die mit den Konstanten C_i multiplizierten Abstände q_i der Geraden von den Ecken des Koordinatendreiecks:

$$(18')\qquad u_1 : u_2 : u_3 = C_1 q_1 : C_2 q_2 : C_3 q_3.$$

Die Verhältnisse der drei Größen $\varkappa_i$, welche die Stelle der in § 28, **6** betrachteten *Multiplikatoren* vertreten, können *bei gegebenem Koordinatendreieck* mit Rücksicht auf § 28, **6** noch ganz beliebig gewählt werden. Setzt man z. B. $\varkappa_i = 1 : \sin\alpha_i$, so ist $x_i = \varkappa_i p_i$ (Fig. 161) der unter dem Winkel α_i gegen die Seite $X_i = 0$ gemessene Abstand des Punktes P von dieser.

9. Übergang von Dreieckskoordinaten zu schiefwinkligen Koordinaten. Nehmen wir ein Dreieck, dessen Seite e_3 von der Ecke E_3 einen sehr großen Abstand p_0 hat, und dessen Innenwinkel bei E_3 gleich ϑ sei (Fig. 162). Liegt O im Innern des Dreiecks, so sind p_0 und für einen innern Punkt P auch p_1, p_2, p_3 negativ. Setzen wir nun in (18):

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 = -\frac{1}{\sin\vartheta}, \quad \varkappa_3 = \frac{1}{p_0},$$

so erhalten wir:

$$x_1 : x_2 : x_3 = -\frac{p_1}{\sin\vartheta} : -\frac{p_2}{\sin\vartheta} : \frac{p_3}{p_0}.$$

Wir lassen nun die Seite e_3 zur unendlich fernen Geraden werden und bezeichnen den Punkt E_3 mit Ω und die von E_3 nach E_1 und

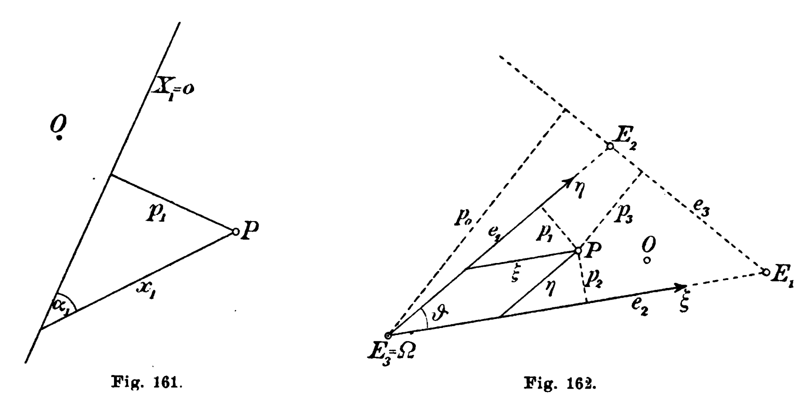


Fig. 161. Fig. 162.

E_2 laufenden Seiten e_2 und e_1 mit ξ und η. Dann hat für jeden endlichen Punkt P das Verhältnis $p_3 : p_0$ den Grenzwert 1, während $-p_1 : \sin\vartheta$, $-p_2 \sin\vartheta$ die schiefwinkligen Koordinaten ξ, η des Punktes P in bezug auf das Achsensystem $\Omega\xi\eta$ werden (§ 10, 6). Es wird somit:

$$(19) \qquad x_1 : x_2 : x_3 = \xi : \eta : 1,$$

so daß die in (18) definierten Dreieckskoordinaten in die gemeinen schiefwinkligen Koordinaten übergehen.

10. Einführung von Einheitspunkt und Einheitslinie. Eine andre geometrische Deutung der Multiplikatoren, wie die in § 28, 8, gewinnt man, indem man neben dem Koordinatendreieck einen Einheitspunkt $E_0 = x_0, y_0, t_0$, bezüglich eine Einheitslinie $e_0 = u_0, v_0, s_0$ als gegeben annimmt (Fig. 163).

Legt man dabei die zweite Definition (12), (13) der Dreieckskoordinaten zugrunde und nimmt:

$$(20) \qquad m_i = \frac{1}{X_i^0}, \quad M_i = \frac{1}{U_i^0},$$

wo X_i^0 und U_i^0 durch Substitution der Koordinaten von E_0 und e_0 in X_i und U_i entstehen, so *stellen sich die Dreieckskoordinaten durch die rechtwinkligen in der Form dar:*

$$(21) \qquad \varrho x_i = \frac{X_i}{X_i^0}, \quad \sigma u_i = \frac{U_i}{U_i^0}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Der Punkt E_0 und die Gerade e_0 selbst erhalten hiernach die Dreieckskoordinaten:

$$(22) \qquad x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 1 : 1, \qquad u_1 : u_2 : u_3 = 1 : 1 : 1,$$

worin auch die Erklärung der *Namen* Einheitspunkt und Einheitslinie liegt (vgl. § 7, (12)).

Da aber nach § 28, 6 die Multiplikatoren m_i und M_i der Beziehung (14) genügen müssen, so wird nach (20):

$$(23) \qquad U_1^0 : U_2^0 : U_3^0 = \frac{1}{X_1^0} : \frac{1}{X_2^0} : \frac{1}{X_3^0}$$

und folgt mit Hinblick auf § 26, (9), wo nach § 25, (1) und (1′) X_i, U_i dieselbe Bedeutung haben, wie hier in (1) und (6):

Einheitspunkt und Einheitsebene müssen als Harmonikalpunkt und Harmonikale in bezug auf das Koordinatendreieck zusammengehören.

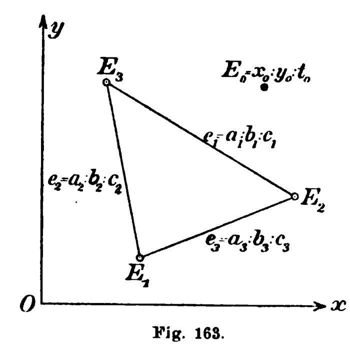


Fig. 163.

Im Gegensatz zu den Gleichungen (1), die von den acht Verhältnissen der neun Konstanten a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$ abhängen, enthalten die Gleichungen (21) nur die sechs Verhältnisse $a_i : b_i : c_i$ (die Koordinaten der drei Geraden (2)), daneben aber die zwei Verhältnisse $x_0 : y_0 : t_0$ (die Koordinaten des Punktes E_0, vgl. § 7, (17)), zusammen wieder acht Konstanten (Fig. 163):

Das Koordinatensystem der Dreieckskoordinaten ist daher vollkommen bestimmt, wenn das Koordinatendreieck und der Einheitspunkt gegeben ist.

11. Beziehung zwischen Harmonikalpunkt und Harmonikale in Dreieckskoordinaten. Schreibt man die nach § 26, (9) zwischen Harmonikalpunkt x_0, y_0, t_0 und Harmonikale u_0, v_0, s_0 allgemein bestehende Gleichung (23) selbst in den Dreieckskoordinaten (1) und (6), so folgt unter Weglassung des Index 0:

Zwischen den Dreieckskoordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punktes und

den Dreieckskoordinaten u_1, u_2, u_3 *seiner Harmonikale in bezug auf das Koordinatendreieck bestehen die Gleichungen*[90]*):*

$$(24)\quad \begin{cases} x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{u_1} : \frac{1}{u_2} : \frac{1}{u_3} \quad \text{oder} \quad u_1 : u_2 : u_3 = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3} \\ \text{oder} \qquad u_1 x_1 = u_2 x_2 = u_3 x_3 . \end{cases}$$

Dem Einheitspunkte $x_1, x_2, x_3 = 1, 1, 1$ entspricht insbesondere die Einheitsgerade $u_1, u_2, u_3 = 1, 1, 1$.

Die Beziehungen (24) *bleiben wie die Gleichung* (11) *ungeändert, wenn man unter der Voraussetzung* (14) x_1, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3 *durch* $m_1 x_1, m_2 x_2, m_3 x_3$; $M_1 u_1, M_2 u_2, M_3 u_3$ *ersetzt, gelten also für alle bei wechselndem Einheitspunkt zu demselben Koordinatendreieck gehörigen Dreieckskoordinaten.*

12. Die Dreieckskoordinaten als Abstandsverhältnisse. Die Gleichungen (21) können mit Rücksicht auf (17); (17′) auch geschrieben werden:

$$(25)\quad \varrho x_i = \frac{p_i}{p_i^0}, \qquad\qquad (25')\quad \sigma u_i = \frac{q_i}{q_i^0},$$

wo p_i^0 die Abstände des Einheitspunktes von den Seiten (Fig. 164a) und q_i^0 die Abstände der Einheitsgeraden (Fig. 164b) von den Ecken

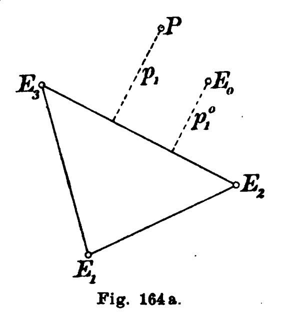


Fig. 164a.

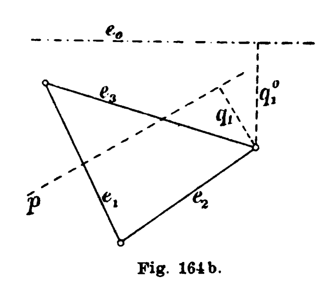


Fig. 164b.

(der Faktor $\sqrt{u_0^2 + v_0^2} : \sqrt{u^2 + v^2}$ geht in σ ein) des Koordinatendreiecks bedeuten. Es ist auch hier, wie in § 28, 8, $t_0 = 1$ und $s_0 = 1$ genommen.

Die Dreieckskoordinaten eines Punktes P verhalten sich wie die Abstände p_i *des Punktes von den Seiten des Koordinatendreiecks, dividiert durch die entsprechenden Abstände* p_i^0 *des Einheitspunktes von diesen:*

$$(26)\quad x_1 : x_2 : x_3 = \frac{p_1}{p_1^0} : \frac{p_2}{p_2^0} : \frac{p_3}{p_3^0} .$$

Die Dreieckskoordinaten einer Geraden p verhalten sich wie die Abstände q_i *der Geraden von den Ecken des Koordinatendreiecks, dividiert durch die entsprechenden Abstände* q_i^0 *der Einheitsgeraden von diesen:*

$$(26')\quad u_1 : u_2 : u_3 = \frac{q_1}{q_1^0} : \frac{q_2}{q_2^0} : \frac{q_3}{q_3^0} .$$

Diese Auffassung der Dreieckskoordinaten ist *von dem Koordinatensystem Oxy nunmehr unabhängig* geworden. Die Verhältnisse $p_i : p_i^0$ sind in der Tat ohne Rücksicht auf die Lage von O, auf die in § 28, 8 noch Bezug genommen wurde, positiv oder negativ, je nachdem P und E_0 auf gleicher oder auf verschiedenen Seiten der Geraden $X_i = 0$ liegen. Die Abstände p_i und p_i^0 brauchen auch nicht mehr senkrecht, sondern nur einander parallel zu sein. Entsprechendes gilt für $q_i : q_i^0$.

13. Die Dreieckskoordinaten als multiplizierte Teilungsverhältnisse.

Legt man durch die Ecke E_1 des Koordinatendreiecks, in der sich die Seiten e_2 und e_3 schneiden (Fig. 165a), eine Transversale t_1,

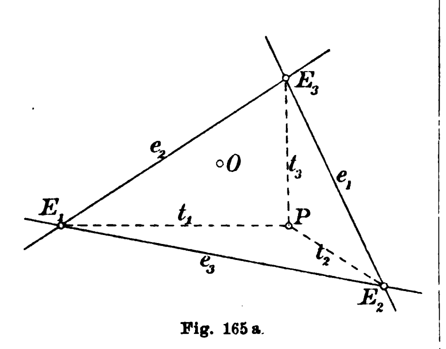


Fig. 165 a.

die den Winkel der beiden Seiten in dem multiplizierten Sinusverhältnis:

(27) $\mu_1 = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_3}\lambda_1 = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_3} \cdot \frac{\sin e_2 t_1}{\sin e_3 t_1}$

teilt (vgl. (16)), so ist die Gleichung dieser Transversale in laufenden Koordinaten x, y, t nach § 18, (14):

(28) $X_2 - \mu_1 X_3 = 0.$

Geht nun die Transversale t_1 durch einen gegebenen Punkt $P = x, y, t$, so ist durch diesen das Teilungsverhältnis bestimmt, und zwar:

(29) $\mu_1 = \frac{X_2}{X_3}$,

Nimmt man auf der Seite e_1, auf der die Ecken E_2 und E_3 liegen (Fig. 165b), einen Teilpunkt

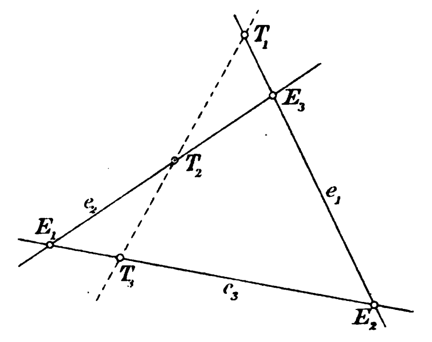


Fig. 165 b.

T_1, der die Länge der Seite in dem multiplizierten Streckenverhältnis (vgl. § 6, (7)):

(27′) $\mu_1 = \frac{C_2}{C_3}\lambda_1 = \frac{C_2}{C_3} \cdot \frac{E_2 T_1}{E_3 T_1}$

teilt, so ist die Gleichung dieses Punktes in laufenden Koordinaten u, v, s nach § 20, (3):

(28′) $U_2 - \mu_1 U_3 = 0.$

Liegt nun der Punkt T_1 auf einer gegebenen Geraden $p = u, v, s$, so ist durch diese das Teilungsverhältnis bestimmt, und zwar:

(29′) $\mu_1 = \frac{U_2}{U_3}$,

wo nunmehr in X_2 und X_3 unter x, y, t nicht, wie in (28), die laufenden, sondern die Koordinaten des gegebenen Punktes P verstanden werden (§ 18, (19)).

Dann folgt aber aus (29) mit Rücksicht auf (1):

$$\mu_1 = \frac{x_2}{x_3}. \tag{30}$$

Die Verhältnisse der Dreieckskoordinaten des Punktes P sind die multiplizierten Sinusverhältnisse, nach denen die Verbindungslinien t_1, t_2, t_3 des Punktes P mit den Ecken E_1, E_2, E_3 des Koordinatendreiecks die bezüglichen Winkel teilen (Fig. 165a), *also:*

$$\begin{cases} \dfrac{x_2}{x_3} = \dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_3} \cdot \dfrac{\sin e_2 t_1}{\sin e_3 t_1}, \\[2ex] \dfrac{x_3}{x_1} = \dfrac{\varkappa_3}{\varkappa_1} \cdot \dfrac{\sin e_3 t_2}{\sin e_1 t_2}, \\[2ex] \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{\varkappa_1}{\varkappa_2} \cdot \dfrac{\sin e_1 t_3}{\sin e_2 t_3}. \end{cases} \tag{31}$$

wo nunmehr in U_2 und U_3 unter u, v, s nicht, wie in (28′), die laufenden, sondern die Koordinaten der gegebenen Geraden p verstanden werden (§ 20, (8)).

Dann folgt aber aus (29′) mit Rücksicht auf (6):

$$\mu_1 = \frac{u_2}{u_3}. \tag{30′}$$

Die Verhältnisse der Dreieckskoordinaten der Geraden p sind die multiplizierten Streckenverhältnisse, nach denen die Schnittpunkte T_1, T_2, T_3 der Geraden mit den Seiten e_1, e_2, e_3 des Koordinatendreiecks die bezüglichen Seiten teilen (Fig. 165b), *also:*

$$\begin{cases} \dfrac{u_2}{u_3} = \dfrac{C_2}{C_3} \cdot \dfrac{E_2 T_1}{E_3 T_1}, \\[2ex] \dfrac{u_3}{u_1} = \dfrac{C_3}{C_1} \cdot \dfrac{E_3 T_2}{E_1 T_2}, \\[2ex] \dfrac{u_1}{u_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \cdot \dfrac{E_1 T_3}{E_2 T_3}. \end{cases} \tag{31′}$$

Die Lage des Punktes O muß zur Bestimmung des Teilungsverhältnisses (27) noch gegeben sein.

Bei gegebenen Dreieckskoordinaten x_1, x_2, x_3 sind nach (31) die drei Sinusverhältnisse und damit die drei Transversalen t_1, t_2, t_3 bestimmt. Schon zwei von diesen bestimmen im allgemeinen den Punkt P als ihren Schnittpunkt. Daß auch die dritte durch P geht, folgt aus dem Transversalensatz § 25, (16).

14. Die Dreieckskoordinaten als Doppelverhältnisse. Die multiplizierten Teilungsverhältnisse von § 28, **13** werden Doppelverhältnisse, wenn man Einheitspunkt und Einheitslinie (vgl. § 28, **10**) benutzt.

Legt man (Fig. 166a) durch die Ecke E_1 neben den Seiten e_2 und e_3 eine dritte Gerade t_1^0, die die Ecke E_1 mit dem Einheitspunkt E_0 verbindet und dann eine vierte Gerade t_1, die mit den drei andern das Doppelverhältnis:

$$\mu_1 = (e_2 e_3 t_1 t_1^0) = \frac{\sin e_2 t_1}{\sin e_3 t_1} : \frac{\sin e_2 t_1^0}{\sin e_3 t_1^0} \tag{32}$$

bildet, so ist die Gleichung dieser vierten Geraden nach § 18, (22)

in laufenden Koordinaten x, y, t:

$$\frac{X_2}{X_2{}^0} - \mu_1 \frac{X_3}{X_3{}^0} = 0.$$

Geht die Gerade durch einen gegebenen Punkt $P = x, y, t$, so ist durch diesen das Doppelverhältnis bestimmt, und zwar:

$$\mu_1 = \frac{X_2}{X_2{}^0} : \frac{X_3}{X_3{}^0}, \tag{33}$$

wo nunmehr in X_2 und X_3 unter x, y, t die Koordinaten des gegebenen Punktes P verstanden werden. Dann folgt aber aus (33) mit Rücksicht auf (21):

$$\mu_1 = \frac{x_2}{x_3}. \tag{34}$$

Die drei Verhältnisse der Dreieckskoordinaten des Punktes P sind die Doppelverhältnisse, nach denen die Verbindungslinien t_1, t_2, t_3 des

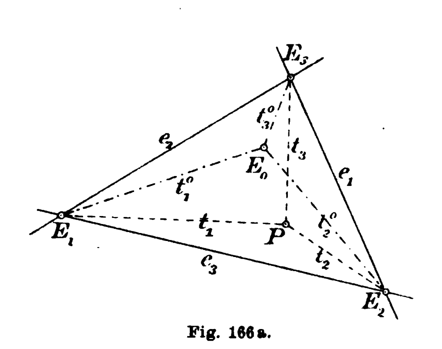


Fig. 166a.

Punktes P und die Verbindungslinien $t_1{}^0$, $t_2{}^0$, $t_3{}^0$ des Einheitspunktes E_0 mit den Ecken des Koordinatendreiecks die bezüglichen Winkel teilen (Fig. 166a):

$$(35)\quad \begin{cases} \dfrac{x_2}{x_3} = \dfrac{\sin e_2 t_1}{\sin e_3 t_1} \cdot \dfrac{\sin e_3 t_1{}^0}{\sin e_2 t_1{}^0} \\ \quad = (e_2 e_3 t_1 t_1{}^0), \\ \dfrac{x_3}{x_1} = (e_3 e_1 t_2 t_2{}^0), \\ \dfrac{x_1}{x_2} = (e_1 e_2 t_3 t_3{}^0). \end{cases}$$

Die drei Verhältnisse der Dreieckskoordinaten der Geraden p sind die Doppelverhältnisse, nach denen die Schnittpunkte T_1, T_2, T_3 der

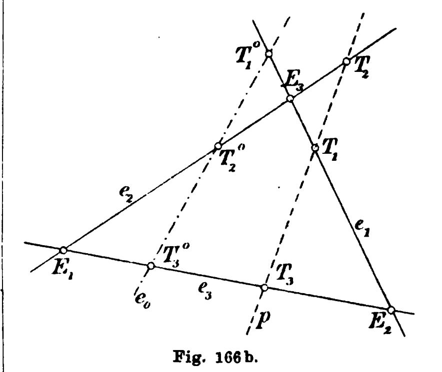


Fig. 166b.

Geraden p und die Schnittpunkte $T_1{}^0$, $T_2{}^0$, $T_3{}^0$ der Einheitslinie e_0 mit den Seiten des Koordinatendreiecks die bezüglichen Seiten teilen (Fig. 166b):

$$(35')\quad \begin{cases} \dfrac{u_2}{u_3} = \dfrac{E_2 T_1}{E_3 T_1} \cdot \dfrac{E_3 T_1{}^0}{E_2 T_1{}^0} \\ \quad = (E_2 E_3 T_1 T_1{}^0), \\ \dfrac{u_3}{u_1} = (E_3 E_1 T_2 T_2{}^0), \\ \dfrac{u_1}{u_2} = (E_1 E_2 T_3 T_3{}^0). \end{cases}$$

Diese Deutung der Dreieckskoordinaten setzt nur *das Koordinatendreieck mit Einheitspunkt und Einheitslinie* voraus und ist für Punkt und Gerade *vollkommen dual.*

15. Projektion des laufenden Punktes aus einer Ecke auf die Gegenseite.

Die Verbindungslinien t_1, t_2, t_3 und t_1^0, t_2^0, t_3^0 der Punkte P und E_0 mit den Ecken E_1, E_2, E_3

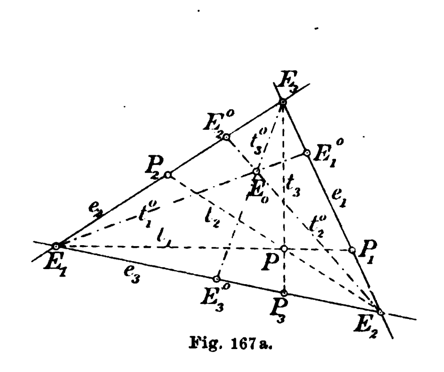


Fig. 167a.

mögen die Gegenseiten in den Punkten P_1, P_2, P_3 und E_1^0, E_2^0, E_3^0 schneiden (Fig. 167a):

Da die Punktreihe E_3, E_2, P_1, E_1^0 zu dem Strahlbüschel e_2, e_3, t_1, t_1^0 perspektiv ist, so folgt nach § 5, (3):

$$(E_3 E_2 P_1 E_1^0) = (e_2 e_3 t_1 t_1^0)$$

Die Schnittpunkte T_1, T_2, T_3 und T_1^0, T_2^0, T_3^0 der Geraden p und e_0 mit den Seiten e_1, e_2, e_3

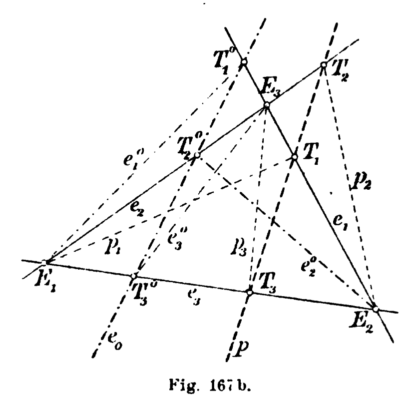


Fig. 167b.

mögen mit den Gegenecken durch die Strahlen p_1, p_2, p_3 und e_1^0, e_2^0, e_3^0 verbunden werden (Fig. 167b):

Da der Strahlbüschel e_3, e_2, p_1, e_1^0 zu der Punktreihe E_2, E_3, T_1, T_1^0 perspektiv ist, so folgt nach § 5, (3):

$$(e_3 e_2 p_1 e_1^0) = (E_2 E_3 T_1 T_1^0)$$

und daher mit Rücksicht auf (35) und (35'):

$$(36)\quad \begin{cases} \dfrac{x_2}{x_3} = \dfrac{E_3 P_1}{E_2 P_1} \cdot \dfrac{E_2 E_1^0}{E_3 E_1^0} \\ \qquad = (E_3 E_2 P_1 E_1^0), \\ \dfrac{x_3}{x_1} = (E_1 E_3 P_2 E_2^0), \\ \dfrac{x_1}{x_2} = (E_2 E_1 P_3 E_3^0). \end{cases}$$

$$(36')\quad \begin{cases} \dfrac{u_2}{u_3} = \dfrac{\sin e_3 p_1}{\sin e_2 p_1} \cdot \dfrac{\sin e_2 e_1^0}{\sin e_3 e_1^0} \\ \qquad = (e_3 e_2 p_1 e_1^0), \\ \dfrac{u_3}{u_1} = (e_1 e_3 p_2 e_2^0), \\ \dfrac{u_1}{u_2} = (e_2 e_1 p_3 e_3^0). \end{cases}$$

und hieraus im Hinblick auf § 7, (11); (11') und § 8, (4):

Sind x_1, x_2, x_3 die Dreieckskoordinaten des Punktes P und be-

Sind u_1, u_2, u_3 die Dreieckskoordinaten der Geraden p und be-

deuten P_1, P_2, P_3 *und* E_1^0, E_2^0, E_3^0 (Fig. 167a) *die Punkte, in denen die Verbindungslinien von* P *und* E_0 *mit den Ecken* E_1, E_2, E_3 *die Gegenseiten schneiden, so sind* x_2, x_3; x_3, x_1; x_1, x_2 *die Zweieckskoordinaten der Punkte* P_1, P_2, P_3 *in bezug auf die Zweiecke* E_2E_3, E_3E_1, E_1E_2 *und die Einheitspunkte* E_1^0, E_2^0, E_3^0.

deuten p_1, p_2, p_3 *und* e_1^0, e_2^0, e_3^0 (Fig. 167b) *die Strahlen, die die Schnittpunkte von* p *und* e_0 *auf den Seiten* e_1, e_2, e_3 *mit den Gegenecken verbinden, so sind* u_2, u_3; u_3, u_1; u_1, u_2 *die Zweiseitskoordinaten der Strahlen* p_1, p_2, p_3 *in bezug auf die Zweiseite* e_2e_3, e_3e_1, e_1e_2 *und die Einheitsstrahlen* e_1^0, e_2^0, e_3^0.

16. Punkte auf einer Seite und Strahlen durch eine Ecke des Koordinatendreiecks. Aus § 28, **15** geht weiter sofort hervor:

Für alle Punkte x_1, x_2, x_3 *eines durch die Ecke* E_3 *gehenden Strahles ist das Verhältnis* $x_1 : x_2$ *konstant.*

Für alle Strahlen u_1, u_2, u_3 *eines auf der Seite* e_3 *liegenden Punktes ist das Verhältnis* $u_1 : u_2$ *konstant.*

Insbesondere gibt die Annahme $P = P_3$ und $p = p_3$ in § 28, **15** die Sätze (vgl. § 28, **7**):

Für einen Punkt x_1, x_2, o *der Seite* e_3 *sind* x_1, x_2 *zugleich die Zweieckskoordinaten in bezug auf* $E_1E_2E_3^0$ (Fig. 167a) (vgl. § 10, **2**).

Für einen Strahl u_1, u_2, o *der Ecke* E_3 *sind* u_1, u_2 *zugleich die Zweiseitskoordinaten in bezug auf* $e_1e_2e_3^0$ (Fig. 167b) (vgl. § 23, **2**).

17. Beziehung der in § 28, 14 und 15 benutzten festen Punkte und Strahlen.

Wie der Einheitspunkt E_0, sind auch seine Verbindungslinien t_1^0, t_2^0, t_3^0 mit den Ecken E_1, E_2, E_3 und deren Schnittpunkte E_1^0, E_2^0, E_3^0 (Fig. 167a) mit den Seiten e_1, e_2, e_3 *feste* Bestandteile des Koordinatensystems.

Wie die Einheitsgerade e_0, sind auch ihre Schnittpunkte T_1^0, T_2^0, T_3^0 mit den Seiten e_1, e_2, e_3 und deren Verbindungslinien e_1^0, e_2^0, e_3^0 (Fig. 167b) mit den Ecken E_1, E_2, E_3 *feste* Bestandteile des Koordinatensystems.

Zur Vereinfachung sind diese Bestandteile in Fig. 167a und 167b unabhängig voneinander dargestellt. Um sie in ihrer vereinigten Lage zu übersehen, kann man § 26, Fig. 151 benutzen, indem man die dortigen Bezeichnungen:

$$P_0;\ p_0;\ t_1,\ t_2,\ t_3;\ t_1',\ t_2',\ t_3';\ T_1,\ T_2,\ T_3;\ T_1',\ T_2',\ T_3'$$

bezüglich durch:

$$E_0;\ e_0;\ t_1^0,\ t_2^0,\ t_3^0;\ e_1^0,\ e_2^0,\ e_3^0;\ E_1^0,\ E_2^0,\ E_3^0;\ T_1^0,\ T_2^0,\ T_3^0$$

ersetzt. Damit folgt aber aus § 26, **3** (Fig. 167a und 167b).

Die auf den Seiten e_1, e_2 und e_3 liegenden Punktpaare E_1^0, T_1^0; E_2^0, T_2^0 und E_3^0, T_3^0 sind harmonisch zu den bezüglichen Eckenpaaren E_2, E_3; E_3, E_1 und E_1, E_2.

Die durch die Ecken E_1, E_2 und E_3 gehenden Strahlenpaare e_1^0, t_1^0; e_2^0, t_2^0 und e_3^0, t_3^0 sind harmonisch zu den bezüglichen Seitenpaaren e_2, e_3; e_3, e_1 und e_1, e_2.

Daher haben die am Schluß von § 28, **16** genannten Koordinatensysteme $E_1 E_2 E_3^0$ und $e_1 e_2 e_3^0$ die § 8, **3** erwähnte Lage zueinander.

§ 29. Gleichungen von Geraden und Punkten in Dreieckskoordinaten.

1. Die Bedingung der vereinigten Lage. Beim Übergang von den homogenen gemeinen Koordinaten x, y, t und u, v, s zu den Dreieckskoordinaten x_1, x_2, x_3 und u_1, u_2, u_3 findet nach § 28, (5) die Beziehung statt:

$$ux + vy + st = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3.$$

Mit Rücksicht auf § 22, (5) folgt daher die für den Zusammenhang zwischen Punkt- und Linienkoordinaten wesentliche Eigenschaft:

Ein Punkt und eine Gerade mit den Dreieckskoordinaten x_1, x_2, x_3 und u_1, u_2, u_3 liegen immer dann und nur dann vereinigt, wenn:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0. \tag{1}$$

2. Die Gleichungen der Geraden und des Punktes. Je nachdem man daher u_1, u_2, u_3 als fest und x_1, x_2, x_3 als veränderlich ansieht oder umgekehrt, ergeben sich die beiden Hauptsätze (§ 22, **3**):

Sind u_1, u_2, u_3 die Koordinaten einer Geraden, so ist[61]*):*

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \tag{2}$$

die Gleichung der Geraden in laufenden Punktkoordinaten x_1, x_2, x_3.

Umgekehrt sind die *Koeffizienten* der Gleichung (2) einer Geraden zugleich deren *Koordinaten.*

Sind x_1, x_2, x_3 die Koordinaten eines Punktes, so ist:

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0 \tag{2'}$$

die Gleichung des Punktes in laufenden Linienkoordinaten u_1, u_2, u_3.

Umgekehrt sind die *Koeffizienten* der Gleichung (2′) eines Punktes zugleich dessen *Koordinaten.*

3. Verkürzte Gleichungen von Geraden und Punkten. Die Koordinaten x_1, x_2, $x_3 = 0, 0, 1$ der Ecke E_3 (vgl. § 28, (15) und Fig. 159) genügen immer dann und nur dann der Gleichung (2), wenn $u_3 = 0$ ist. Also (vgl. § 19, **5**):

Eine Gerade geht immer dann und nur dann durch die Ecke E_3

Ein Punkt liegt immer dann und nur dann auf einer Seite e_3

des Koordinatendreiecks, wenn ihre Gleichung die Form hat:

(3) $u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0.$

des Koordinatendreiecks, wenn seine Gleichung die Form hat:

(3′) $x_1 u_1 + x_2 u_2 = 0.$

Hieran schließen sich unmittelbar in Übereinstimmung mit § 28, 16 die Bemerkungen (Fig. 168a und b):

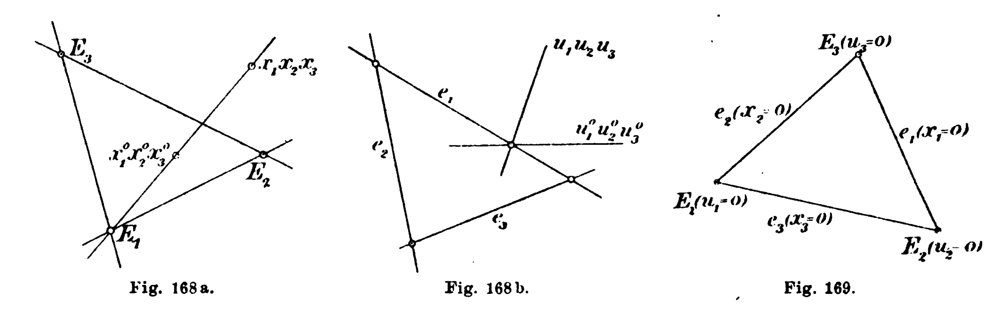


Fig. 168a. Fig. 168b. Fig. 169.

Die Verbindungslinie eines beliebigen Punktes x_1^0, x_2^0, x_3^0 mit der Ecke E_3 hat in laufenden Punktkoordinaten die Gleichung:

(4) $x_1 : x_2 = x_1^0 : x_2^0.$

Die Gleichungen der drei Seiten e_1, e_2, e_3 sind (Fig. 169):

(5) $x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0.$

Der Schnittpunkt einer beliebigen Geraden u_1^0, u_2^0, u_3^0 mit der Seite e_3 hat in laufenden Linienkoordinaten die Gleichung:

(4′) $u_1 : u_2 = u_1^0 : u_2^0.$

Die Gleichungen der drei Ecken E_1, E_2, E_3 sind (vgl. § 22, **9**):

(5′) $u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0.$

4. Identität zwischen den linken Seiten zweier Gleichungen. Der Umstand, daß die Verhältnisse der drei Dreieckskoordinaten eines Punktes oder einer Geraden in umkehrbar eindeutiger Beziehung mit dem Punkte oder der Geraden stehen (vgl. § 28, **2**; **4**) findet wiederum (vgl. § 24, **1**) seinen Ausdruck in den Sätzen:

Die beiden Geraden:

(6) $\begin{cases} X = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0, \\ X_1 = u_1^{(1)} x_1 + u_2^{(1)} x_2 + u_3^{(1)} x_3 = 0, \end{cases}$

fallen immer dann und nur dann zusammen, wenn eine Identität von der Form:

(7) $\lambda X + \lambda_1 X_1 = 0$

besteht.

Die beiden Punkte:

(6′) $\begin{cases} U = x_1 u_1 + x_2 u_3 + x_3 u_3 = 0, \\ U_1 = x_1^{(1)} u_1 + x_2^{(1)} u + x_3^{(1)} u_3 = 0, \end{cases}$

fallen immer dann und nur dann zusammen, wenn eine Identität von der Form:

(7′) $\lambda U + \lambda_1 U_1 = 0$

besteht.

5. Unterdeterminanten aus den Koeffizienten der Gleichungen zweier Geraden oder zweier Punkte. Dieselben Sätze können auch so ausgesprochen werden (Anm. 1, II, (9)):

Die beiden Geraden (6) *fallen zusammen, wenn die Matrix der Koeffizienten verschwindet, also:*

$$(8)\quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & u_3^{(1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Man könnte die Bedingungen (8) als die *Gleichungen der Geraden* $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}$ *in Linienkoordinaten* u_1, u_2, u_3 bezeichnen (vgl. § 29, (13)), da sie mit:

$$(9)\quad \begin{cases} \varrho u_1 = u_1^{(1)}, \quad \varrho u_2 = u_2^{(1)}, \\ \varrho u_3 = u_3^{(1)} \end{cases}$$

gleichbedeutend sind (vgl. § 29, (18)).

Ist die Bedingung (8) nicht erfüllt, so haben die beiden Geraden (6) einen Punkt gemein, und die Unterdeterminanten:

$$(10)\quad \begin{cases} x_1 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ u_2^{(1)} & u_3^{(1)} \end{vmatrix}, \\ x_2 = \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ u_3^{(1)} & u_1^{(1)} \end{vmatrix}, \\ x_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1^{(1)} & u_2^{(1)} \end{vmatrix} \end{cases}$$

sind dessen Koordinaten.

Die beiden Punkte (6′) *fallen zusammen, wenn die Matrix der Koeffizienten verschwindet, also:*

$$(8')\quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Man könnte die Bedingungen (8′) als *die Gleichungen des Punktes* $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$ *in Punktkoordinaten* x_1, x_2, x_3 bezeichnen (vgl. § 29, (13′)), da sie mit:

$$(9')\quad \begin{cases} \varrho x_1 = x_1^{(1)}, \quad \varrho x_2 = x_2^{(1)}, \\ \varrho x_3 = x_3^{(1)} \end{cases}$$

gleichbedeutend sind.

Ist die Bedingung (8′) nicht erfüllt, so bestimmen die beiden Punkte (6′) eine Verbindungslinie, und die Unterdeterminanten:

$$(10')\quad \begin{cases} u_1 = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \end{vmatrix}, \\ u_2 = \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ x_3^{(1)} & x_1^{(1)} \end{vmatrix}, \\ u_3 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \end{vmatrix} \end{cases}$$

sind deren Koordinaten.

6. Identität zwischen den Gleichungen von drei Geraden und drei Punkten. In derselben Weise, wie § 24, **3**, gelten die Sätze:

Die drei Geraden:

$$(11)\quad \begin{cases} X = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0, \\ X_1 = u_1^{(1)} x_1 + u_2^{(1)} x_2 + u_3^{(1)} x_3 = 0, \\ X_2 = u_1^{(2)} x_1 + u_2^{(2)} x_2 + u_3^{(2)} x_3 = 0 \end{cases}$$

Die drei Punkte:

$$(11')\quad \begin{cases} U = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0, \\ U_1 = x_1^{(1)} u_1 + x_2^{(1)} u_2 + x_3^{(1)} u_3 = 0, \\ U_2 = x_1^{(2)} u_1 + x_2^{(2)} u_3 + x_3^{(2)} u_3 = 0 \end{cases}$$

gehen durch einen Punkt, wenn eine Identität von der Form:

(12) $\lambda X + \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = 0$

besteht.

liegen auf einer Geraden, wenn eine Identität von der Form:

(12') $\lambda U + \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 = 0$

besteht.

7. Determinante der Gleichungen von drei Geraden und drei Punkten. Dieselbe notwendige und hinreichende Bedingung kann, wie in § 24, **4**, in die Form gekleidet werden (vgl. § 22, **7**):

Die drei Geraden (11) *gehen durch einen Punkt, wenn die Determinante der Koeffizienten verschwindet, also:*

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & u_3^{(1)} \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & u_3^{(2)} \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist zugleich die Gleichung des Schnittpunktes der beiden Geraden $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}$ und $u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}$ in laufenden Linienkoordinaten u_1, u_2, u_3.

Die drei Punkte (11') *liegen auf einer Geraden, wenn die Determinante der Koeffizienten verschwindet, also:*

$$(13')\qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist zugleich die Gleichung der Verbindungslinie der beiden Punkte $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$ und $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}$ in laufenden Punktkoordinaten x_1, x_2, x_3.

8. Die Gleichung des Strahlbüschels und der Punktreihe. An die Identität (12) knüpft sich wiederum die Darstellung des Strahlbüschels. Die fundamentale Beziehung § 29, **1** gibt auf zwei Gerade mit den beiderseitigen Koordinaten u_1, v_1, s_1; $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}$ und u_2, v_2, s_2; $u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}$ angewendet:

$$u_1 x + v_1 y + s_1 t = u_1^{(1)} x_1 + u_2^{(1)} x_2 + u_3^{(1)} x_3,$$
$$u_2 x + v_2 y + s_2 t = u_1^{(2)} x_1 + u_2^{(2)} x_2 + u_3^{(2)} x_3;$$

damit folgt aber auch die Übertragung der Sätze § 22, **10** auf Dreieckskoordinaten:

Sind:

$$(14)\qquad \begin{cases} X_1 = u_1^{(1)} x_1 + u_2^{(1)} x_2 \\ \qquad\qquad + u_3^{(1)} x_3 = 0, \\ X_2 = u_1^{(2)} x_1 + u_2^{(2)} x_2 \\ \qquad\qquad + u_3^{(2)} x_3 = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen der beiden Grundstrahlen g_1, g_2 eines Strahlbüschels, so ist die Gleichung des laufenden Strahles p des Büschels:

Sind:

$$(14')\qquad \begin{cases} U_1 = x_1^{(1)} u_1 + x_2^{(1)} u_2 \\ \qquad\qquad + x_3^{(1)} u_3 = 0, \\ U_2 = x_1^{(2)} u_1 + x_2^{(2)} u_2 \\ \qquad\qquad + x_3^{(2)} u_3 = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen der beiden Grundpunkte G_1, G_2 einer Punktreihe, so ist die Gleichung des laufenden Punktes P der Reihe:

(15) $\frac{X_1}{X_1^0} - \mu \frac{X_2}{X_2^0} = 0;$

hier ist x_1^0, x_2^0, x_3^0 *ein zur Bestimmung des Einheitsstrahles* g_0 *gegebener Punkt, sind* X_1^0, X_2^0 *die für ihn gebildeten Ausdrücke* X_1, X_2 *und bedeutet* μ *das Doppelverhältnis:*

(16) $\mu = (g_1 g_2 p g_0).$

(15′) $\frac{U_1}{U_1^0} - \mu \frac{U_2}{U_2^0} = 0;$

hier ist u_1^0, u_2^0, u_3^0 *eine zur Bestimmung des Einheitspunktes* G_0 *gegebene Gerade, sind* U_1^0, U_2^0 *die für sie gebildeten Ausdrücke* U_1, U_2 *und bedeutet* μ *das Doppelverhältnis:*

(16′) $\mu = (G_1 G_2 P G_0).$

Die Gleichung (15) enthält nur die *Verhältnisse* je der Koordinaten $u_1^{(1)}$, $u_2^{(1)}$, $u_3^{(1)}$; $u_1^{(2)}$, $u_2^{(2)}$, $u_3^{(2)}$; x_1^0, x_2^0, x_3^0 und x_1, x_2, x_3.

Kommt es nicht auf die genaue Feststellung der Bedeutung von μ an, so kann man (vgl. § 22, (23); (23′)) die Gleichungen (15) und (15′) auch in der kürzeren Form schreiben:

(17) $X_1 - \mu X_2 = 0,$ | (17′) $U_1 - \mu U_2 = 0.$

Hier ist nun μ schlechthin das multiplizierte Teilungsverhältnis, nach dem der Strahl p den Winkel von g_1, g_2 oder der Punkt P die Strecke G_1, G_2 teilt.

9. Parameterdarstellung im Strahlbüschel und auf der Punktreihe. Im Anschluß an (17) und (17′) kann man die Sätze von § 29, 8 auch so aussprechen (vgl. § 22, **11**):

Sind $u_1^{(1)}$, $u_2^{(1)}$, $u_3^{(1)}$ *und* $u_1^{(2)}$, $u_2^{(2)}$, $u_3^{(2)}$ *die Koordinaten der beiden Grundstrahlen eines Strahlbüschels, so sind die Koordinaten des laufenden Strahles des Büschels mit einem Proportionalitätsfaktor* ϱ *in der Form darstellbar:*

$$(18)\quad \begin{cases} \varrho u_1 = u_1^{(1)} - \mu u_1^{(2)}, \\ \varrho u_2 = u_2^{(1)} - \mu u_2^{(2)}, \\ \varrho u_3 = u_3^{(1)} - \mu u_3^{(2)}. \end{cases}$$

Sind $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$ *und* $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, $x_3^{(2)}$ *die Koordinaten der beiden Grundpunkte einer Punktreihe, so sind die Koordinaten des laufenden Punktes der Reihe mit einem Proportionalitätsfaktor* ϱ *in der Form darstellbar*[80]*):*

$$(18')\quad \begin{cases} \varrho x_1 = x_1^{(1)} - \mu x_1^{(2)}, \\ \varrho x_2 = x_2^{(1)} - \mu x_2^{(2)}, \\ \varrho x_3 = x_3^{(1)} - \mu x_3^{(2)}. \end{cases}$$

Die Elimination von ϱ und μ gibt wieder die Bedingung (13) und (13′).

10. Das Dreieck und die Determinante aus drei Geraden. Drei durch die Gleichungen:

$$(19)\quad \begin{cases} X_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = 0, \\ X_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = 0, \\ X_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = 0 \end{cases}$$

gegebene Gerade bilden die Seiten eines Dreiecks, wenn die Determinante (§ 24, 5):

$$(20)\qquad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet. Die Gleichungen der Ecken sind dann nach (10):

$$(21)\qquad \begin{cases} U_1 = A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3 = 0, \\ U_2 = A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3 = 0, \\ U_3 = A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3 = 0, \end{cases}$$

wo die Koeffizienten A_{hi} die Unterdeterminanten zweiten Grades von A sind.

Verschwindet die Determinante A, so gehen die drei Geraden (19) nach (13) durch einen Punkt, der durch jede der drei Gleichungen (21) dargestellt wird (Anm. 1, II, (7)).

Verschwinden auch alle Unterdeterminanten A_{hi}, so fallen die drei Geraden (19) nach (8) in eine zusammen, die durch jede der Gleichungen (19) dargestellt wird (Anm. 1, II, (8)).

§ 30. Die Transformation der Dreieckskoordinaten.

1. Allgemeine Form der Transformationsformeln.[91]) Zwischen den homogenen *gemeinen Koordinaten* x, y, t eines Punktes in bezug auf das Achsensystem Oxy und seinen *Dreieckskoordinaten* x_1, x_2, x_3 in bezug auf das Koordinatendreieck $E_1E_2E_3$ bestehen die Gleichungen § 28, (1) und (4). Zwischen x, y, t und den Dreieckskoordinaten y_1, y_2, y_3 in bezug auf ein anderes Koordinatendreieck $J_1J_2J_3$ (Fig. 170) bestehen dieselben Gleichungen mit entsprechend geänderten Koeffizienten. Man hat daher unter andern die Beziehungen:

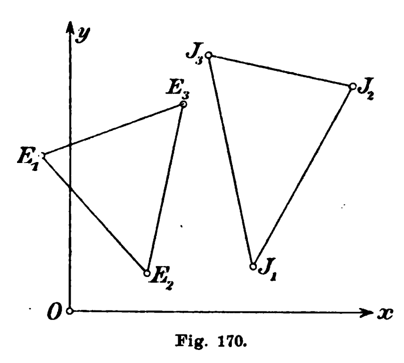


Fig. 170.

$$\begin{cases} \varrho x_1 = a_1x + b_1y + c_1t, \\ \varrho x_2 = a_2x + b_2y + c_2t, \\ \varrho x_3 = a_3x + b_3y + c_3t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma x = A_1'y_1 + A_2'y_2 + A_3'y_3, \\ \sigma y = B_1'y_1 + B_2'y_2 + B_3'y_3, \\ \sigma t = C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_3'y_3. \end{cases}$$

Durch Substitution der Ausdrücke für x, y, t in die Ausdrücke für x_1, x_2, x_3 erhält man zwischen x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 Gleichungen

von der Form (vgl. § 8, (11)):

$$(1)\qquad \begin{cases} \varrho x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + c_{13}y_3, \\ \varrho x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + c_{23}y_3, \\ \varrho x_3 = c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3. \end{cases}$$

Zwischen den Dreieckskoordinaten eines Punktes in bezug auf zwei verschiedene Koordinatendreiecke bestehen also jedenfalls Gleichungen von der Form (1).[42])

Da sowohl die Verhältnisse der x_1, x_2, x_3 als auch die der y_1, y_2, y_3 nach § 28, 2 in umkehrbar eindeutiger Beziehung zu dem Punkte x, y, t stehen, müssen die Gleichungen (1) auch nach den Verhältnissen der y_1, y_2, y_3 eindeutig auflösbar sein. *Daher ist die Determinante:*

$$(2)\qquad C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \mid c_{kl} \mid \neq 0.$$

2. Die Elemente des neuen Koordinatensystems bei gegebenen Koeffizienten c_{kl}. Wir stellen uns die auf das Dreieck $E_1E_2E_3$ bezogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3 als die *ursprünglichen* (alten) Koordinaten vor und denken uns, jetzt ohne Vermittlung der x, y, t, die *neuen* Dreieckskoordinaten y_1, y_2, y_3 durch die Gleichungen (1) mit gegebenen und der Bedingung (2) entsprechenden *Koeffizienten* c_{kl} eingeführt.

Die Gleichungen (1) geben dann unmittelbar die alten Koordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punktes an, dessen neue Koordinaten y_1, y_2, y_3 bekannt sind. Nun haben die Ecken J_1, J_2, J_3 und der Einheitspunkt J_0 des neuen Koordinatensystems die Koordinaten (§ 28, (15); (22)):

$$y_1, y_2, y_3 = 1, 0, 0; \quad 0, 1, 0; \quad 0, 0, 1; \quad 1, 1, 1.$$

Bezeichnen wir daher ihre alten Koordinaten mit:

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1, x_2, x_3 = x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}; \quad x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}; \\ \qquad\qquad x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}; \quad x_1^0, x_2^0, x_3^0, \end{cases}$$

so ist nach (1) (vgl. § 8, (13)):

$$(4)\qquad \begin{cases} x_1^{(1)} : x_2^{(1)} : x_3^{(1)} = c_{11} : c_{21} : c_{31}; \quad x_1^{(2)} : x_2^{(2)} : x_3^{(2)} = c_{12} : c_{22} : c_{32}; \\ \qquad\qquad x_1^{(3)} : x_2^{(3)} : x_3^{(3)} = c_{13} : c_{23} : c_{33}, \end{cases}$$

$$(5)\qquad x_1^0 : x_2^0 : x_3^0 = c_{11} + c_{12} + c_{13} : c_{21} + c_{22} + c_{23} : c_{31} + c_{32} + c_{33}.$$

Bei gegebenen neun Koeffizienten c_{kl} sind die Eckpunkte und der Einheitspunkt des neuen Koordinatensystems vollkommen bestimmt.

Infolge der Voraussetzung (2) liegen keine drei dieser vier Punkte in gerader Linie, da (§ 29, (13′)) die Determinante der Koordinaten von je drei solchen Punkten nach (4) und (5) immer den Wert C hat (Anm. 1, IV, 4).

3. Die Koeffizienten c_{kl} bei gegebenen Elementen des neuen Koordinatensystems. Ist umgekehrt das neue Koordinatensystem durch die Koordinaten (3) der vier Punkte J_1, J_2, J_3, J_0 gegeben, so erhält man zuerst aus (4) mit drei unbestimmten Faktoren n_1, n_2, n_3:

$$(6)\qquad \begin{cases} c_{11} = n_1 x_1^{(1)}, & c_{21} = n_1 x_2^{(1)}, & c_{31} = n_1 x_3^{(1)}; \\ c_{12} = n_2 x_1^{(2)}, & c_{22} = n_2 x_2^{(2)}, & c_{32} = n_2 x_3^{(2)}; \\ c_{13} = n_3 x_1^{(3)}, & c_{23} = n_3 x_2^{(3)}, & c_{33} = n_3 x_3^{(3)} \end{cases}$$

und danach aus (5) mit einem Proportionalitätsfaktor n_0 die Gleichungen:

$$(7)\qquad \begin{cases} n_1 x_1^{(1)} + n_2 x_1^{(2)} + n_3 x_1^{(3)} = n_0 x_1^0, \\ n_1 x_2^{(1)} + n_2 x_2^{(2)} + n_3 x_2^{(3)} = n_0 x_2^0, \\ n_1 x_3^{(1)} + n_2 x_3^{(2)} + n_3 x_3^{(3)} = n_0 x_3^0, \end{cases}$$

aus diesen ergeben sich n_1, n_2, n_3 bis auf einen Faktor n_0 eindeutig und alle drei von 0 verschieden, da von den vier gegebenen Punkten J_1, J_2, J_3, J_0 keine drei in einer Geraden liegen dürfen (vgl. § 29, (13′)). Danach sind also die neun Koeffizienten c_{kl} aus (6) bis auf einen gemeinsamen Faktor n_0 bestimmt.[41])

Bei gegebenen Eckpunkten und Einheitspunkt des neuen Koordinatensystems sind die neun Koeffizienten c_{kl} ihren acht Verhältnissen nach eindeutig bestimmt.

Ihre Determinante ist nach (6):

$$|\, c_{kl} \,| = n_1 n_2 n_3 \,|\, x_k^{(l)} \,| \neq 0.$$

4. Die Umkehr der Transformationsformeln (1). Indem wir in den Gleichungen (1) den Faktor ϱ nicht ausdrücklich schreiben, haben wir statt ihrer, ausgeschrieben oder zusammengefaßt:

$$(8)\qquad \begin{cases} x_1 = c_{11} y_1 + c_{12} y_2 + c_{13} y_3 \\ x_2 = c_{21} y_1 + c_{22} y_2 + c_{23} y_3; \\ x_3 = c_{31} y_1 + c_{32} y_2 + c_{33} y_3 \end{cases} \quad x_k = \sum_1^3{}^l c_{kl} y_l, \quad k = 1, 2, 3.$$

Durch Auflösung (Anm. 2, II, (2)) nach y_1, y_2, y_3 ergibt sich hieraus:

$$(9)\qquad \begin{cases} C y_1 = C_{11} x_1 + C_{21} x_2 + C_{31} x_3 \\ C y_2 = C_{12} x_1 + C_{22} x_2 + C_{32} x_3; \\ C y_3 = C_{13} x_1 + C_{23} x_2 + C_{33} x_3 \end{cases} \quad C y_l = \sum_1^3{}^k C_{kl} x_k, \quad l = 1, 2, 3,$$

wo die Koeffizienten C_{kl} die Unterdeterminanten der Determinante C sind.

Der für die Verhältnisse $y_1 : y_2 : y_3$ bedeutungslose Faktor C soll nur stehen bleiben, damit die Gleichungen (9) die genauen Auflösungen der Gleichungen (8) sind.

Von jenen gelangt man auch durch Auflösung nach x_1, x_2, x_3 zu diesen zurück (Anm. 1, II, (4), (5)), so daß ebensogut die C_{kl} wie die c_{kl} als gegeben betrachtet werden können.

5. Die Transformation der Linienkoordinaten. Sind u_1, u_2, u_3 die Koordinaten einer Geraden im alten System E_1, E_2, E_3; E_0, so ist (vgl. § 21, 2) die Gleichung der Geraden nach § 29, 2:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

Durch die Substitution (8) erhält man nun:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3, \tag{10}$$

wo die Koeffizienten die Werte haben:

$$\left\{\begin{aligned} v_1 &= c_{11} u_1 + c_{21} u_2 + c_{31} u_3 \\ v_2 &= c_{12} u_1 + c_{22} u_2 + c_{32} u_3 ; \\ v_3 &= c_{13} u_1 + c_{23} u_2 + c_{33} u_3 \end{aligned}\right. \quad v_l = \sum_1^3{}^k c_{kl} u_k, \quad l = 1, 2, 3. \tag{11}$$

Die Gleichung der Geraden wird daher im neuen System:

$$v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 = 0,$$

und folglich sind nach § 29, 2 v_1, v_2, v_3 ihre neuen Koordinaten. Umgekehrt folgt aus (11):

$$\left\{\begin{aligned} Cu_1 &= C_{11} v_1 + C_{12} v_2 + C_{13} v_3 \\ Cu_2 &= C_{21} v_1 + C_{22} v_2 + C_{23} v_3 ; \\ Cu_3 &= C_{31} v_1 + C_{32} v_2 + C_{33} v_3 \end{aligned}\right. \quad Cu_k = \sum_1^3{}^l C_{kl} v_l. \quad k = 1, 2, 3. \tag{12}$$

6. Bedeutung der Koeffizienten der Transformationsformeln. Ebenso wie sich aus (1) die Darstellung (4) der Koordinaten der Ecken des neuen Koordinatendreiecks ergab, folgen aus (12) mit $v_1, v_2, v_3 = 1, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1$ die Koordinaten von dessen Seiten. Weiter aber liefern die Gleichungen (9) und (11) in entsprechender Weise die Koordinaten, welche die Ecken und Seiten des alten Dreiecks in bezug auf das neue haben. Indem wir von den Einheitspunkten absehen, stellen wir das Ergebnis in dem Satze zusammen:

Für den Übergang von einem alten Koordinatensystem x_1, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3 *zu einem neuen* y_1, y_2, y_3; v_1, v_2, v_3 *gelten die zusammengehörigen Transformationsformeln* (8), (9), (11), (12) *und sind:*

$$(13)\quad \begin{cases} x_1 : x_2 : x_3 = c_{11} : c_{21} : c_{31} & u_1 : u_2 : u_3 = C_{11} : C_{21} : C_{31} \\ \qquad\quad = c_{12} : c_{22} : c_{32} & \qquad\quad = C_{12} : C_{22} : C_{32} \\ \qquad\quad = c_{13} : c_{23} : c_{33} & \qquad\quad = C_{13} : C_{23} : C_{33} \end{cases}$$

die alten Koordinaten der neuen Ecken und Seiten und:

$$(14)\quad \begin{cases} y_1 : y_2 : y_3 = C_{11} : C_{12} : C_{13} & v_1 : v_2 : v_3 = c_{11} : c_{12} : c_{13} \\ \qquad\quad = C_{21} : C_{22} : C_{23} & \qquad\quad = c_{21} : c_{22} : c_{23} \\ \qquad\quad = C_{31} : C_{32} : C_{33} & \qquad\quad = c_{31} : c_{32} : c_{33} \end{cases}$$

die neuen Koordinaten der alten Ecken und Seiten (vgl. § 8, (15); (16)).

Zusammengehörig nennen wir die Transformationsformeln auch mit Rücksicht darauf, daß (9) und (12) die Auflösungen von (8) und (11), und (8) und (12) durch die Identität (10) miteinander verknüpft sind (Anm. 1, II, (6)), während an sich jede Gruppe von drei Koordinaten x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3; u_1, u_2, u_3; v_1, v_2, v_3 je um einen gemeinsamen Faktor unbestimmt bleibt.

7. Transformation der gemeinen Koordinaten. Bei zwei rechtwinkligen Koordinatensystemen Oxy und $O'x'y'$ sind in der Bezeichnung der Fig. 171 die alten Koordinaten der neuen Ecken J_1, J_2, J_3:

$$c_{11}:c_{21}:c_{31} = a_1:b_1:0; \quad c_{12}:c_{22}:c_{32} = a_2:b_2:0; \quad c_{13}:c_{23}:c_{33} = x_0:y_0:1$$

und die neuen Koordinaten der alten Ecken E_1, E_2, E_3:

$$C_{11}:C_{12}:C_{13} = a_1:a_2:0; \quad C_{21}:C_{22}:C_{23} = b_1:b_2:0; \quad C_{31}:C_{32}:C_{33} = x_0':y_0':1.$$

Daher sind die Formeln § 23, (1), (2), (3), (4) spezielle Fälle bezüglich der hier betrachteten Formeln (8), (12), (9), (11); die Bezeichnung

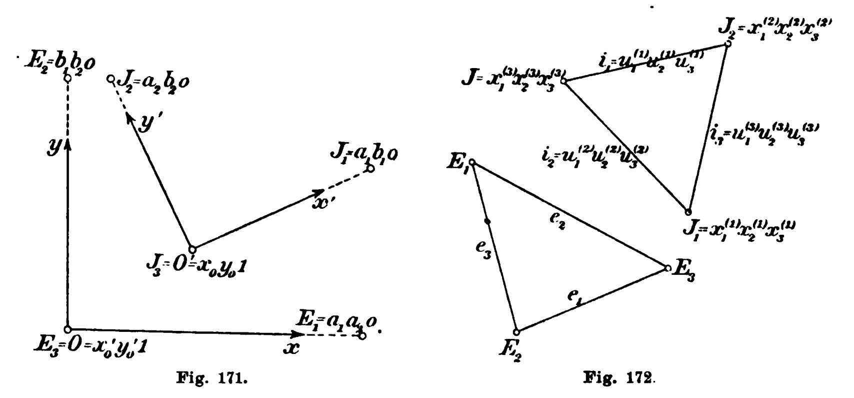


Fig. 171. Fig. 172.

x_1, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3; y_1, y_2, y_3; v_1, v_2, v_3 hier entspricht der Bezeichnung x, y, t; u, v, s; x', y', t'; u', v', s' dort. Der Einheitspunkt $J_0(x':y':t' = 1:1:1)$ hat dort die alten Koordinaten $x:y:t = a_1 + a_2 + x_0 : b_1 + b_2 + y_0 : 1$.

8. Einführung der Koordinaten der neuen Ecken und Seiten in die Transformationsformeln. Indem wir die Proportionalitätsfaktoren n_1, n_2, n_3 der Formeln (6) in $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, $x_k^{(3)}$ aufnehmen, geben wir dem erhaltenen Resultate auch folgende Gestalt (§ 8, (17)):

Der Übergang von den auf das Dreieck $E_1E_2E_3$ (Fig. 172) *bezüglichen Koordinaten x_k, u_k zu den auf das Dreieck $J_1J_2J_3$ bezüglichen Koordinaten y_l, v_l wird durch die zusammengehörigen Transformationsformeln vermittelt:*

$$(15)\qquad x_k = \sum_1^3{}^l\, x_k^{(l)} y_l, \qquad k = 1, 2, 3,$$

$$(16)\qquad Su_k = \sum_1^3{}^l\, u_k^{(l)} v_l, \qquad k = 1, 2, 3,$$

$$(17)\qquad Sy_l = \sum_1^3{}^k\, u_k^{(l)} x_k, \qquad l = 1, 2, 3,$$

$$(18)\qquad v_l = \sum_1^3{}^k\, x_k^{(l)} u_k. \qquad l = 1, 2, 3.$$

Hier sind $x_k^{(l)}$ die Koordinaten des neuen Eckpunktes J_l und $u_k^{(l)}$ die Koordinaten der neuen Seiten i_l. Zwischen beiden bestehen die Beziehungen (§ 29, (10); (10'); Anm. 1, II, (2); (5)):

$$(19)\qquad u_k^{(l)} = \begin{vmatrix} x_{k_1}^{(l_1)} & x_{k_1}^{(l_2)} \\ x_{k_2}^{(l_1)} & x_{k_2}^{(l_2)} \end{vmatrix}, \qquad Sx_k^{(l)} = \begin{vmatrix} u_{k_1}^{(l_1)} & u_{k_1}^{(l_2)} \\ u_{k_2}^{(l_1)} & u_{k_2}^{(l_2)} \end{vmatrix},$$

wo kk_1k_2 und ll_1l_2 je die Permutationen 123, 231, 312 *durchlaufen, und* (Anm. 1, II, (4)):

$$(20)\qquad S = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} \\ x_3^{(1)} & x_3^{(2)} & x_3^{(3)} \end{vmatrix}, \qquad S^2 = \begin{vmatrix} u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & u_1^{(3)} \\ u_2^{(1)} & u_2^{(2)} & u_2^{(3)} \\ u_3^{(1)} & u_3^{(2)} & u_3^{(3)} \end{vmatrix}.$$

9. Identische Kovarianten. Nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten (Anm. 1, V, 2) geht aus (8) für irgend drei Punkte x_1, x_2, x_3; $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$ $x_3^{(1)}$; $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, $x_3^{(2)}$ (diese nur für § 30, **9** gebrauchte Bezeichnung hat mit der in (3) nichts zu tun) hervor (vgl. § 8, (21)):

$$(21)\qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} \end{vmatrix} = C \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & y_3^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & y_3^{(2)} \end{vmatrix}$$

und entsprechend aus (12) für drei Gerade. Es folgt daher:

Die Determinanten:

$$(22)\qquad | x x^{(1)} x^{(2)} | = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} \end{vmatrix},$$

$$(22')\qquad | u u^{(1)} u^{(2)} | = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & u_3^{(1)} \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & u_3^{(2)} \end{vmatrix},$$

ändern sich, wie auch die drei Punkte oder Geraden gewählt werden mögen, beim Übergang von einem Koordinatendreieck zu einem andern nur um den Faktor C (die Substitutionsdeterminante), bezüglich $1 : C$. Sie heißen *identische Kovarianten* der Transformation.[43])

Ihr *Verschwinden* bedeutet nach § 29, 7 bezüglich, daß die drei Punkte in gerader Linie liegen, und daß die drei Geraden durch einen Punkt gehen.

Ferner ist auch der Ausdruck:

$$(23)\qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$$

eine identische Kovariante, da er, gebildet für irgend einen Punkt und irgend eine Gerade, nach (10) bei der Transformation ungeändert bleibt.

Mit Rücksicht auf § 29, (10'); (10) kommt er auf die Determinanten (22) und (22') zurück.

10. Übergang von den Transformationsformeln auf die Parameterdarstellungen. Die Transformationsformeln (15) und (16) können auch als Parameterdarstellungen der alten Koordinaten x_1, x_2, x_3 oder u_1, u_2, u_3 der Punkte oder Geraden der Ebene betrachtet werden. Die Parameter y_1, y_2, y_3 oder v_1, v_2, v_3 bedeuten dann selbst Dreieckskoordinaten in bezug auf das Dreieck der drei Punkte $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ oder der drei Geraden $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$ (Fig. 172).

Für die Punkte der Seite i_3 des neuen Dreiecks ist nun nach § 28, 16 $y_3 = 0$, während y_1, y_2 Zweieckskoordinaten auf der Seite i_3 werden. Daher folgt:

Ist eine Gerade durch zwei Punkte $J_1 = x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$ und $J_2 = x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}$ gegeben (Fig. 173a), *so stellen sich die Koordinaten x_1, x_2, x_3 ihres laufenden Punktes in*

Ist ein Strahlbüschel durch zwei Gerade $i_1 = u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}$ und $i_2 = u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}$ gegeben (Fig. 173b), *so stellen sich die Koordinaten u_1, u_2, u_3 seines laufenden Strahles in*

bezug auf das Dreieck $E_1 E_2 E_3$ *mittels der Formeln:*

$$(24) \quad \begin{cases} \varrho x_1 = x_1^{(1)} y_1 + x_1^{(2)} y_2 \\ \varrho x_2 = x_2^{(1)} y_1 + x_2^{(2)} y_2 \\ \varrho x_3 = x_3^{(1)} y_1 + x_3^{(2)} y_2 \end{cases}$$

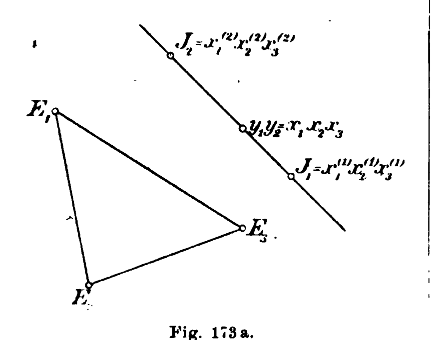


Fig. 173 a.

durch die Zweieckskoordinaten y_1, y_2 *desselben Punktes in bezug auf das Zweieck* $J_1 J_2$ *dar.*

bezug auf das Dreieck $E_1 E_2 E_3$ *mittels der Formeln*[80]*):*

$$(24') \quad \begin{cases} \varrho u_1 = u_1^{(1)} v_1 + u_1^{(2)} v_2 \\ \varrho u_2 = u_2^{(1)} v_1 + u_2^{(2)} v_2 \\ \varrho u_3 = u_3^{(1)} v_1 + u_3^{(2)} v_2 \end{cases}$$

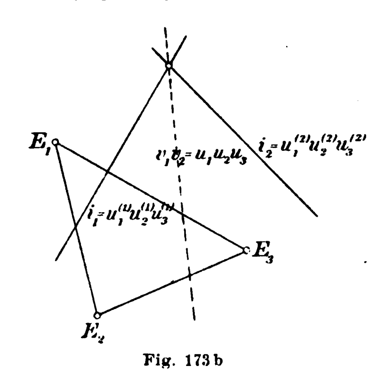


Fig. 173 b

durch die Zweiseitskoordinaten v_1, v_2 *desselben Strahles in bezug auf das Zweiseit* $i_1 i_2$ *dar.*

11. Übergang von den Transformationsformeln auf die Identitätensätze. Wir denken uns in den Formeln (15), wo wir links wieder den Proportionalitätsfaktor ϱ hinzufügen:

$$(25) \quad \begin{cases} \varrho x_1 = x_1^{(1)} y_1 + x_1^{(2)} y_2 + x_1^{(3)} y_3 \\ \varrho x_2 = x_2^{(1)} y_1 + x_2^{(2)} y_2 + x_2^{(3)} y_3 \\ \varrho x_3 = x_3^{(1)} y_1 + x_3^{(2)} y_2 + x_2^{(3)} y_3 \end{cases}$$

unter y_1, y_2, y_3 bestimmte Werte, so daß x_1, x_2, x_3 ebenso wie $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$; $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, $x_3^{(2)}$; $x_1^{(3)}$, $x_2^{(3)}$, $x_3^{(3)}$ ein bestimmter Punkt ist. Schreiben wir nun $-y$ für ϱ, multiplizieren mit den laufenden Linienkoordinaten u_1, u_2, u_3 und summieren, so ergibt sich unter Benutzung der Abkürzungen § 29, (11'):

$$(26) \quad y U + y_1 U_1 + y_2 U_2 + y_3 U_3 = 0.$$

Dies ist *die viergliedrige Identität zwischen den linken Seiten der Gleichungen von vier Punkten, die in* § 24, 6 *dual für gemeine Koordinaten abgeleitet wurde. In ihr bedeuten also die Faktoren* y_1, y_2, y_3 *die Dreieckskoordinaten des vierten Punktes* $U = 0$ *in bezug auf das Dreieck der drei andern Punkte* $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$.

Ebenso folgt aus (24) mit $-y$ für ϱ und durch Multiplikation mit u_1, u_2, u_3 und Addition:

(27) $$yU + y_1 U_1 + y_2 U_2 = 0.$$

Dies ist die in § 24, **3** und § 29, **6** abgeleitete dreigliedrige Identität zwischen den linken Seiten der Gleichungen von drei Punkten einer Geraden. In ihr bedeuten also die Faktoren y_1, y_2 die Zweiecks-koordinaten des Punktes $U = 0$ in bezug auf das Zweieck der beiden Punkte $U_1 = 0$, $U_2 = 0$.

III. Abschnitt.

Der Raum.

I. Kapitel.

Das gemeine Koordinatensystem.

§ 31. Die gemeinen Koordinaten eines Punktes.

1. Das rechtwinklige Koordinatensystem. Das *Koordinatensystem* im Raume besteht aus drei gerichteten Geraden (vgl. § 1, **3**), die durch einen Punkt O gehen, und von denen jede auf den beiden andern senkrecht steht (Fig. 174).

Der Punkt O heißt der *Koordinatenanfangspunkt.* Die drei Geraden selbst heißen die *Koordinatenachsen* und werden als x-, y- und z-Achse unterschieden. Die Ebenen je zweier Achsen (Fig. 175) heißen die *Koordinatenebenen,* die yz-, zx- und xy-Ebene.

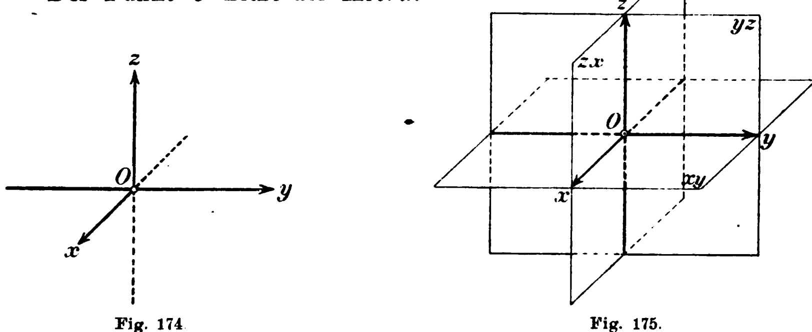


Fig. 174 Fig. 175.

Der Punkt O teilt jede Koordinatenachse in eine *positive* und eine *negative Halbachse.* Je zwei Achsen bilden in ihrer Ebene ein *ebenes rechtwinkliges Koordinatensystem* (vgl. § 10, **1**). Die drei Koordinatenebenen zerlegen den Raum in acht *Oktanten.*

2. Projektion des Punktes auf die Koordinatenachsen. Drei Ebenen, die durch einen Punkt P des Raumes senkrecht zu den drei

Koordinatenachsen gelegt werden (Fig. 176), schneiden diese in drei Punkten P_x, P_y und P_z, den *orthogonalen Projektionen* des Punktes P *auf die drei Koordinatenachsen.* Die relativen Abstände (vgl. § 1, 4) dieser Projektionen vom Koordinatenanfangspunkt O:

$$(1) \qquad x = OP_x, \quad y = OP_y, \quad z = OP_z$$

heißen die *Koordinaten des Punktes*[46]) P in bezug auf das Koordinatensystem $Oxyz$ (Fig. 174). Sie sind *positive* oder *negative* Zahlen. Sie sind zugleich die Koordinaten der Projektionspunkte je auf ihrer Achse (vgl. § 1, 6). Im Gegensatz zu andern Koordinaten werden x, y, z *Cartesische* oder *gemeine rechtwinklige* oder *rechtwinklige Parallelkoordinaten des Punktes* genannt.

3. Eindeutigkeit der Koordinatenbestimmung. Bei gegebenem Koordinatensystem gehören nach § 31, 2 *zu jedem Punkte P* des Raumes *drei eindeutig bestimmte Koordinaten x, y, z.*

Umgekehrt bestimmen drei beliebig gegebene Werte von x, y, z die Punkte P_x, P_y und P_z (vgl. § 1, 6) und dann als Durchschnitt der drei durch diese Punkte parallel der yz-, zx- und xy-Ebene gelegten Ebenen den Punkt P. *Zu irgend drei als Koordinaten gegebenen Zahlen x, y, z gehört also ein eindeutig bestimmter Punkt P.*[10])

4. Projektion des Punktes auf die Koordinatenebenen. Die drei durch den Punkt P gelegten Ebenen (Fig. 176), die ihn auf die Koordinatenachsen projizieren, bilden zusammen mit den Koordinaten-

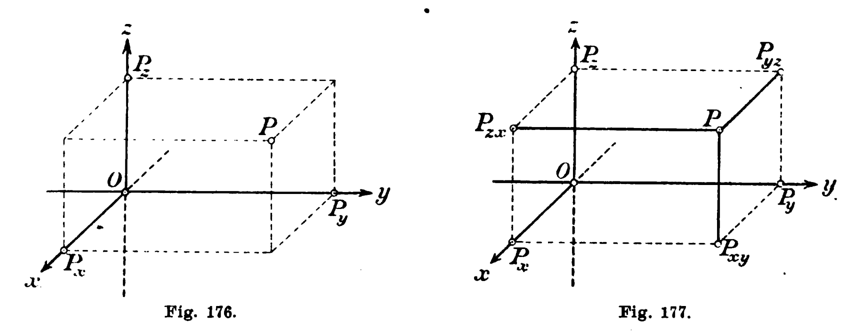


Fig. 176. Fig. 177.

ebenen ein rechtwinkliges Parallelepipedon, welches neben den bereits bezeichneten Ecken O, P, P_x, P_y, P_z noch drei weitere Ecken P_{yz}, P_{zx} und P_{xy} bezüglich in der yz-, zx- und xy-Ebene hat (Fig. 177). Diese letzteren Punkte sind die *orthogonalen Projektionen* des Punktes P *auf die drei Koordinatenebenen.*

Aus der Gleichheit paralleler Kanten des Parallelepipedons folgt, daß neben (1) auch:

(2) $$x = P_{yz}P, \quad y = P_{zx}P, \quad z = P_{xy}P.$$

Die Koordinaten sind daher auch *die Abstände des Punktes P von den drei Koordinatenebenen.* Dabei wird für parallele Gerade gleicher Durchlaufungssinn angenommen, so daß z. B. $P_{yz}P$ und OP_x entweder beide positiv oder beide negativ sind.[47])

Die Projektionspunkte P_{yz}, P_{zx} und P_{xy} des Punktes $P = x, y, z$ haben in den ebenen Koordinatensystemen Oyz, Ozx und Oxy ihrer Ebenen die Koordinaten y, z; z, x und x, y (vgl. § 10, 2).

5. Gebrochener Linienzug der Koordinaten. Neben (1) und (2) ist auch:

(3) $$x = OP_x, \quad y = P_xP_{xy}, \quad z = P_{xy}P.$$

Die drei Koordinaten bilden in dieser Auffassung einen *gebrochenen Linienzug,* der vom Punkte O zum Punkte P hinführt (Fig. 178).

6. Besondere Werte der Koordinaten. Die Koordinaten des *Anfangspunktes* O sind $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Für alle Punkte der *x-Achse* ist $y = 0$ und $z = 0$, für alle Punkte der *yz-Ebene* ist $x = 0$.

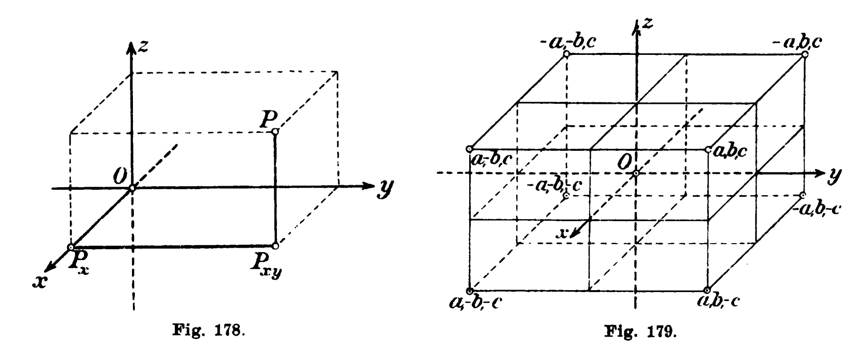


Fig. 178. Fig. 179.

Acht Punkte von gleichen *absoluten* Werten a, b, c der Koordinaten x, y, z bilden (Fig. 179) die Ecken eines rechtwinkligen Parallelepipedons, dessen Kanten den Achsen parallel sind und dessen Mittelpunkt O ist (vgl. § 10, 5).

Alle Punkte von *gleichem x* liegen auf einer der yz-Ebene parallelen Ebene, alle Punkte von *gleichen y und z* auf einer zur x-Achse parallelen Geraden.

7. Grundriß und Aufriß des Punktes. In Fig. 177 ist die vertikale yz-Ebene als Zeichnungsebene gedacht und sind die nicht in dieser Ebene liegenden Punkte und Linien *in schiefer Projektion* dargestellt. Die schiefe Projektion wird dadurch charakterisiert, daß die zur Zeichnungsebene senkrechten Geraden wie OP_x in einem ge-

gebenen *Verkürzungsverhältnis* und unter einer gegebenen *Neigung* gegen die y-Achse wiedergegeben werden.

Die Rolle der einzelnen Koordinatenebenen ist hierbei vertauschbar. Wir können auch (Fig. 180) die xy-Ebene als *vertikal* gestellte Zeichnungsebene wählen und die zx-Ebene *horizontal* denken. In dieser Annahme wollen wir die letztere als *Grundrißebene*, die erstere als *Aufrißebene* bezeichnen. Wir drehen nun die zx-Ebene um die x-Achse in die Zeichnungsebene hinein, so daß die positive z-Halbachse, um 90^0 nach abwärts gedreht, in die negative y-Halbachse hineinfällt (Fig. 181). Wir haben dann in $x = OP_x$, $y = P_xP_{xy} = OP_y$, $z = P_xP_{zx} = OP_z$ alle drei Koordinaten in ihrer *wahren Größe* vor uns.

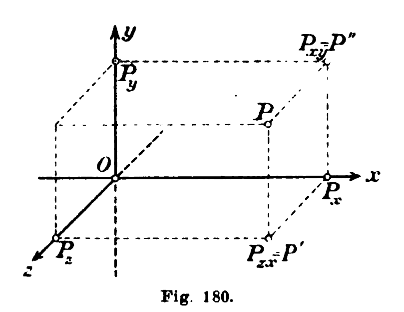


Fig. 180.

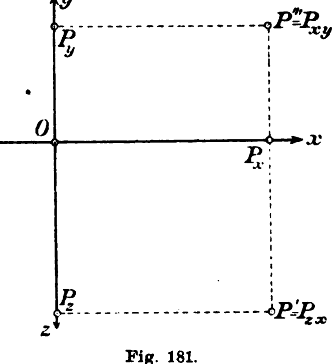


Fig. 181.

Der Punkt $P_{zx} = P'$ heißt der *Grundriß*, der Punkt $P_{xy} = P''$ der *Aufriß* des Punktes P. Grundriß und Aufriß liegen bei horizontaler x-Achse *stets senkrecht übereinander* (Fig. 181).

Umgekehrt bestimmen zwei beliebige, senkrecht übereinander liegende Punkt P' und P'', die (Fig. 181) als Grundriß und Aufriß gegeben sind, den Punkt P. Denn macht man die obige Drehung der zx-Ebene von Fig. 181 zu Fig. 180 wieder rückwärts, so schneiden sich die in P' und P'' auf der zx- und xy-Ebene errichteten Perpendikel, da sie in einer Ebene liegen, im Raumpunkte P.[92])

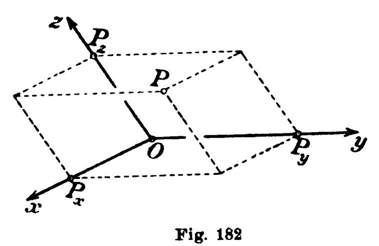


Fig. 182

8. Das schiefwinklige Koordinatensystem. Wenn die drei Koordinatenachsen nicht rechtwinklig zueinander sind, sondern beliebige Winkel miteinander bilden (Fig. 182), so projiziert man den Punkt P wie in § 31, 2 auf die x-, y- und z-Achse, jedoch durch drei Ebenen, die der yz-, zx- und xy-Ebene des Koordinatensystems parallel sind. Man erhält dann bei entsprechender Bezeich-

nung, wie vorher beim rechtwinkligen Koordinatensystem, in:

(4) $x = OP_x = P_{yz}P, \quad y = OP_y = P_{zx}P, \quad z = OP_z = P_{xy}P$

die *schiefwinkligen* oder *gemeinen schiefwinkligen* oder *schiefwinkligen Parallelkoordinaten* des Punktes P. Auch für diese gelten die Angaben § 31, **3**—**6** mit entsprechender Modifikation (vgl. § 10, **6**).

§ 32. Winkel zwischen Geraden und Ebenen.

1. Winkel zweier Geraden im Raume. Zwei Gerade im Raume *schneiden sich im allgemeinen nicht.* Unter dem Winkel ω zweier gerichteten, begrenzten oder unbegrenzten Geraden g_1 und g_2 verstehen wir dann den Winkel zweier sich in einem Punkte *schneidenden* Geraden g_1' und g_2', die mit g_1 und g_2 bezüglich parallel und gleichgerichtet sind (Fig. 183). Als Größe dieses Winkels nehmen wir in der Regel die *absolute* Größe des *konkaven* Winkels zwischen beiden Schenkeln (vgl. § 2, **1**; **2**):

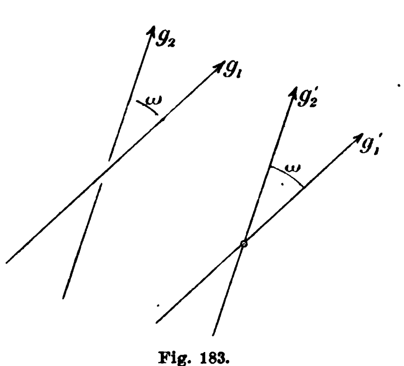


Fig. 183.

(1) $\omega = \overline{g_1 g_2} = \overline{g_1' g_2'}$;

(2) $0 \leqq \omega \leqq \pi$.

Für $\cos\omega$ kann der Winkel nach § 2, **4** auch in relativer Größe genommen werden.

2. Gerichtete Ebene. *Eine mit einem bestimmten Drehungssinne begabte Ebene E heißt eine gerichtete Ebene.* Ihr Drehungssinn, der durch einen auf die Ebene aufgezeichneten und durchscheinend gedachten Pfeilbogen angegeben wird (Fig. 184), erscheint von der einen Seite der Ebene als positiv (der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzt), von der andern als negativ. Jene heißt die *positive*, diese die *negative Seite der Ebene.*[93])

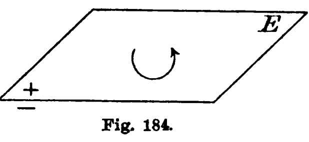


Fig. 184.

3. Winkel einer Geraden gegen eine Ebene. Die senkrechte Projektion einer gerichteten Geraden g auf eine gerichtete Ebene E, d. h. der Ort der senkrechten Projektionen aller Punkte von g (vgl. § 31, **4**), sei g' (Fig. 185). Der Winkel:

(3) $\chi = Eg = g'g$

heißt der *Neigungswinkel der Geraden g gegen die Ebene E.* Er liegt seinem absoluten Werte nach stets zwischen O und $\frac{\pi}{2}$, da der *positive* Schenkel der Projektion g', vom Schnittpunkt O der Geraden g mit der Ebene E an gerechnet, eben derjenige ist, der mit dem positiven Schenkel von g einen *spitzen* Winkel bildet. *Je nachdem aber der positive Schenkel von g auf der positiven oder negativen Seite der Ebene E liegt, wollen wir die Größe von χ positiv* oder *negativ rechnen*, so daß:

(4) $$+\frac{\pi}{2} > \chi > -\frac{\pi}{2}.$$

4. Winkel einer Geraden gegen die positive Normale einer Ebene. Eine gerichtete Gerade n, die eine gerichtete Ebene E senk-

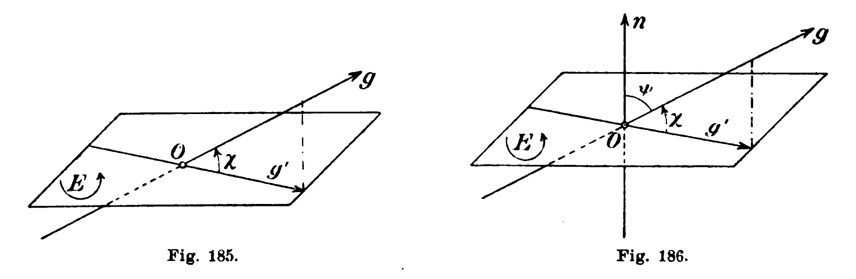


Fig. 185. Fig. 186.

recht schneidet, heißt die *positive oder negative Normale* der Ebene, je nachdem ihr positiver Schenkel, vom Schnittpunkt O mit der Ebene an gerechnet, auf der positiven (Fig. 186) oder negativen Seite der Ebene liegt. Die positive und negative Normale entsprechen den Werten $\chi = \frac{\pi}{2}$ und $\chi = -\frac{\pi}{2}$ von § 32, 3.

Der Winkel einer durch O gehenden gerichteten Geraden g (Fig. 186) gegen die positive Normale n ist nach § 32, 1 seiner absoluten Größe nach zu nehmen:

(5) $$\psi = \overline{ng},$$

(6) $$O \leqq \psi \leqq \pi.$$

Er steht zu dem Winkel (3) stets in der Beziehung:

(7) $$\psi = \frac{\pi}{2} - \chi.$$

5. Winkel zweier gerichteten Ebenen. Unter dem Winkel zweier gerichteten Ebenen verstehen wir den (wie in § 32, 1 absoluten) Winkel ihrer positiven Normalen.[93])

6. Begriff der Schraubenbewegung. Dreht sich die Ebene E (Fig. 185) in sich selbst um den Punkt O in dem ihr aufgeschriebenen Drehungssinne, während sie sich gleichzeitig parallel mit sich selbst

derart verschiebt, daß der Punkt O die Gerade g in deren positiver Richtung durchläuft, so vollzieht die Ebene (oder ein mit ihr starr verbundener starrer Körper) eine *Schraubenbewegung.* Für $\chi = \pm \frac{\pi}{2}$ entsteht die *gerade,* sonst die *schiefe* Schraubenbewegung.

Eine *Schraube,* die sich in ihrer Schraubenmutter bewegt, oder ein *Korkzieher* beim Ein- und Ausbohren vollzieht eine gerade Schraubenbewegung.

7. Begriff des Schraubensinnes. Die durch die Ebene E und die Gerade g (Fig. 185; 186) nach § 32, **6** bestimmte Schraubenbewegung hat *positiven oder negativen Schraubensinn*[5]), je nachdem die Gerade g von der negativen auf die positive Seite der Ebene läuft oder umgekehrt, je nachdem also:

$$(8) \quad \frac{\pi}{2} \geqq \chi > 0 \ (\cos\psi > 0) \quad \text{oder} \quad 0 > \chi \geqq -\frac{\pi}{2} \ (\cos\psi < 0).$$

Man kann dies auch so ausdrücken: Beobachten wir die Schraubenbewegung von der positiven Seite der Ebene aus, so daß uns die Drehung der Ebene positiv (entgegengesetzt der Drehung des Uhrzeigers) erscheint, so ist der Sinn der Schraubenbewegung positiv oder negativ, je nachdem die Ebene sich auf uns zu oder von uns fort bewegt.

Die gewöhnliche Schraube und der Korkzieher haben sowohl bei ihrer Vorwärts- als bei ihrer Rückwärtsbewegung *positiven* Schraubensinn.

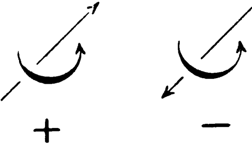


Fig. 187.

In jedem Falle *kommt der Zusammenstellung einer gerichteten Ebene E und einer gerichteten Geraden g* (Fig. 185) *ein bestimmter positiver oder negativer Schraubensinn zu.*

Man kann daher als *Symbol des Schraubensinnes* die Zusammenstellung eines Pfeilbogens und eines geraden Pfeiles nehmen (Fig. 187).

8. Schraubensinn eines Achsensystems. *Die Ebenen eines beliebigen schief- oder rechtwinkligen Achsensystems $Oxyz$ sind durch die Reihenfolge ihrer Benennung gerichtete Ebenen.* Man erhält nämlich den der yz-Ebene zukommenden Drehungssinn (vgl. § 32, 2), indem man den positiven Halbstrahl y über den konkaven Winkel yz (vgl. § 32, 1) gegen den positiven Halbstrahl z hindreht und analog für die zx- und xy-Ebene verfährt (in Fig. 188 ist aus der Zeichnungsebene yz die x-Achse nach vorn heraustretend gedacht).

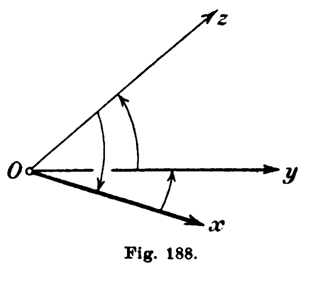


Fig. 188.

Die gerichtete yz-Ebene bestimmt aber nach § 32, 7 in Verbindung mit der gerichteten x-Achse einen (in Fig. 188 positiven) Schraubensinn, denselben, den auch die zx-Ebene mit der y-Achse oder die xy-Ebene mit der z-Achse bestimmt.

Jedes Achsensystem $Oxyz$ erhält somit, der bestimmten Reihenfolge seiner Achsen entsprechend, einen positiven oder negativen Schraubensinn, je nachdem die positive Halbachse z auf der positiven oder negativen Seite der gerichteten xy-Ebene liegt (vgl. § 11, 3).

Insbesondere hat das rechtwinklige Achsensystem $Oxyz$ entweder positiven (Fig. 189a) oder negativen (Fig. 189b) Schraubensinn. Man nennt es auch bezüglich positiv oder negativ orientiert.[12]) Ein positiv und ein negativ orientiertes rechtwinkliges Achsensystem können nicht

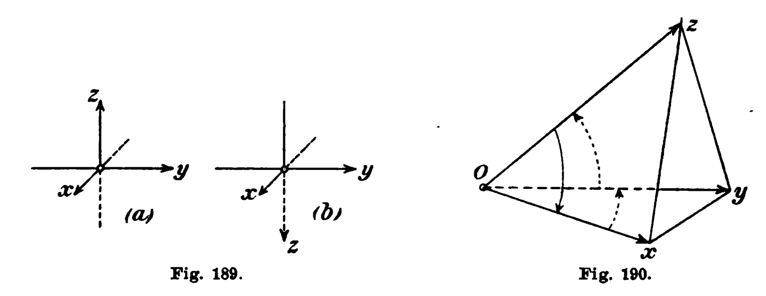


Fig. 189. Fig. 190.

derart zur Deckung gebracht werden, daß die gleichnamigen Achsen einschließlich ihrer positiven Richtungen alle drei zusammenfallen.

9. Vertauschung der Achsen. Der Reihenfolge yxz der Achsen desselben Systems $Oxyz$ in Fig. 188 entspricht der umgekehrte Schraubensinn, wie der vorherigen Reihenfolge xyz, da der Achsenfolge yx der entgegengesetzte Drehungssinn der xy-Ebene entspricht, wie der Folge xy.

Überhaupt ändert sich der Schraubensinn eines Achsensystems bei Vertauschung zweier Achsen.

10. Schraubensinn dreier gerichteten Geraden. Drei gerichtete Gerade x, y, z im Raume, die sich nicht alle in einem Punkte schneiden, haben der Reihenfolge x, y, z entsprechend, einen bestimmten Schraubensinn, denjenigen eines Achsensystems, das aus drei ihnen parallelen und gleichgerichteten von einem Punkte O ausgehenden Achsen besteht.

11. Der Sinus eines Dreikants. Die positiven Halbachsen eines Achsensystems $Oxyz$ mit den sie verbindenden Ebenen bilden ein Dreikant (eine Raumecke; Fig. 190). Der von den Kosinus der Winkel

zwischen den Kanten (vgl. § 32, **1**) abhängige Ausdruck (über die Bezeichnung der Quadratwurzel vgl. § 6, zu (14′)):

$$(9)\quad \sin xyz = \varepsilon \sqrt{1 - \cos^2 yz - \cos^2 zx - \cos^2 xy + 2\cos yz \cdot \cos zx \cdot \cos xy}$$

heißt der *Sinus des Dreikants* (*der Raumecke*).[94] Dabei soll $\varepsilon = +1$ oder -1 sein, je nachdem der Schraubensinn der Ecke d. h. des Achsensystems $Oxyz$ (vgl. § 32, 8) positiv oder negativ ist (vgl. § 11, (4)).

Es ist daher:

$$(10)\qquad \sin yxz = -\sin xyz,$$

und entsprechend ändert sich bei jeder Vertauschung zweier Achsen das Vorzeichen (vgl. § 32, **9**).

Bei der rechtwinkligen Ecke d. h. dem rechtwinkligen Achsensystem $Oxyz$ (Fig. 189) ist nach (9):

$$(11)\qquad \sin xyz = +1 \text{ oder } -1,$$

je nachdem das System positiv oder negativ orientiert ist.

Daß der Ausdruck unter der Wurzel in (9) positiv und $\sin xyz$ zwischen -1 und $+1$ gelegen ist, wird sich in § 41, **9** ergeben.

§ 33. Richtungswinkel einer Geraden und Polarkoordinaten eines Punktes.

1. Zwei Richtungswinkel der gerichteten Geraden. Die Richtung einer gerichteten begrenzten oder unbegrenzten Geraden g in bezug auf das rechtwinklige Koordinatensystem $Oxyz$ wird durch *zwei Richtungswinkel* φ und ψ bestimmt, wobei wir mit Rücksicht auf § 32, **1** annehmen können, daß die Gerade durch O geht (Fig. 191). Der eine Winkel φ ist der Winkel der Projektion g' (vgl. § 32, **3**) gegen die x-Achse, seiner relativen Größe nach in bezug auf den Drehungssinn der xy-Ebene (vgl. § 32, 8) bestimmt (vgl. § 11, **2**):

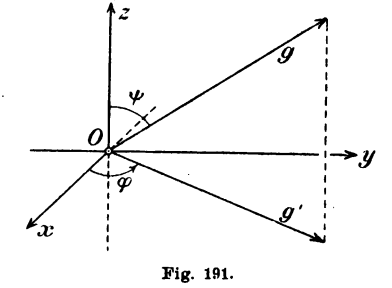


Fig. 191.

$$(1)\qquad \varphi = xg' \quad (\ldots 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \ldots).$$

Der andere Winkel ψ ist der absolute Winkel von g gegen die z-Achse, die positive Normale der xy-Ebene (vgl. § 32, (5)):

$$(2)\qquad \psi = \overline{zg} \qquad (0 \leqq \psi \leqq \pi).$$

Beide Winkel sind durch g eindeutig (φ bis auf Vielfache von 2π) be-

stimmt und bestimmen auch ihrerseits eindeutig die durch O gehende gerichtete Gerade g. Mit φ nämlich hat man den positiven *Halbstrahl* von g' und damit die durch ihn senkrecht zur xy-Ebene gelegte und von der z-Achse begrenzte *Halbebene.* In dieser ist dann durch ψ der positive Schenkel von g bestimmt.

2. Drei Richtungskosinus der gerichteten Geraden. Da die Richtungswinkel φ, ψ gegen das Koordinatensystem unsymmetrisch sind, benutzt man auch die *drei Richtungswinkel* (vgl. § 32, **1**):

$$(3) \qquad \alpha = \overline{xg}, \quad \beta = \overline{yg}, \quad \gamma = \overline{zg},$$

um die Richtung der gerichteten Geraden g zu bestimmen (Fig. 192), oder auch die Kosinus dieser Winkel:

$$(4) \qquad a = \cos\alpha, \quad b = \cos\beta, \quad c = \cos\gamma;$$

sie heißen die *Richtungskosinus*[50] *der gerichteten Geraden g.*

Die Winkel α, β, γ und ebenso ihre Kosinus a, b, c sind jedoch nicht unabhängig voneinander (vgl. § 33, 7).

3. Richtungskosinus einer ungerichteten Geraden. Entgegengesetzt gerichtete Gerade haben nach (4) entgegengesetzt gleiche

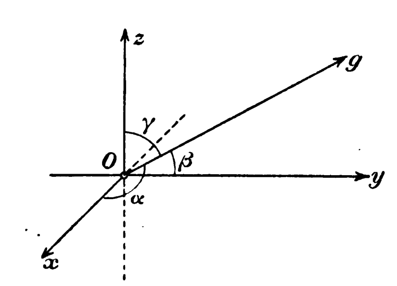


Fig. 192.

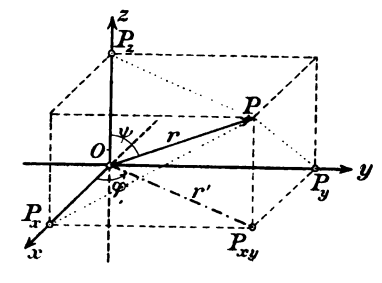


Fig. 193.

Richtungskosinus a, b, c und $-a$, $-b$, $-c$ (vgl. § 2, 5). Die Richtungskosinus einer *ungerichteten* Geraden sind daher um ein gemeinsames Vorzeichen unbestimmt.

4. Polarkoordinaten eines Punktes. Die vom Koordinatenanfangspunkt O nach einem Punkte P (Fig. 193) laufende Strecke $r = OP$ heißt der *Leitstrahl* (Radius vektor) des Punktes P. Er hat eine bestimmte *Länge:*

$$(5) \qquad r = \overline{OP}$$

und eine bestimmte *Richtung.*

Diese wird nach § 33, **1** durch die zwei Richtungswinkel:

$$(6) \qquad \varphi = \overline{xr'}, \quad \psi = \overline{zr}$$

bestimmt, wo $r' = OP_{xy}$ (Fig. 193) die Projektion der Strecke $r = OP$

auf die xy-Ebene ist; oder nach § 33, 2 durch die drei Richtungswinkel oder Richtungskosinus:

(7) $$\alpha = \overline{xr}, \qquad \beta = \overline{yr}, \qquad \gamma = \overline{zr}.$$

(8) $$a = \cos\alpha, \qquad b = \cos\beta, \qquad c = \cos\gamma.$$

Die Größen r, φ, ψ oder r, α, β, γ oder r, a, b, c heißen die Polarkoordinaten des Punktes P.[52])

Hier ist r, wie in § 12, 5 in doppelter Bedeutung gebraucht, in der Regel im Sinne (5), als Schenkel eines Winkel aber für die Strecke OP ihrer Richtung nach.

5. Beziehung zwischen x, y, z und r, φ, ψ. Hat P die gemeinen Koordinaten x, y, z und ist:

(9) $$r' = \overline{OP_{xy}},$$

so sind x, y die gemeinen (vgl. § 31, 4) und r', φ die Polarkoordinaten des Punktes P_{xy} in dem ebenen System Oxy (vgl. § 12, (9)). Daher ist nach § 12, (13):

(10) $$x = r'\cos\varphi, \qquad y = r'\sin\varphi.$$

Andererseits folgt aus den rechtwinkligen Dreiecken OPP_{xy} und OPP_z der Fig. 193:

(11) $$r' = r\cdot\sin\psi \qquad (> 0 \text{ nach } (2)), \qquad z = r\cdot\cos\psi.$$

Durch Verbindung von (10) und (11) erhält man *die gemeinen Koordinaten durch die Polarkoordinaten r, φ, ψ eindeutig ausgedrückt:*

(12) $$x = r\cos\varphi\sin\psi, \qquad y = r\sin\varphi\sin\psi, \qquad z = r\cos\psi.$$

Umgekehrt sind r, φ, ψ durch x, y, z eindeutig bestimmt mittels der aus (10) und (12) hervorgehenden *Gleichungen* (vgl. § 12, (14)):

(13) $$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad \cos\psi = \dfrac{z}{r}, \qquad (0 \leqq \psi \leqq \pi), \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{r'}, \quad \sin\varphi = \dfrac{y}{r'}, \quad (0 \leqq \varphi < 2\pi); \quad r' = \sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

In r' hat man zugleich *den Abstand $\overline{P_zP} = \overline{OP_{xy}}$ des Punktes $P = x, y, z$ von der z-Achse* (Fig. 193).

6. Beziehung zwischen x, y, z und r, a, b, c. Aus den rechtwinkligen Dreiecken OPP_x, OPP_y, OPP_z in Fig. 193 folgt mit Rücksicht auf (5) und (8) und § 31, (1):

(14) $$x = ar, \quad y = br, \quad z = cr;$$

und umgekehrt, da r bereits aus (13) bekannt ist (vgl. § 12, (10); (11)):

(15) $$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad a = \frac{x}{r}, \quad b = \frac{y}{r}, \quad c = \frac{z}{r}.$$

Insbesondere hat ein Punkt mit den Polarkoordinaten 1, a, b, c die gemeinen Koordinaten (vgl. § 12, (12)):

(16) $$x = a, \quad y = b, \quad z = c.$$

7. Parameterdarstellung und gegenseitige Abhängigkeit der Richtungskosinus. Da P in § 33, 4 ein beliebiger Punkt war, können die in § 33, 4 als ein Teil der Polarkoordinaten von P auftretenden Größen φ, ψ und a, b, c als Richtungswinkel und Richtungskosinus einer beliebigen gerichteten Geraden g gelten, wie in § 33, 2. Nun folgt aber durch Vergleichung von (14) und (12):

(17) $$a = \cos\varphi \sin\psi, \quad b = \sin\varphi \sin\psi, \quad c = \cos\psi$$

und damit durch Quadrieren und Addieren:

(18) $$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Die drei Richtungskosinus einer gerichteten Geraden sind von deren zwei Richtungswinkeln φ, ψ *mittels der Gleichungen* (17) *abhängig und unter sich stets durch die Gleichung* (18) *verbunden* (vgl. § 11, (12)).

8. Die Verhältnisse der drei Richtungskosinus. Sind daher die Verhältnisse der drei Richtungskosinus a, b, c gegeben, etwa:

(19) $$a : b : c = A : B : C,$$

so folgt für diese selbst nach (18):

(20) $$a = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad b = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad c = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

bei unbestimmtem Vorzeichen der Quadratwurzel (vgl. § 11, (14)).

Drei Größen A, B, C, *die sich verhalten wie die drei Richtungskosinus* a, b, c, *bestimmen daher* (vgl. § 33, 3) *die Richtung der ungerichteten Geraden; sie sind homogene Koordinaten einer Richtung ohne Rücksicht auf deren Sinn (Pfeilspitze).*[105])

9. Eigenschaften und Anwendung der Polarkoordinaten r, φ, ψ. Alle Punkte des Raumes, deren Polarkoordinate r den gleichen Wert hat, liegen auf einer Kugel, die mit dem Radius r um O beschrieben ist (Fig. 193). Alle Punkte von gleichem φ liegen auf einer *Halbebene,* welche durch die z-Achse begrenzt wird (vgl. § 33, 1, Schluß). Alle Punkte von gleichem ψ liegen auf einem *Halbkegelmantel,* der durch Rotation des Halbstrahls OP (Fig. 193) um die z-Achse beschrieben wird.

Kugel, Halbebene und Halbkegel schneiden sich in einem einzigen Punkte.

Für den Punkt O ist $r = 0$, φ und ψ unbestimmt, aber auch un-

nötig; für alle Punkte der z-Achse ist $\psi = 0$ oder π, φ unbestimmt, aber überflüssig.

Auf der *Erdkugel* ist, bei konstantem r, die xy-Ebene die Äquatorebene, φ die *geographische Länge* und $\chi = \frac{\pi}{2} - \psi$ (vgl. § 32, (7)) die *geographische Breite*.

Auf der *Himmelskugel* wird entweder der Himmelsäquator oder der Horizont als xy-Ebene genommen. Im ersten Falle ist φ die *Rektaszension* und χ die *Deklination*; im letzteren ist $-\varphi$ das *Azimut*, χ der *Höhenwinkel*, ψ die *Zenitdistanz*.

10. Konstruktion des Punktes aus den Polarkoordinaten r, α, β, γ. Alle Punkte von gleicher Polarkoordinate α liegen auf einem *Halbkegelmantel* k_α um die x-Achse, alle Punkte von gleichem β auf einem solchen k_β um die y-Achse, alle Punkte von gleichem γ auf einem solchen k_γ um die z-Achse.[95]) Um bei gegebenen r, α, β, γ den Punkt P zu konstruieren, wählen wir die xy-Ebene als Zeichnungsebene. Der Durchschnitt der Kugel vom Radius r mit der xy-Ebene sei der Kreis K (Fig. 194); die Schnittlinien der Kegel k_α und k_β mit der xy-Ebene sind die Geraden OA_1, OA_2, die den Winkel α mit der positiven x-Achse, und die Geraden OB_1, OB_2, die den Winkel β mit der positiven y-Achse bilden. Dann sind die Geraden A_1A_2 und B_1B_2 die Projektionen der Schnittkreise m und n der Kegel k_α und k_β mit der Kugel, also ist der Schnittpunkt P_{xy} der beiden Geraden die gemeinsame Projektion der beiden Schnittpunkte, die die Kreise m und n miteinander haben. Der Punkt P ist von diesen beiden Schnittpunkten der auf der positiven oder negativen Seite der xy-Ebene liegende, je nachdem γ spitz oder stumpf ist (vgl. § 33, (14)). Legt man nun den den Punkt P enthaltenden Halbkreis m als m' (Fig. 194) um die Gerade A_1A_2 in die xy-Ebene um, so erscheint P als P' auf der Geraden B_1B_2. Man erhält also umgekehrt P' als Durchschnitt von B_1B_2 mit dem über A_1A_2 errichteten Halbkreis m'. Man bekommt schließlich P, indem man ein Perpendikel von der Länge $z = P_{xy}P'$ auf der xy-Ebene errichtet, bei spitzem γ nach der positiven, bei stumpfem γ nach der negativen Seite der xy-Ebene.

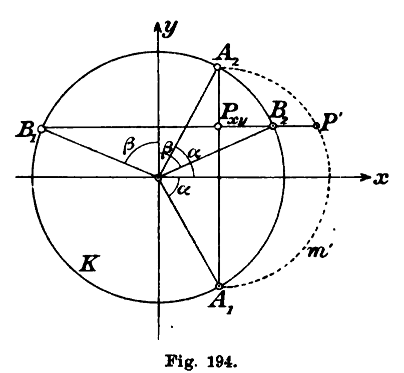


Fig. 194.

§ 34. Die Koordinaten einer Strecke.

1. Polarkoordinaten einer Strecke. Eine Strecke PP' im Raume, die von einem Punkte P nach einem Punkte P' hinläuft (Fig. 195), hat eine bestimmte *absolute Länge* (vgl. § 1, 2; § 12, 1):

$$(1) \qquad s = \overline{PP'}$$

und eine bestimmte *Richtung.* Ihre Richtung wird durch ihre drei Richtungskosinus (vgl. § 33, 2):

$$(2) \qquad a = \cos \overline{xs}, \quad b = \cos \overline{ys}, \quad c = \cos \overline{zs}$$

bestimmt, wo s in derselben Weise, wie in § 12, 1 in doppeltem Sinne gebraucht wird.

Wir nennen die absolute Größe s und die Richtungskosinus a, b, c die Polarkoordinaten der Strecke.[51])

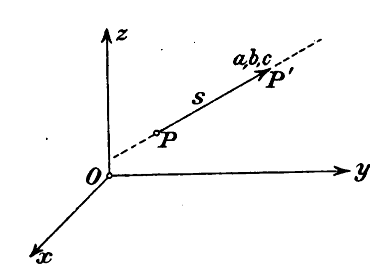


Fig. 195.

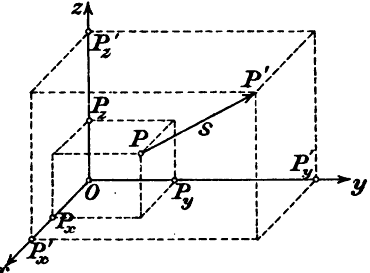


Fig. 196.

2. Gemeine Koordinaten einer Strecke. Sind P_x, P_y, P_z und P_x', P_y', P_z' die Projektionen der Endpunkte P und P' auf die Koordinatenachsen (vgl. § 31, 2), so sind die Strecken (Fig. 196):

$$(3) \qquad X = P_x P_x', \quad Y = P_y P_y', \quad Z = P_z P_z'$$

die orthogonalen *Projektionen der Strecke* PP' (vgl. § 12, 2). Man betrachtet sie zugleich als die *gemeinen rechtwinkligen* oder *rechtwinkligen Parallel-Koordinaten der Strecke.* Haben nun P und P' die gemeinen Koordinaten x, y, z und x', y', z', so folgt nach § 31, 2 und § 1, (5):

Die Koordinaten der Strecke stellen sich durch die Koordinaten ihrer Endpunkte in der Weise dar:

$$(4) \qquad X = x' - x, \quad Y = y' - y, \quad Z = z' - z.$$

3. Beziehung zwischen gemeinen und Polarkoordinaten einer Strecke. Ist allgemein $A'B'$ die orthogonale Projektion einer Strecke AB auf die gerichtete Gerade x (Fig. 197), so ist:

(5) $$A'B' = \overline{AB} \cdot \cos \overline{xs},$$

wo unter dem Kosinus, wie in § 12, (5), s die Strecke AB ihrer Richtung nach bedeutet.

Infolge dieses Satzes ergeben sich *zwischen gemeinen und Polarkoordinaten der Strecke die Beziehungen* (vgl. § 12, (7); (8)):

(6) $$x' - x = as, \quad y' - y = bs, \quad z' - z = cs,$$

aus denen mit Rücksicht auf § 33, (18) folgt:

(7) $$\begin{cases} s = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2} \\ a = \dfrac{x' - x}{s}, \quad b = \dfrac{y' - y}{s}, \quad c = \dfrac{z' - z}{s}. \end{cases}$$

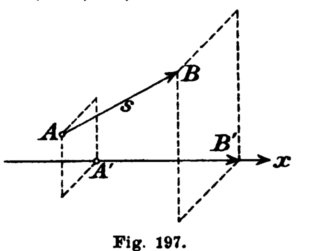


Fig. 197.

4. Beziehung zwischen einer Strecke und ihren Koordinaten. Die Strecke PP' bestimmt ihre Koordinaten eindeutig, aber nicht umgekehrt. Denn parallelgerichtete und gleichlange Strecken haben dieselben Koordinaten (vgl. Fig. 198 und § 12, 4).

Durch die Koordinaten x, y, z ihres Anfangspunktes P und ihre eigenen Koordinaten s, a, b, c oder X, Y, Z ist dagegen die Strecke

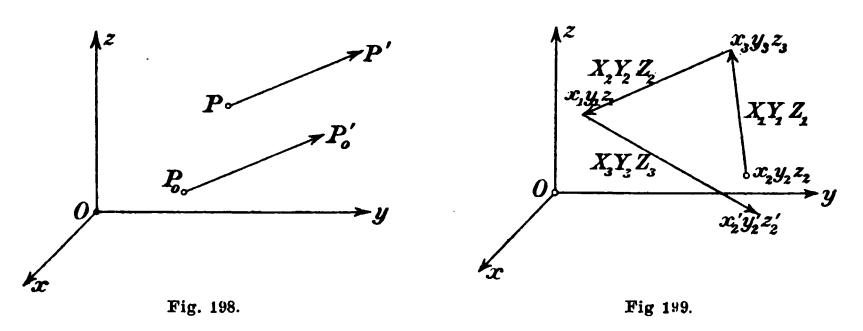


Fig. 198. Fig 199.

vollkommen bestimmt, da alsdann die Formeln (6) oder (4) auch die Koordinaten x', y', z' des Endpunktes liefern.

5. Geschlossene Streckenpolygone. Schließt sich von drei Strecken mit den Koordinaten $X_1 Y_1 Z_1$, $X_2 Y_2 Z_2$, $X_3 Y_3 Z_3$ die zweite an die erste und die dritte an die zweite an, so ist mit der Fig. 199 angegebenen Bezeichnung der Eckpunkte nach (4):

$$\begin{aligned} X_1 &= x_3 - x_2, & X_2 &= x_1 - x_3, & X_3 &= x_2' - x_1, \\ Y_1 &= y_3 - y_2, & Y_2 &= y_1 - y_3, & Y_3 &= y_2' - y_1, \\ Z_1 &= z_3 - z_2, & Z_2 &= z_1 - z_3, & Z_3 &= z_2' - z_1 \end{aligned}$$

und daher:

$$X_1 + X_2 + X_3 = x_2' - x_2, \quad Y_1 + Y_2 + Y_3 = y_2' - y_2, \quad Z_1 + Z_2 + Z_3 = z_2' - z_2.$$

Daraus folgt aber (Fig. 200):

Immer dann und nur dann, wenn drei Strecken ein (auch dem Sinne der Seiten nach) geschlossenes Dreieck bilden, sind die Summen ihrer gleichnamigen Koordinaten Null:[58])

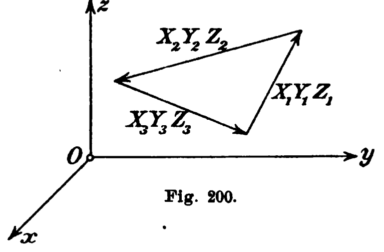


Fig. 200.

$$(8) \quad \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 0, \\ Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0, \\ Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0. \end{cases}$$

In gleicher Weise ergibt sich, daß für vier Strecken, die ein geschlossenes (windschiefes) *Viereck* bilden:

$$(9) \quad \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0, \quad Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 0, \\ Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = 0; \end{cases}$$

und analog für jedes geschlossene *Streckenpolygon* (vgl. § 12, 7).

6. Strecken auf einer und derselben Geraden. Kommen auf *derselben* gerichteten Geraden g mit den Richtungskosinus a, b, c mehrere Strecken PP', QQ' (Fig. 201) in Betracht, so haben diese nach § 34, 1 die Polarkoordinaten s, a, b, c oder $s, -a, -b, -c$ (vgl. § 33, 3), wenn s ihre absolute Länge ist. Es ist aber in solchem

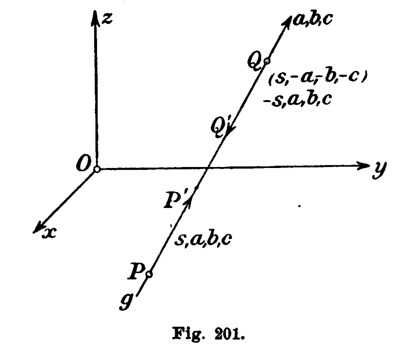


Fig. 201.

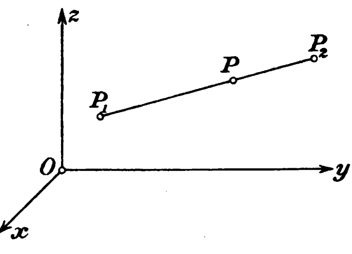


Fig. 202.

Falle oft zweckmäßiger, s, a, b, c und $-s, a, b, c$ als ihre Polarkoordinaten anzusehen, also allen Strecken dieselben Richtungskosinus a, b, c zu geben und ihre Länge s relativ, also positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem ihre Richtung mit der von g übereinstimmt oder ihr entgegengesetzt ist (vgl. § 12, 8).

Die Formeln (6) *behalten auch bei dieser veränderten Auffassung der Polarkoordinaten einer Strecke ihre Gültigkeit,* da sie nur von den Produkten as, bs, cs abhängen.

7. Teilung einer Strecke. Seien (Fig. 202) $P_1 = x_1, y_1, z_1$ und

$P_2 = x_2, y_2, z_2$ zwei Punkte und $P = x, y, z$ derjenige Punkt, der die Strecke $P_1 P_2$ im Verhältnis λ teilt (vgl. § 3, **1**), so daß:

$$\frac{P_1 P}{P_2 P} = \lambda. \tag{10}$$

Sind dann a, b, c die Richtungskosinus der Strecke $P_1 P_2$, so haben die Strecken $P_1 P$ und $P_2 P$ im Sinne von § 34, **6** die Polarkoordinaten $P_1 P$, a, b, c und $P_2 P$, a, b, c, so daß nach (6):

$$x - x_1 = P_1 P \cdot a, \quad y - y_1 = P_1 P \cdot b, \quad z - z_1 = P_1 P \cdot c,$$
$$x - x_2 = P_2 P \cdot a, \quad y - y_2 = P_2 P \cdot b, \quad z - z_2 = P_2 P \cdot c.$$

Hieraus folgt durch Division mit Rücksicht auf (10):

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \lambda, \quad \frac{y - y_1}{y - y_2} = \lambda, \quad \frac{z - z_1}{z - z_2} = \lambda \tag{11}$$

und durch Auflösen nach x, y, z:

Die Koordinaten x, y, z des Punktes, der die Strecke der Punkte x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 im Verhältnis λ teilt, sind (vgl. § 12, (18)):

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}, \quad z = \frac{z_1 - \lambda z_2}{1 - \lambda}. \tag{12}$$

Der *Mittelpunkt* der Strecke hat die Koordinaten:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{13}$$

§ 35. Der Winkel zweier gerichteten Geraden und seine Teilung.

1. Kosinus und Sinus des Winkels zweier gerichteten Geraden. Die Richtungskosinus zweier sich schneidenden oder nicht schneidenden gerichteten Geraden seien a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2. Ihr Winkel $\vartheta = \overline{p_1 p_2}$ ist nach § 32, **1** identisch mit dem Winkel zweier parallelen und gleichgerichteten von O ausgehenden Geraden p_1 und p_2. Auf deren positiven Schenkeln tragen wir von O aus die Längen $OP_1 = OP_2 = 1$ (Fig. 203) ab. Die Punkte P_1 und P_2 haben nach § 33, (16) die Koordinaten $x, y, z = a_1, b_1, c_1$ und a_2, b_2, c_2. Daher ist nach § 34, (7) für ihre absolute Entfernung d:

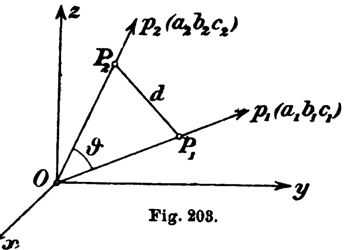


Fig. 203.

$$d^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2$$

oder nach § 33, (18):

$$d^2 = 2 - 2(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2).$$

Andererseits ist aber nach dem Kosinussatz:

$$d^2 = \overline{OP_1}^2 + \overline{OP_2}^2 - 2 . \overline{OP_1} . \overline{OP_2} . \cos\vartheta = 2 - 2\cos\vartheta.$$

Durch Vergleichung beider Gleichungen ergibt sich *für den Kosinus des Winkels zweier Geraden von den Richtungskosinus a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2* [96]):

$$\text{(1)} \qquad \cos\vartheta = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2.$$

Danach ist weiter:

$$\begin{aligned} \sin^2\vartheta &= 1 - (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2)^2 \\ &= (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2)^2 \\ &= (b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (c_1 a_2 - c_2 a_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2, \end{aligned}$$

also da ϑ nach § 32, (2) zwischen 0 und π liegen soll:

$$\text{(2)} \qquad \sin\vartheta = \sqrt{(b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (c_1 a_2 - c_2 a_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}.$$

Wenn die eine der beiden gegebenen Geraden ihre Pfeilspitze wechselt, ändert (vgl. § 33, **3**) $\cos\vartheta$ sein Vorzeichen (vgl. § 13, **1**).

2. Senkrechte und parallele Gerade. Nach (1) ist der Winkel ϑ spitz oder stumpf, je nachdem:

$$\text{(3)} \qquad a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 > 0 \quad \text{oder} < 0;$$

ist ferner $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, wenn:

$$\text{(4)} \qquad a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0.$$

Die beiden Geraden sind in diesem Falle senkrecht zueinander.

Nach (2) ist $\vartheta = 0$ oder π, wenn:

$$\text{(5)} \qquad a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2.$$

Daß in diesem Falle *die beiden Geraden gleichsinnig oder ungleichsinnig parallel sind*, geht schon aus § 33, **8** hervor (vgl. § 13, **2**).

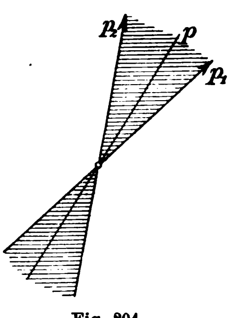
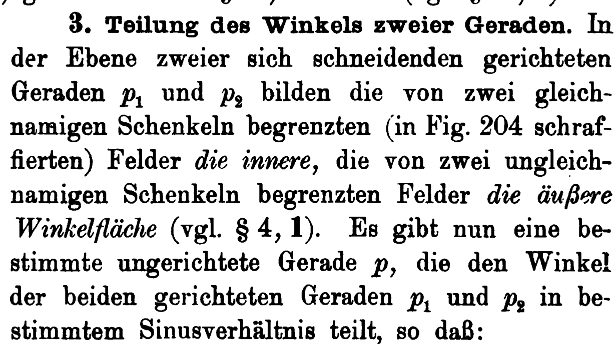


Fig. 204.


3. Teilung des Winkels zweier Geraden. In der Ebene zweier sich schneidenden gerichteten Geraden p_1 und p_2 bilden die von zwei gleichnamigen Schenkeln begrenzten (in Fig. 204 schraffierten) Felder *die innere*, die von zwei ungleichnamigen Schenkeln begrenzten Felder *die äußere Winkelfläche* (vgl. § 4, **1**). Es gibt nun eine bestimmte ungerichtete Gerade p, die den Winkel der beiden gerichteten Geraden p_1 und p_2 in bestimmtem Sinusverhältnis teilt, so daß:

$$(6) \qquad \frac{\sin p_1 p}{\sin p_2 p} = \lambda.$$

Dabei ist λ positiv oder negativ, je nachdem p der äußern oder innern Winkelfläche angehört (§ 4, 2). Wir lassen jetzt die beiden Geraden p_1 und p_2, wie in § 35, 1, von O ausgehen (Fig. 205) und tragen wie dort auf ihren positiven Schenkeln in der Entfernung 1 von 0 die Punkte P_1 und P_2 ab, deren Koordinaten mit den Richtungskosinus von p_1 und p_2 identisch sind. Ist dann P der Schnittpunkt der Geraden p mit der Verbindungslinie der Punkte P_1 und P_2, so ist, nach § 5, (1) mit $\alpha_1 = \alpha_2$, neben (6) auch:

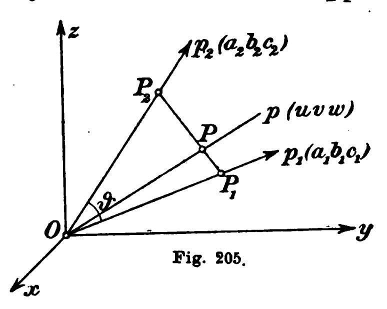


Fig. 205.

$$(7) \qquad \frac{P_1 P}{P_2 P} = \lambda.$$

Der Punkt P hat daher nach § 34, (12) die Koordinaten:

$$x = \frac{a_1 - \lambda a_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{b_1 - \lambda b_2}{1 - \lambda}, \quad z = \frac{c_1 - \lambda c_2}{1 - \lambda}.$$

Sind nun u, v, w die Richtungskosinus und r die absolute Länge des Leitstrahles OP, so ist nach § 33, (15) und (18) und § 35, (1) mit $\vartheta = \overline{p_1 p_2}$:

$$r^2 = \left(\frac{a_1 - \lambda a_2}{1 - \lambda}\right)^2 + \left(\frac{b_1 - \lambda b_2}{1 - \lambda}\right)^2 + \left(\frac{c_1 - \lambda c_2}{1 - \lambda}\right)^2 = \frac{1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos\vartheta}{(1 - \lambda)^2};$$

$$u = \frac{a_1 - \lambda a_2}{(1 - \lambda) r}, \quad v = \frac{b_1 - \lambda b_2}{(1 - \lambda) r}, \quad w = \frac{c_1 - \lambda c_2}{(1 - \lambda) r}.$$

Da aber u, v, w oder $-u$, $-v$, $-w$ zugleich die Richtungskosinus von p sind (vgl. § 33, 3), so ergibt sich (Fig. 205):

Die Richtungskosinus derjenigen ungerichteten Geraden, die den Winkel ϑ zweier gerichteten Geraden a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 im Sinusverhältnis λ teilt, sind:

$$(8) \qquad \begin{cases} u = \dfrac{a_1 - \lambda a_2}{\varrho}, \quad v = \dfrac{b_1 - \lambda b_2}{\varrho}, \quad w = \dfrac{c_1 - \lambda c_2}{\varrho}, \\ \varrho = \sqrt{1 - 2\lambda\cos\vartheta + \lambda^2}. \end{cases}$$

Die Quadratwurzel bleibt im Vorzeichen unbestimmt (vgl. § 13, 5).

4. Die Halbierungslinien eines Winkels. Den Werten $\lambda = -1$ und $\lambda = +1$ entsprechen die *innere* h_1 und *äußere Halbierungslinie* h_2 des Winkels $\overline{p_1 p_2}$. Für die Richtungskosinus derselben folgt daher aus (8), wie § 13, 6:

$$
(9)\quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{a_1 + a_2}{\varrho}, & v_1 = \dfrac{b_1 + b_2}{\varrho}, \quad w_1 = \dfrac{c_1 + c_2}{\varrho}, \quad \varrho = \pm 2 \cos \dfrac{\vartheta}{2}, \\ u_2 = \dfrac{a_1 - a_2}{\varrho}, & v_2 = \dfrac{b_1 - b_2}{\varrho}, \quad w_1 = \dfrac{c_1 - c_2}{\varrho}, \quad \varrho = \pm 2 \sin \dfrac{\vartheta}{2}. \end{cases}
$$

§ 36. Die Koordinaten eines Dreiecks im Raume.

1. Polarkoordinaten einer Dreiecksfläche. Drei Punkte A, B, C des Raumes, die nicht in einer Geraden liegen (Fig. 206), bestimmen ein *Dreieck.* Dieses hat einen bestimmten *absolut gerechneten Flächeninhalt:*

$$(1)\qquad \Delta = \overline{ABC}.$$

Es macht ferner die Ebene, in der es liegt, zu einer gerichteten Ebene (§ 32, 2), indem es durch die Reihenfolge der Ecken A, B, C einen Drehungssinn bestimmt (§ 15, **1**). Diejenige Seite der Ebene, von der aus dieses Drehungssinn positiv erscheint, gilt als *positive*

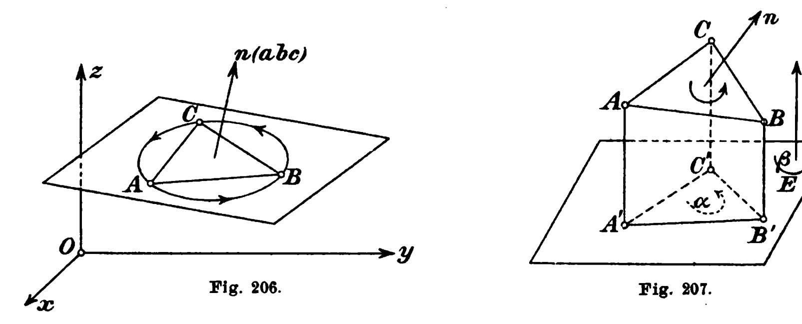


Fig. 206. Fig. 207.

Seite des Dreiecks, bezüglich der Ebene. Die nach dieser Seite laufende Normale n ist die *positive Normale des Dreiecks, bezüglich der Ebene.*

Wir nennen den absoluten Flächeninhalt Δ und die Richtungskosinus a, b, c der positiven Normale die Polarkoordinaten des Dreiecks.[51])

2. Die Orthogonalprojektion des Dreiecks. Die orthogonalen Projektionen A', B', C' der Ecken des Dreiecks ABC auf eine Ebene E bestimmen *die orthogonale Projektion $A'B'C'$ des Dreiecks* (Fig. 207). Auch diese hat im Sinne von § 36, **1** ihre positive Seite, von der aus die der Reihenfolge der Ecken A', B', C' entsprechende Drehung (α in Fig. 207) positiv erscheint.

Ist nun aber für die Ebene E selbst unabhängig von dem Dreieck ihr Drehungssinn (β in Fig. 207), beziehungsweise ihre positive Normale m angegeben, so stimmt die positive Seite der Projektion $A'B'C'$ mit der positiven Seite der gerichteten Ebene entweder überein (wie in Fig. 207) oder nicht. Im ersten Falle soll *der Flächeninhalt der*

Projektion, den wir mit:

$$(2) \qquad \varDelta_E = A'B'C'$$

bezeichnen, *als positiv*, im zweiten *als negativ* gelten.

In diesem Sinne ist der Flächeninhalt der Projektion $A'B'C'$ eines Dreiecks ABC, dessen positive Normale n ist, auf eine gerichtete Ebene mit der positiven Normale m (vgl. § 34, (5)):

$$(3) \qquad A'B'C' = \overline{ABC} \cdot \cos \overline{mn}.$$

3. Gemeine Koordinaten des Dreiecks. Die Koordinatenebenen sind gerichtete Ebenen (vgl. § 32, 8); daher sind die Projektionen $\varDelta_{yz}, \varDelta_{zx}, \varDelta_{xy}$ eines Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ auf sie (Fig. 208) im Sinne von § 36, 2 aufzufassen.

Wir nennen diese Projektionen die gemeinen Koordinaten des Dreiecks (vgl. § 34, 2).

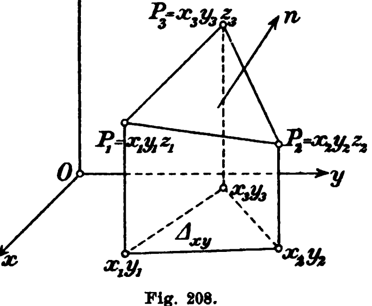


Fig. 208.

4. Beziehung zwischen gemeinen und Polarkoordinaten. Aus (3) folgt daher:

Zwischen den gemeinen Koordinaten $\varDelta_{yz}, \varDelta_{zx}, \varDelta_{xy}$ und den Polarkoordinaten $\varDelta, a, b, c$ (§ 36, 1) *eines Dreiecks bestehen die Beziehungen:*

$$(4) \qquad \varDelta_{yz} = \varDelta a, \quad \varDelta_{zx} = \varDelta b, \quad \varDelta_{xy} = \varDelta c$$

und umgekehrt:

$$(5) \qquad \varDelta = \sqrt{\varDelta_{yz}^2 + \varDelta_{zx}^2 + \varDelta_{xy}^2}, \quad a = \frac{\varDelta_{yz}}{\varDelta}, \quad b = \frac{\varDelta_{zx}}{\varDelta}, \quad c = \frac{\varDelta_{xy}}{\varDelta}.$$

Die gemeinen Koordinaten bestimmen also eindeutig die absolute Größe und die Richtung der positiven Normale des Dreiecks.

5. Darstellung der Koordinaten des Dreiecks durch die Koordinaten der Eckpunkte. Die Koordinaten der Eckpunkte P_1, P_2, P_3 des Dreiecks seien x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3. Die Eckpunkte der Projektion $\varDelta_{xy}$ (Fig. 208) in bezug auf das ebene System Oxy sind nach § 31, 4 x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3. Entsprechendes gilt für $\varDelta_{yz}$ und $\varDelta_{zx}$. Daher ist nach § 15, (6):

$$(6) \qquad 2\varDelta_{yz} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad 2\varDelta_{zx} = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad 2\varDelta_{xy} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Mittels (5) sind danach auch die Polarkoordinaten des Dreiecks durch die Koordinaten der Eckpunkte ausgedrückt (vgl. § 34, (7)).

§ 37. Die Transformation der Koordinaten.

1. Übergang von einem Koordinatensystem zu einem parallelen. Es sei (Fig. 209) $Oxyz$ das ursprüngliche Koordinatensystem und $O'x'y'z'$ ein neues Koordinatensystem, dessen Achsen x', y', z' bezüglich mit den Achsen x, y, z parallel und gleichgerichtet sind, und dessen Anfangspunkt O' in bezug auf $Oxyz$ die Koordinaten x_0, y_0, z_0 hat. Alsdann ist zunächst:

$$x_0 = OO_x', \quad y_0 = OO_y', \quad z_0 = OO_z',$$

wo O_x', O_y', O_z' die Projektionen von O' auf die Achsen x, y, z sind (vgl. § 31, 2), und ferner für die Koordinaten eines beliebigen Punktes P in bezug auf die beiden Koordinatensysteme (vgl. § 14, 1):

$$x = OP_x, \quad y = OP_y, \quad z = OP_z,$$
$$x' = O'P_{x'}, \quad y' = O'P_{y'}, \quad z' = O'P_{z'},$$

wo die Projektionen P_x, P_y, P_z und $P_{x'}, P_{y'}, P_{z'}$ des Punktes P auf je zwei gleichnamige parallele Achsen durch dieselbe projizierende

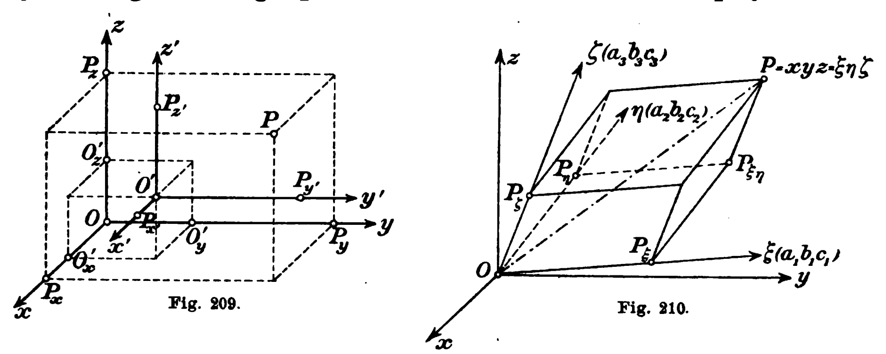


Fig. 209. Fig. 210.

Ebene ausgeschnitten werden. Es besteht nun zwischen den der x- und x'-Achse angehörigen Strecken (Fig. 209) die Beziehung:

$$OP_x = OO_x' + O_x'P_x = OO_x' + O'P_{x'} \quad \text{oder} \quad x = x_0 + x',$$

und ebenso für die anderen Achsen.

Zwischen den Koordinaten x, y, z und x', y', z' eines und desselben Punktes P in bezug auf zwei parallele Systeme, ein altes $Oxyz$ und ein neues $O'x'y'z'$ bestehen die Formeln:

$$(1) \qquad x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y', \quad z = z_0 + z',$$

wo x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des neuen Anfangspunktes im alten System sind.[54])

Dieser Satz gilt mit gleicher Ableitung auch für zwei parallele *schiefwinklige* Systeme.

2. Übergang von einem rechtwinkligen zu einem konzentrischen schiefwinkligen System. Es sei (Fig. 210) $Oxyz$ das ursprüngliche rechtwinklige Koordinatensystem. Die von O ausgehenden Achsen eines schiefwinkligen Systems $O\xi\eta\zeta$ sollen durch ihre Richtungskosinus a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 und a_3, b_3, c_3 gegeben sein (vgl. § 14, 2).

Alsdann sind zunächst (vgl. Fig. 210) die schiefwinkligen Koordinaten ξ, η, ζ eines Punktes P nach § 31, 8:

$$\xi = OP_\xi, \quad \eta = OP_\eta, \quad \zeta = OP_\zeta.$$

Zugleich haben die Strecken OP_ξ, $OP_\eta = P_\xi P_{\xi\eta}$, $OP_\zeta = P_{\xi\eta} P$ (vgl. § 31, (3)) in bezug auf das alte System $Oxyz$ im Sinne von § 34, 6 die Polarkoordinaten:

$$\xi, a_1, b_1, c_1, \quad \eta, a_2, b_2, c_2, \quad \zeta, a_3, b_3, c_3,$$

also nach § 34, (6) die gemeinen Koordinaten:

$$a_1\xi, b_1\xi, c_1\xi, \quad a_2\eta, b_2\eta, c_2\eta, \quad a_3\zeta, b_3\zeta, c_3\zeta.$$

Da andererseits die Strecke PO nach § 34, (4) die gemeinen Koordinaten: $-x, -y, -z$ hat und die vier Strecken OP_ξ, $P_\xi P_{\xi\eta}$, $P_{\xi\eta}P$, PO ein geschlossenes Polygon bilden, so ist nach § 34 (9):

$$a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta - x = 0, \quad b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta - y = 0, \quad c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta - z = 0.$$

Zum Übergang von einem rechtwinkligen System $Oxyz$ zu einem schiefwinkligen System $O\xi\eta\zeta$, dessen Achsen in bezug auf jenes die Richtungskosinus a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 haben, dienen die Formeln[55]*:*

$$(2) \qquad \begin{cases} x = a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta, \\ y = b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta, \\ z = c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta. \end{cases}$$

Ist nun:

$$(3) \qquad D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

die *Determinante der Richtungskosinus der schiefwinkligen Achsen ξ, η, ζ gegen das rechtwinklige System $Oxyz$* und sind:

$$(4) \qquad \begin{cases} A_1 = b_2c_3 - b_3c_2, & A_2 = b_3c_1 - b_1c_3, & A_3 = b_1c_2 - b_2c_1, \\ B_1 = c_2a_3 - c_3a_2, & B_2 = c_3a_1 - c_1a_3, & B_3 = c_1a_2 - c_2a_1, \\ C_1 = a_2b_3 - a_3b_2, & C_2 = a_3b_1 - a_1b_3, & C_3 = a_1b_2 - a_2b_1 \end{cases}$$

die Unterdeterminanten von D, so folgt durch Auflösung (Anm. 2, II, 1) der Gleichungen (2):

$$(5)\qquad \begin{cases} D\xi = A_1 x + B_1 y + C_1 z, \\ D\eta = A_2 x + B_2 y + C_2 z, \\ D\zeta = A_3 x + B_3 y + C_3 z. \end{cases}$$

Damit sind die neuen Koordinaten ξ, η, ζ *durch die alten* x, y, z *dargestellt* (vgl. § 14, (4)).

3. Der Wert der Determinante der neun Richtungskosinus. Bezeichnen wir mit:

$$(6)\qquad a = \cos\overline{\eta\zeta}, \quad b = \cos\overline{\zeta\xi}, \quad c = \cos\overline{\xi\eta}$$

die Kosinus der Winkel der schiefwinkligen Achsen gegeneinander, so daß nach § 35, (1):

$$(7)\qquad \begin{cases} a = a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3, \\ b = a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1, \\ c = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2, \end{cases}$$

so ist nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten (Anm. 1, V, 2) mit Rücksicht auf § 33, (18):

$$D^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 & a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 & a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ a_2 a_1 + b_2 b_1 + c_2 c_1 & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 & a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1 & a_3 a_2 + b_3 b_2 + c_3 c_2 & a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c & b \\ c & 1 & a \\ b & a & 1 \end{vmatrix}$$

oder:

$$(8)\qquad D = \varepsilon\sqrt{1 - a^2 - b^2 - c^2 + 2abc}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Die Determinante D hängt also ihrem absoluten Werte nach nicht mehr von den Richtungskosinus a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3, sondern nur von den Winkeln der Achsen ξ, η, ζ untereinander ab (vgl. (6)). *Sie ändert somit ihren absoluten Wert bei einer Drehung des starr gedachten Systems* $O\xi\eta\zeta$ (*der „Ecke* $O\xi\eta\zeta$“) *um den Punkt* O *nicht* und kann daher bei einer solchen auch ihr Vorzeichen nicht ändern. Man kann dieses folglich aus einer speziellen Lage bestimmen.

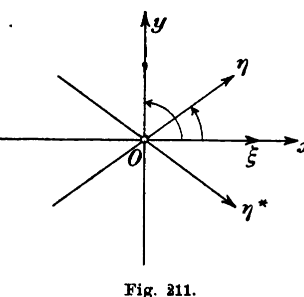


Fig. 211.

Legt man zu dem Ende das starre System $O\xi\eta\zeta$ so, daß die positive ξ-Achse in die positive x-Achse fällt, also $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $c_1 = 0$ wird, so kann es sich nunmehr noch um die x-Achse drehen. Bei einer vollen Drehung um die x-Achse kommt die η-Achse, die einen Rotationskegel beschreibt, zweimal in die xy-Ebene zu liegen (als η oder η^* in Fig. 211), wobei $c_2 = 0$ wird. In einer dieser Lagen bildet sie mit der y-Achse einen spitzen Winkel ($b_2 > 0$), in der andern einen stumpfen ($b_2 < 0$).

Wir legen sie in die erstere Lage, wodurch die xy-Ebene und $\xi\eta$-Ebene gleichen Drehungssinn (Fig. 211), also gleiche positive Seiten (vgl. § 32, 2) erhalten. Mit den Werten $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $c_1 = 0$; $c_2 = 0$ wird nun nach (3) $D = b_2 c_3$, hat also wegen $b_2 > 0$ das Vorzeichen von c_3. Je nachdem daher der Winkel $z\zeta$ spitz oder stumpf ist, d. h. die z- und ζ-Achse auf gleicher oder auf ungleichen Seiten der vereinigten xy- und $\xi\eta$-Ebene liegen, ist $D > 0$ oder < 0, d. h. nach § 32, 8:

Je nachdem die beiden Koordinatensysteme, das rechtwinklige $Oxyz$ und das schiefwinklige $O\xi\eta\zeta$, gleich oder ungleich orientiert sind, ist die Determinante D positiv oder negativ, ist also in (8) $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$.

Bei positiv orientiertem System $Oxyz$ ist daher nach § 32, (9) D der Sinus der Ecke $\xi\eta\zeta$:

Die Determinante der neun Richtungskosinus der drei (gerichteten) Kanten ξ, η, ζ *einer Ecke* (Fig. 212) *in bezug auf ein (positiv orientiertes) rechtwinkliges Koordinatensystem* $Oxyz$ *ist:*

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \sin \xi\eta\zeta, \tag{9}$$

(vgl. § 14, (3)).

4. Übergang von einem rechtwinkligen zu einem konzentrischen rechtwinkligen System.[56]) Ist das neue System $O\xi\eta\zeta$ ebenso

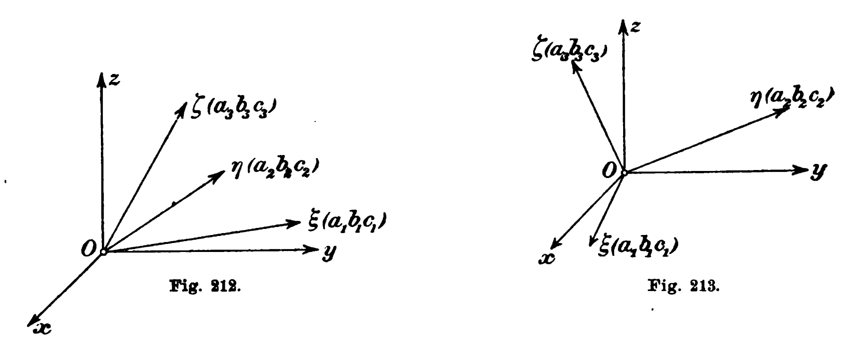


Fig. 212. Fig. 213.

wie das alte rechtwinklig (Fig. 213), so werden die Kosinus (6): $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ und damit (vgl. § 32, (11)) die Determinante der neun Richtungskosinus:

$$D = +1 \quad \text{oder} \quad -1, \tag{10}$$

je nachdem das neue System positiv (wie das alte) oder negativ orientiert ist.[57])

Die Gleichungen (2) *gelten auch jetzt noch,* aber ihren Auflösungen (5)

kann man eine einfachere Form geben. Durch Multiplikation der drei Gleichungen (2) bezüglich mit a_1, b_1, c_1 oder a_2, b_2, c_2 oder a_3, b_3, c_3 und Addition folgt nämlich mit Hinblick auf (7), wo jetzt $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, und § 33, (18):

$$
(11) \quad \begin{cases} \xi = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ \eta = a_2 x + b_2 y + c_2 z, \\ \zeta = a_3 x + b_3 y + c_3 z. \end{cases}
$$

Die Vergleichung dieser Formeln (11) mit den Formeln (5) gibt für $D = +1$ für die Unterdeterminanten (4):

$$
(12) \quad \begin{cases} A_1 = a_1, & A_2 = a_2, & A_3 = a_3, \\ B_1 = b_1, & B_2 = b_2, & B_3 = b_3, \\ C_1 = c_1, & C_2 = c_2, & C_3 = c_3. \end{cases}
$$
[97])

5. Übergang von einem rechtwinkligen zu einem nichtkonzentrischen schiefwinkligen System. Sei in bezug auf ein ursprüngliches rechtwinkliges System $Oxyz$ ein neues schiefwinkliges System $\Omega\xi\eta\zeta$ durch die Koordinaten x_0, y_0, z_0 seines Anfangspunktes Ω und die Richtungskosinus a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 und a_3, b_3, c_3 seiner Achsen ξ, η, ζ gegeben. Man lasse dann von Ω (Fig. 214) ein drittes mit $Oxyz$ paralleles System $\Omega x'y'z'$ ausgehen und bezeichne mit x, y, z; ξ, η, ζ; x', y', z' die Koordinaten eines Punktes P mit bezug auf die drei Systeme. Dann ist nach (1):

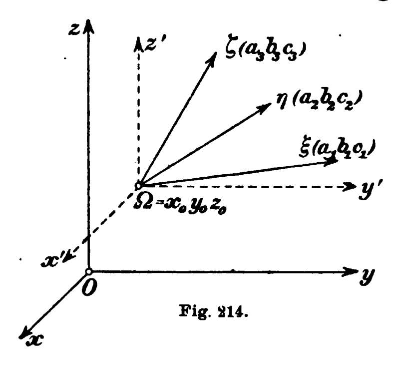


Fig. 214.

$$
x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y', \quad z = z_0 + z'
$$

und, da die Richtungskosinus der Achsen ξ, η, ζ gegen $\Omega x'y'z'$ dieselben sind, wie gegen $Oxyz$ (vgl. § 32, **1**), nach (2):

$$
x' = a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta, \quad y' = b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta, \quad z' = c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta.
$$

Zwischen x, y, z und ξ, η, ζ bestehen daher die Formeln:

$$
(13) \quad \begin{cases} x = x_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta, \\ y = y_0 + b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta, \\ z = z_0 + c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta \end{cases}
$$

und umgekehrt wie in § 37, **2**:

$$
(14) \quad \begin{cases} D\xi = A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0), \\ D\eta = A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) + C_2(z - z_0), \\ D\zeta = A_3(x - x_0) + B_3(y - y_0) + C_3(z - z_0). \end{cases}
$$

Mit $x=0$, $y=0$, $z=0$ erhält man aus (14) für die Koordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 des alten Anfangspunktes O im neuen System:

$$(15)\quad \begin{cases} D\xi_0 = -A_1x_0 - B_1y_0 - C_1z_0, \\ D\eta_0 = -A_2x_0 - B_2y_0 - C_2z_0, \\ D\zeta_0 = -A_3x_0 - B_3y_0 - C_3z_0. \end{cases}$$

Damit aber kann man die Formeln (14) in die einfachere Form bringen (vgl. § 14, (14)):

$$(16)\quad \begin{cases} D\xi = D\xi_0 + A_1x + B_1y + C_1z, \\ D\eta = D\eta_0 + A_2x + B_2y + C_2z, \\ D\zeta = D\zeta_0 + A_3x + B_3y + C_3z. \end{cases}$$

6. Übergang von einem rechtwinkligen System zu einem beliebigen neuen rechtwinkligen System. Ist das System $\Omega\xi\eta\zeta$ recht-

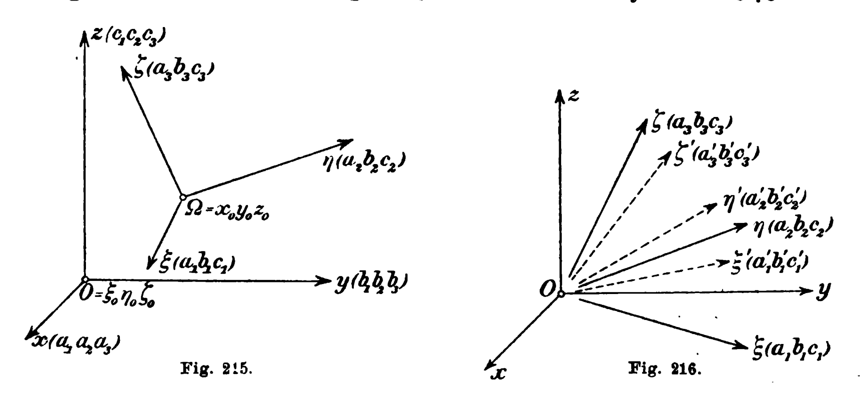


Fig. 215. Fig. 216.

winklig und positiv orientiert wie $Oxyz$, so gelten die Formeln (13) unverändert,[58]) und aus (14) wird mit Rücksicht auf (10) und (12):

$$(17)\quad \begin{cases} \xi = a_1(x-x_0) + b_1(y-y_0) + c_1(z-z_0), \\ \eta = a_2(x-x_0) + b_2(y-y_0) + c_2(z-z_0), \\ \zeta = a_3(x-x_0) + b_3(y-y_0) + c_3(z-z_0) \end{cases}$$

oder mit den neuen Koordinaten des alten Anfangspunktes (Fig. 215):

$$(18)\quad \begin{cases} \xi_0 = -a_1x_0 - b_1y_0 - c_1z_0, \\ \eta_0 = -a_2x_0 - b_2y_0 - c_2z_0, \\ \zeta_0 = -a_3x_0 - b_3y_0 - c_3z_0 \end{cases}$$

einfacher und mit (13) gleichförmig (vgl. § 14, (18)):

$$(19)\quad \begin{cases} \xi = \xi_0 + a_1x + b_1y + c_1z, \\ \eta = \eta_0 + a_2x + b_2y + c_2z, \\ \zeta = \zeta_0 + a_3x + b_3y + c_3z. \end{cases}$$

7. Übergang von einem schiefwinkligen zu einem konzentrischen schiefwinkligen System. Zwei konzentrische schiefwinklige Systeme $O\xi\eta\zeta$ und $O\xi'\eta'\zeta'$ beziehen wir zunächst (Fig. 216) auf ein konzentrisches rechtwinkliges $Oxyz$. In bezug auf dieses haben die Achsen ξ, η, ζ die Richtungskosinus a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 und ξ', η', ζ' die Richtungskosinus a_1', b_1', c_1'; a_2', b_2', c_2'; a_3', b_3', c_3'. Dann ist nach (5) und (2):

$$\begin{aligned} D\xi &= A_1 x + B_1 y + C_1 z, & x &= a_1'\xi' + a_2'\eta' + a_3'\zeta', \\ D\eta &= A_2 x + B_2 y + C_2 z, & y &= b_1'\xi' + b_2'\eta' + b_3'\zeta', \\ D\zeta &= A_3 x + B_3 y + C_3 z, & z &= c_1'\xi' + c_2'\eta' + c_3'\zeta'. \end{aligned}$$

Die Elimination von x, y, z ergibt hieraus zunächst für ξ:

$$\begin{aligned} D\xi = (A_1 a_1' + B_1 b_1' + C_1 c_1')\,\xi' &+ (A_1 a_2' + B_1 b_2' + C_1 c_2')\,\eta' \\ &+ (A_1 a_3' + B_1 b_3' + C_1 c_3')\,\zeta'. \end{aligned}$$

Da aber nach (4) und (9):

$$A_1 a_1' + B_1 b_1' + C_1 c_1' = \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \sin \xi'\eta\zeta, \text{ usw.},$$

so ergibt sich schließlich unabhängig von dem rechtwinkligen System $Oxyz$:

Zwischen den Koordinaten ξ, η, ζ und ξ', η', ζ' in bezug auf zwei konzentrische schiefwinklige Koordinatensysteme bestehen die Gleichungen:

$$(20)\quad \begin{cases} \sin \xi\eta\zeta \cdot \xi = \sin \xi'\eta\zeta \cdot \xi' + \sin \eta'\eta\zeta \cdot \eta' + \sin \zeta'\eta\zeta \cdot \zeta', \\ \sin \xi\eta\zeta \cdot \eta = \sin \xi\xi'\zeta \cdot \xi' + \sin \xi\eta'\zeta \cdot \eta' + \sin \xi\zeta'\zeta \cdot \zeta', \\ \sin \xi\eta\zeta \cdot \zeta = \sin \xi\eta\xi' \cdot \xi' + \sin \xi\eta\eta' \cdot \eta' + \sin \xi\eta\zeta' \cdot \zeta', \end{cases}$$

wo die Koeffizienten die Sinus der bezüglichen Ecken sind (vgl. § 14, (19)).

§ 38. Die Eulerschen Winkel.

1. Die Knotenlinie und die Knotenpunkte zweier rechtwinkligen Koordinatensysteme $Oxyz$ und $O\xi\eta\zeta$. Es seien $Oxyz$ und $O\xi\eta\zeta$ (Fig. 217) zwei konzentrische positiv orientierte rechtwinklige Koordinatensysteme. Die xy-Ebene sei horizontal gestellt, die positive z-Achse nach oben gerichtet. Wir markieren den positiven Drehungssinn der xy- und $\xi\eta$-Ebene je auf einem Kreise, der in der Ebene mit dem Radius 1 um O beschrieben ist.

Die beiden Ebenen schneiden sich in einer Geraden k, welche die *Knotenlinie* der beiden Systeme heißt. Ihre Schnittpunkte X_2

und X_1 mit dem Einheitskreis werden als *aufsteigender* und *absteigender Knotenpunkt* unterschieden, da in dem einen, X_2, der Einheitskreis der $\xi\eta$-Ebene seinem positiven Drehungssinne nach von der negativen (unteren) Seite der xy-Ebene auf die positive (obere) hinaufsteigt, im andern, X_1, aber ebenso hinabsteigt. Die Richtung von X_1 nach X_2 betrachten wir als *positive Richtung der Knotenlinie.*

2. Einführung eines Hilfssystems $O\xi'\eta'\zeta$. Wir führen in der $\xi\eta$-Ebene *ein neues ebenes Koordinatensystem* $O\xi'\eta'$ ein, dessen positive ξ'-Achse (Fig. 218) in die positive Knotenlinie fällt und dessen positive

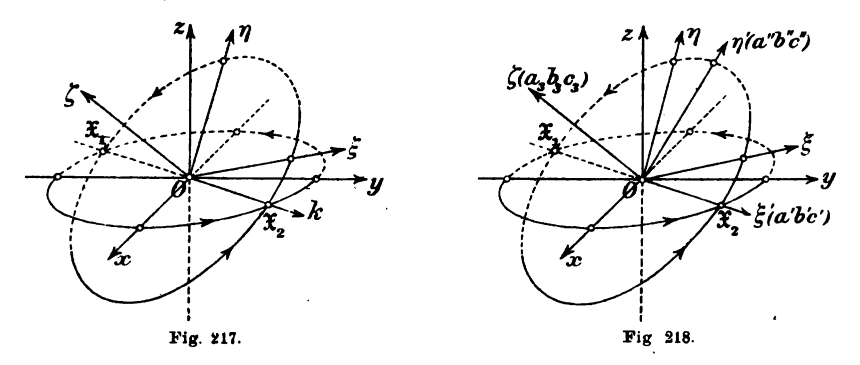


Fig. 217. Fig. 218.

η'-Achse senkrecht zur Knotenlinie und *oberhalb* der xy-Ebene gelegen ist, also mit der positiven z-Achse einen *spitzen* Winkel bildet. Das Achsensystem $O\xi'\eta'$ ist dann mit $O\xi\eta$ gleich orientiert; auch $O\xi'\eta'\zeta$ ist ebenso wie $O\xi\eta\zeta$ positiv orientiert.

3. Bestimmung des Richtungskosinus der Achsen ξ', η'. Die Richtungskosinus der ζ-Achse in bezug auf $Oxyz$ seien a_3, b_3, c_3; diejenigen der Achsen ξ' und η' aber a', b', c' und a'', b'', c''. Die ξ'-Achse (a', b', c') steht als Knotenlinie auf der z-Achse $(0, 0, 1)$ und der ζ-Achse (a_3, b_3, c_3) senkrecht, so daß nach § 35, (4):

$$c' = 0, \quad a_3 a' + b_3 b' = 0; \qquad a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1,$$

und daher mit noch zu bestimmendem $\varepsilon = \pm 1$:

$$a' = -\frac{\varepsilon b_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}, \quad b' = \frac{\varepsilon a_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}, \quad c' = 0.$$

Die Achse η' (a'', b'', c'') ist zur Knotenlinie (a', b', c') und zur ζ-Achse (a_3, b_3, c_3) senkrecht, also ist nach § 35, (4):

$$-b_3 a'' + a_3 b'' = 0, \quad a_3 a'' + b_3 b'' + c_3 c'' = 0; \quad a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1,$$

woraus sich mit $\delta = \pm 1$ ergibt:

$$a'' = -\frac{\delta a_3 c_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}, \quad b'' = -\frac{\delta b_3 c_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}, \quad c'' = \delta\sqrt{a_3^2 + b_3^2}.$$

Nun ist aber, da η' mit z einen spitzen Winkel bilden soll, $c'' > 0$, also $\delta = 1$. Da ferner $O\xi'\eta'\zeta$ positiv orientiert sein soll, ist nach § 37, (10):

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon}{a_3^2 + b_3^2} \begin{vmatrix} -b_3 & a_3 & 0 \\ -a_3 c_3 & -b_3 c_3 & a_3^2 + b_3^2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\varepsilon}{a_3^2 + b_3^2} \begin{vmatrix} -b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \varepsilon = 1 \text{ (Anm. 1, IV, 4).}$$

Demnach drücken sich, indem noch $a_3^2 + b_3^2 = 1 - c_3^2$ gesetzt wird, *die Richtungskosinus der Achsen* ξ' *und* η' *durch die von* ζ *wie folgt aus:*

$$(1) \qquad a' = -\frac{b_3}{\sqrt{1-c_3^2}}, \qquad b' = \frac{a_3}{\sqrt{1-c_3^2}}, \qquad c' = 0,$$

$$(2) \qquad a'' = -\frac{a_3 c_3}{\sqrt{1-c_3^2}}, \qquad b'' = -\frac{b_3 c_3}{\sqrt{1-c_3^2}}, \qquad c'' = \sqrt{1-c_3^2}.$$

4. Darstellung der Richtungskosinus der Achsen ξ', η', ζ durch zwei Parameter. Sind jetzt (Fig. 219):

$$(3) \qquad \chi = \overline{z\zeta}, \qquad \varphi = \overline{x\xi'}$$

der absolute konkave Winkel der ζ- gegen die z-Achse (§ 33, 2) und φ der Richtungswinkel von ξ' in dem ebenen Koordinatensystem Oxy

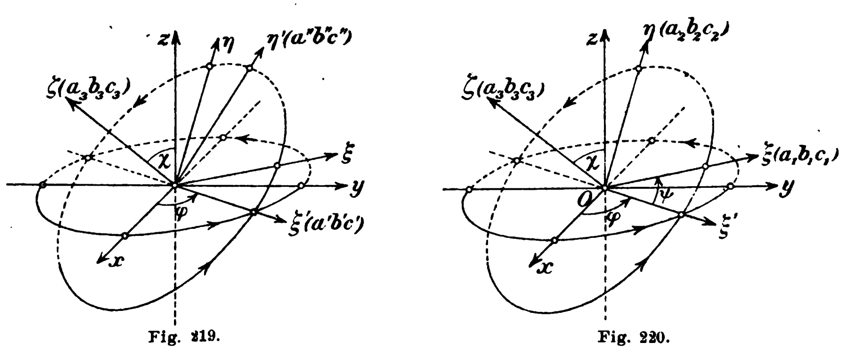


Fig. 219. Fig. 220.

(§ 11, (1)), so ist, da a', b' zugleich die Richtungskosinus von ξ' in diesem sind (§ 11, (11)):

$$(4) \qquad c_3 = \cos\chi, \quad \sqrt{1-c_3^2} = \sin\chi; \quad a' = \cos\varphi, \quad b' = \sin\varphi.$$

Die Kombination der Gleichungen (1), (2) und (4) ergibt aber unter Auflösung der Gleichungen (1) nach a_3, b_3:

$$(5)\quad \begin{cases} a' = \cos\varphi, & b' = \sin\varphi, & c' = 0, \\ a'' = -\sin\varphi\cdot\cos\chi, & b'' = \cos\varphi\cdot\cos\chi, & c'' = \sin\chi, \\ a_3 = \sin\varphi\cdot\sin\chi, & b_3 = -\cos\varphi\cdot\sin\chi, & c_3 = \cos\chi. \end{cases}$$

Die neun Richtungskosinus des Systems $O\xi'\eta'\zeta$ sind damit durch die beiden Winkel φ und χ dargestellt.

5. Koordinatentransformation von $Oxyz$ auf $O\xi'\eta'\zeta$ und von $O\xi'\eta'\zeta$ auf $O\xi\eta\zeta$. Nach § 37, (2) bestehen zwischen den Koordinaten x, y, z und ξ', η', ζ' eines Punktes P in bezug auf die beiden Systeme $Oxyz$ und $O\xi'\eta'\zeta$ die Beziehungen:

$$(6)\quad \begin{cases} x = a'\xi' + a''\eta' + a_3\zeta', \\ y = b'\xi' + b''\eta' + b_3\zeta', \\ z = c'\xi' + c''\eta' + c_3\zeta'. \end{cases}$$

Ist ferner (Fig. 220) ψ der Richtungswinkel der Achse ξ in dem ebenen System $O\xi'\eta'$ (vgl. § 11, (1)), so bestehen zwischen den Koordinaten ξ', η', ζ' und ξ, η, ζ des Punktes P in bezug auf die beiden Systeme $O\xi'\eta'\zeta$ und $O\xi\eta\zeta$ (§ 38, **2**; **1**) die Gleichungen (vgl. § 14, (9)):

$$(7)\quad \begin{cases} \xi' = \xi\cos\psi - \eta\sin\psi, \\ \eta' = \xi\sin\psi + \eta\cos\psi, \\ \zeta' = \zeta. \end{cases}$$

Die Kombination der Gleichungen (6) und (7) gibt:

$$(8)\quad \begin{cases} x = (a'\cos\psi + a''\sin\psi)\,\xi + (-a'\sin\psi + a''\cos\psi)\,\eta + a_3\zeta, \\ y = (b'\cos\psi + b''\sin\psi)\,\xi + (-b'\sin\psi + b''\cos\psi)\,\eta + b_3\zeta, \\ z = (c'\cos\psi + c''\sin\psi)\,\xi + (-c'\sin\psi + c''\cos\psi)\,\eta + c_3\zeta. \end{cases}$$

6. Darstellung der neun Richtungskosinus durch drei Parameter. Vergleicht man diese Formeln, die zwischen den Koordinaten x, y, z und ξ, η, ζ eines Punktes P mit bezug auf die Systeme $Oxyz$ und $O\xi\eta\zeta$ bestehen, mit den gleichbedeutenden Formeln § 37, (2), so ergibt sich unter Benutzung von (5):

Sind $Oxyz$ und $O\xi\eta\zeta$ zwei positiv orientierte rechtwinklige Koordinatensysteme, so drücken sich die neun Richtungskosinus $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$, $a_3b_3c_3$ der Achsen ξ, η, ζ gegen das System $Oxyz$ durch drei unabhängige Winkel φ, ψ, χ in folgender Weise aus:[98])

$$(9)\quad \begin{cases} a_1 = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\chi, \\ b_1 = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\chi, \\ c_1 = \sin\psi\sin\chi, \\ a_2 = -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\chi, & a_3 = \sin\varphi\sin\chi, \\ b_2 = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\chi, & b_3 = -\cos\varphi\sin\chi, \\ c_2 = \cos\psi\sin\chi, & c_3 = \cos\chi. \end{cases}$$

Hier ist $\chi = z\zeta$ *der Winkel zwischen der* z- *und* ζ-*Achse*, $\varphi = x\xi'$ *der Richtungswinkel der Knotenlinie* ξ' *gegen die* x-*Achse in der* xy-*Ebene und* $\psi = \xi'\xi$ *der Richtungswinkel der* ξ-*Achse gegen die Knotenlinie* ξ' *in der* $\xi\eta$-*Ebene* (Fig. 220).

§ 39. Der Rauminhalt des Tetraeders.

1. Absoluter und relativer Rauminhalt. Vier Punkte A, B C, D des Raumes, die nicht in einer Ebene liegen, bestimmen ein *Tetraeder* $ABCD$ (Fig. 221a). Indem wir nun die vier Punkte nicht unterschiedslos als dessen Eckpunkte ansehen, sondern *die für das Symbol* $ABCD$ *gewählte Reihenfolge der Eckpunkte betonen, legen wir*

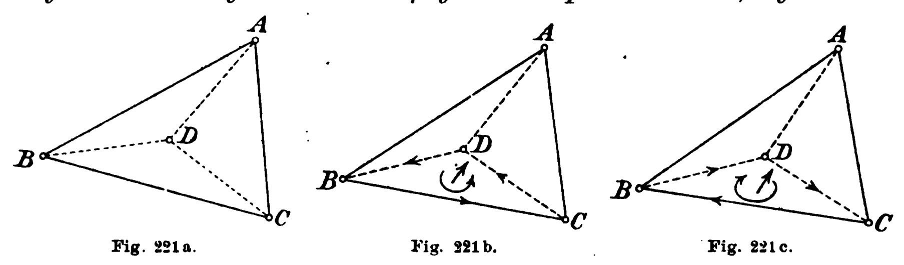


Fig. 221a. Fig. 221b. Fig. 221c.

dem Tetraeder einen bestimmten Schraubensinn bei, der positiv oder negativ sein mag, je nachdem der Punkt A auf der positiven oder negativen Seite der durch den Drehungssinn des Dreiecks BCD (vgl. § 15, 1) gerichteten Ebene dieses Dreiecks (vgl. § 32, 2) liegt. Wir deuten den Schraubensinn (Fig. 221b) durch das § 32, 7 eingeführte Zeichen an.

Das Symbol $ABDC$ würde das Tetraeder der nämlichen vier Punkte mit verändertem Schraubensinn (Fig. 221c) bedeuten.

Der absolute Rauminhalt $\overline{ABCD}$ des Tetraeders ist von dem Schraubensinn unabhängig, also (vgl. § 15, (1)):

$$(1) \qquad \overline{ABDC} = \overline{ABCD}.$$

Der relative Rauminhalt[6]) $ABCD$ dagegen soll seinem absoluten Betrage nach gleich $\overline{ABCD}$, seinem Vorzeichen nach aber *positiv* oder *negativ* sein, *je nachdem der Schraubensinn des Tetraeders* $ABCD$ *positiv oder negativ ist.*

2. Die Vertauschung der Eckpunktfolge. Es ist daher zunächst, wenn A an erster Stelle bleibt, nach dem Drehungssinn des Dreiecks BCD (§ 15, (2))

$$(2) \quad ABCD = ACDB = ADBC = -ABDC = -ACBD = -ADCB.$$

Aus dem Anblick, den die Seitenfläche BCD bezüglich ihres Drehungssinnes von der gegenüberliegenden Ecke A aus bietet, kann man aber auch auf den Anblick schließen, den die andern Seitenflächen des Tetraeders bezüglich ihres Drehungssinnes von den ihnen gegenüberliegenden Ecken aus bieten. Breitet man nämlich das Netz des positiv geschraubten Tetraeders $ABCD$ (Fig. 221b) in der von ihrer positiven Seite gesehenen Ebene BCD als Zeichnungsebene aus (Fig. 222), so erscheinen die Drehungssinne der Dreiecke:

$$ADC, \quad ABD, \quad ACB$$

auch positiv; ebenso werden sie aber von ihren gegenüberliegenden Ecken:

$$B, \quad C, \quad D$$

aus positiv erscheinen, wenn man die Dreiecke wieder nach vorn in den Raum hinein klappt bis zur Vereinigung der drei Punkte A. Daher ist das Tetraeder $ABCD$ auch in der Bezeichnung:

$$BADC, \quad CABD, \quad DACB$$

positiv geschraubt in dem Sinne, daß von der ersten Ecke der Drehungssinn des Dreiecks der drei folgenden positiv erscheint. Das

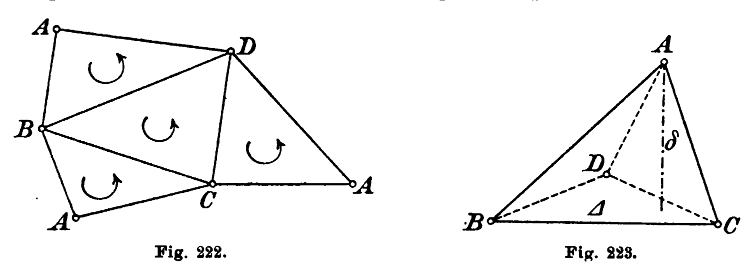


Fig. 222. Fig. 223.

Analoge würde sich aber für ein negativ geschraubtes Tetraeder $ABCD$ ergeben, so daß auf jeden Fall:

$$(3) \qquad ABCD = BADC = CABD = DACB.$$

Die Kombination der Formeln (2) und (3) zeigt aber, daß *der durch die Permutation $ABCD$ dargestellte Rauminhalt sein Vorzeichen bei jeder Transposition* (Vertauschung *zweier Buchstaben*) *wechselt.*[7])

3. Darstellung des relativen Rauminhalts durch Grundfläche und Höhe. Wir bezeichnen (Fig. 223) *mit $\Delta = \overline{BCD}$ den absoluten Flächeninhalt des Dreiecks BCD* (Grundfläche des Tetraeders) und *mit δ den senkrechten Abstand des Punktes A von der Ebene BCD* (Höhe des Tetraeders) *und rechnen diesen Abstand positiv oder*

negativ, je nachdem A auf der positiven oder negativen Seite der durch den Drehungssinn des Dreiecks BCD gerichteten Ebene liegt.

Alsdann ist nach § 39, **1** *der relative Rauminhalt des Tetraeders:*

$$ABCD = \tfrac{1}{3} \Delta \delta. \tag{4}$$

4. Darstellung des relativen Rauminhaltes durch die Koordinaten der Eckpunkte. In bezug auf ein *rechtwinkliges positiv orientiertes* Koordinatensystem $Oxyz$ seien $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$, $x_4 y_4 z_4$ die Koordinaten der vier Eckpunkte P_1, P_2, P_3, P_4 eines Tetraeders. Wir führen ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem $\Omega \xi \eta \zeta$ ein (Fig. 224), in bezug auf welches die vier Punkte die Koordinaten $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$, $\xi_2 \eta_2 \zeta_2$, $\xi_3 \eta_3 \zeta_3$, $\xi_4 \eta_4 \zeta_4$ haben mögen. Der Anfangspunkt Ω dieses neuen Systems sei der Punkt P_4, so daß

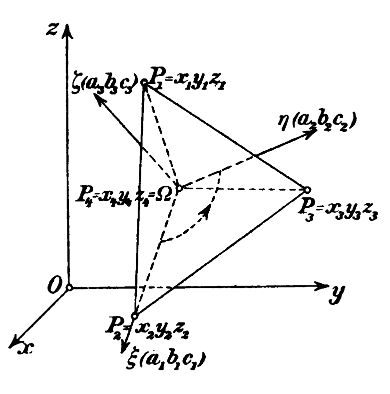


Fig. 224.

$$\xi_4 = 0, \quad \eta_4 = 0, \quad \zeta_4 = 0;$$

die positive ξ-Achse laufe von P_4 nach P_2, worauf:

$$\xi_2 > 0, \quad \eta_2 = 0, \quad \zeta_2 = 0;$$

die η-Achse sei in der Ebene $P_4 P_2 P_3$ senkrecht zur ξ-Achse und nach derjenigen Seite der ξ-Achse gerichtet, auf der P_3 liegt; dann ist:

$$\eta_3 > 0, \quad \zeta_3 = 0,$$

und stimmt der Drehungssinn, den die $\xi\eta$-Ebene als Koordinatenebene hat (in Fig. 224 durch den Pfeilbogen angedeutet) mit dem Drehungssinn des Dreiecks $P_4 P_2 P_3 = P_2 P_3 P_4$ überein; endlich sei die ζ-Achse die positive Normale der $\xi\eta$-Ebene, so daß $\Omega\xi\eta\zeta$ ein *positiv orientiertes* Koordinatensystem wird. Je nachdem dann P_1 auf der positiven oder negativen Seite der Ebene $P_2 P_3 P_4$ gelegen ist, wird $\zeta_1 > 0$ oder $\zeta_1 < 0$.

Danach ist im Sinne von § 39, **3**:

$$\Delta = \overline{P_2 P_3 P_4} = \tfrac{1}{2} \xi_2 \eta_3; \qquad \delta = \zeta_1,$$

also nach (4):

$$P_1 P_2 P_3 P_4 = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \xi_2 \eta_3 \zeta_1.$$

Hierfür kann man aber, da $\eta_2 = 0$, $\zeta_2 = 0$, $\zeta_3 = 0$ ist, auch schreiben:

$$6 \,.\, P_1 P_2 P_3 P_4 = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Sind nun $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3$ die Richtungskosinus der Achsen ξ, η, ζ (Fig. 224), so wird nach § 37, (17) aus (5):

$$6 . P_1 P_2 P_3 P_4 = \begin{vmatrix} a_1(x_1-x_4)+b_1(y_1-y_4)+c_1(z_1-z_4) & a_2(x_1-x_4)+b_2(y_1-y_4)+c_2(z_1-z_4) & \dots \\ a_1(x_2-x_4)+b_1(y_2-y_4)+c_1(z_2-z_4) & a_2(x_2-x_4)+b_2(y_2-y_4)+c_2(z_2-z_4) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

und nach dem Multiplikationstheorem (Anm. 1, V, 2):

$$6 . P_1 P_2 P_3 P_4 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix}$$

oder, da hier nach § 37, (10) der erste Faktor $D = 1$ ist:

$$(6) \qquad 6 . P_1 P_2 P_3 P_4 = \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix} .$$

Durch Ränderung der Determinante ergibt sich hieraus (Anm. 1, III, (17)):

$$6 . P_1 P_2 P_3 P_4 = \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 & 0 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 & 0 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

und folgt daher schließlich (Anm. 1, IV, 4):

Der sechsfache relative Rauminhalt des Tetraeders $P_1 P_2 P_3 P_4$ drückt sich durch die Koordinaten der vier Ecken in bezug auf ein rechtwinkliges positiv orientiertes Koordinatensystem (Fig. 224) *folgendermaßen aus* (vgl. § 15, (6); § 1, (5)):

$$(7) \qquad 6 . P_1 P_2 P_3 P_4 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} .$$

Bei einer Transposition der Indizes 1, 2, 3, 4 ändert sich[7]), wie nach § 39, 2 erforderlich, das Vorzeichen des Ausdrucks (7).

5. Eine Ecke des Tetraeders im Koordinatenanfangspunkt. Wenn die Ecke $P_4 = x_4, y_4, z_4$ nach $O = 0, 0, 0$ verlegt wird, so folgt aus (7) (vgl. § 15, (4)):

$$(8) \qquad 6 . P_1 P_2 P_3 O = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

als sechsfacher relativer Rauminhalt eines Tetraeders, das den Koordinatenanfangspunkt und drei durch ihre Koordinaten gegebene Punkte P_1, P_2, P_3 *zu Ecken hat* (Fig. 225).

6. Darstellung des relativen Rauminhaltes mittels dreier Kanten. Führt man jetzt die Polarkoordinaten der Punkte P_1, P_2, P_3, also die absoluten Lösungen r_1, r_2, r_3 und die Richtungskosinus $a_1, b_1, c_1;\ a_2, b_2, c_2;\ a_3, b_3, c_3$ der Kanten OP_1, OP_2, OP_3 (Fig. 225) ein, so wird nach § 33, (14) (vgl. Anm. 1, IV, 5):

$$6\,.\,P_1P_2P_3O = \begin{vmatrix} a_1r_1 & b_1r_1 & c_1r_1 \\ a_2r_2 & b_2r_2 & c_2r_2 \\ a_3r_3 & b_3r_3 & c_3r_3 \end{vmatrix} = r_1r_2r_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Die Determinante der neun Richtungskosinus ist aber nach § 37, (9) gleich $\sin r_1 r_2 r_3$, wenn wir unter dem Symbol Sinus mit r_1, r_2, r_3 die drei Kanten OP_1, OP_2, OP_3 auch ihrer Richtung nach bezeichnen (vgl. § 33, 4). Daher folgt unabhängig vom Koordinatensystem $Oxyz$ (vgl. § 15, (3)):

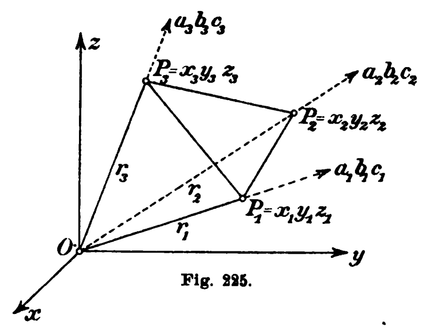


Fig. 225.

Sind r_1, r_2, r_3 *die absoluten Längen dreier von einem Eckpunkte O des Tetraeders* $P_1P_2P_3O$ *ausgehenden Kanten* (Fig. 225) *und* $\sin r_1 r_2 r_3$ *der Sinus der von ihnen gebildeten Ecke, so ist der sechsfache relative Rauminhalt des Tetraeders:*

$$(9)\qquad 6\,.\,P_1P_2P_3O = r_1r_2r_3 \cdot \sin r_1r_2r_3.$$

7. Die Tetraeder aus fünf Punkten des Raumes. Wenn man die mit den Koordinaten von fünf Punkten P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 gebildete identische (Anm. 1, IV, 3) Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 & 1 \\ x_5 & y_5 & z_5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

nach den Elementen der letzten Kolonne entwickelt, so ergibt sich mit Rücksicht auf (7) unter Weglassung des Faktors 6, der *vom Koordinatensystem* $Oxyz$ *unabhängige* Satz (vgl. § 15, 4):

Zwischen den relativen Rauminhalten der fünf aus fünf Punkten

P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 gebildeten Tetraeder besteht stets die Beziehung[8]):

(10) $P_2P_3P_4P_5 + P_3P_4P_5P_1 + P_4P_5P_1P_2 + P_5P_1P_2P_3 + P_1P_2P_3P_4 = 0.$

8. Der relative Rauminhalt des Tetraeders in schiefwinkligen Koordinaten. Führen wir statt des positiv orientierten rechtwinkligen Koordinatensystems, auf das sich die Formeln (6) und (7) beziehen, ein konzentrisches schiefwinkliges System $O\xi\eta\zeta$ ein (Fig. 226), so ist nach § 37, (2) für $i = 1, 2, 3, 4$:

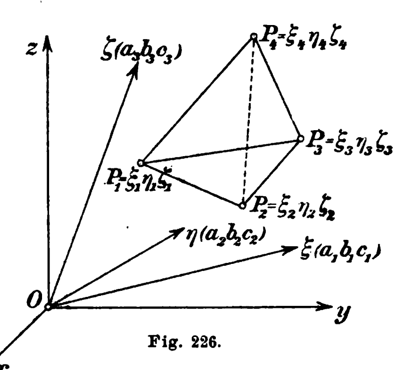


Fig. 226.

$$x_i = a_1\xi_i + a_2\eta_i + a_3\zeta_i,$$
$$y_i = b_1\xi_i + b_2\eta_i + b_3\zeta_i,$$
$$z_i = c_1\xi_i + c_2\eta_i + c_3\zeta_i,$$

wo a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 die Richtungskosinus der Achsen des neuen Systems $O\xi\eta\zeta$ sind. Es wird daher aus (6):

$$6 . P_1P_2P_3P_4 =$$
$$\begin{vmatrix} a_1(\xi_1-\xi_4)+a_2(\eta_1-\eta_4)+a_3(\zeta_1-\zeta_4) & b_1(\xi_1-\xi_4)+b_2(\eta_1-\eta_4)+b_3(\zeta_1-\zeta_4) & \cdots \\ a_1(\xi_2-\xi_4)+a_2(\eta_2-\eta_4)+a_3(\zeta_2-\zeta_4) & b_1(\xi_2-\xi_4)+b_2(\eta_2-\eta_4)+b_3(\zeta_2-\zeta_4) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1-\xi_4 & \eta_1-\eta_4 & \zeta_1-\zeta_4 \\ \xi_2-\xi_4 & \eta_2-\eta_4 & \zeta_2-\zeta_4 \\ \xi_3-\xi_4 & \eta_3-\eta_4 & \zeta_3-\zeta_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 & 1 \\ \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 & 1 \end{vmatrix},$$

wie beim Übergang von (6) zu (7), und endlich nach § 37, (9) *unabhängig von $Oxyz$* (vgl. § 15, (9)):

$$(11) \qquad 6 . P_1P_2P_3P_4 = \sin\xi\eta\zeta \cdot \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 & 1 \\ \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

In dieser Formel für den sechsfachen relativen Rauminhalt des Tetraeders bedeuten ξ_i, η_i, ζ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ die auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem $O\xi\eta\zeta$ (Fig. 226) *bezogenen Koordinaten der vier Eckpunkte und* $\sin\xi\eta\zeta$ *den Sinus des Dreikants der Koordinatenachsen.*[59])

II. Kapitel.

Die Gleichungen der Ebene und der geraden Linie.

§ 40. Die Gleichung der Ebene.

1. Die Gleichung der durch drei Punkte bestimmten Ebene. *Jede Ebene kann man sich durch drei getrennte Punkte* P_1, P_2, P_3 *des Raumes, die nicht in einer Geraden liegen, bestimmt denken.* Ein

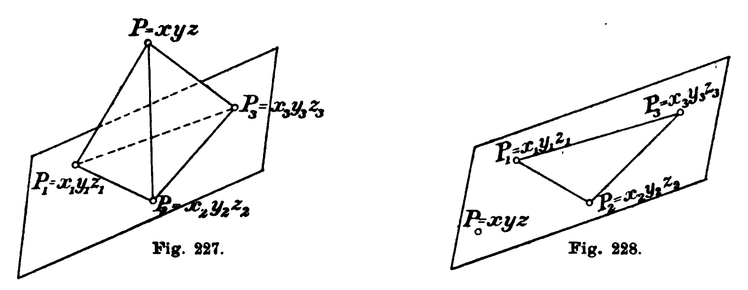


Fig. 227. Fig. 228.

vierter, laufender Punkt P des Raumes (Fig. 227) bildet mit jenen ein Tetraeder $PP_1P_2P_3$ und liegt (§ 39, (4)) *immer dann und nur dann in der Ebene* $P_1P_2P_3$, wenn der Rauminhalt des Tetraeders Null ist. Mit Rücksicht auf § 39, (7) ergibt sich daher bei Einführung der rechtwinkligen Koordinaten der Punkte (vgl. § 16, (5)):

Der Punkt $P = x, y, z$ *liegt immer dann und nur dann in der Ebene der drei Punkte* $P_1 = x_1, y_1, z_1$; $P_2 = x_2, y_2, z_2$; $P_3 = x_3, y_3, z_3$ (Fig. 228), *wenn:*

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Man nennt (1) die *Gleichung der Ebene* $P_1P_2P_3$ *in laufenden Koordinaten* x, y, z. Der Satz gilt nach § 39, 8 auch für schiefwinklige Koordinaten, ebenso wie die Sätze in § 40, 3—5.[64])

2. Bedeutung der Koeffizienten der Gleichung der durch drei Punkte bestimmten Ebene. Nach den laufenden Koordinaten geordnet (Anm. 1, III, (17)), lautet die Gleichung (1):

$$(2) \qquad Ax + By + Cz + D = 0,$$

wo die Koeffizienten A, B, C, D die Werte haben:

$$(3)\quad \begin{cases} A = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \\ D = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Jeder dieser Ausdrücke hat eine geometrische Bedeutung. Nach § 36, (6) sind:

$$(4)\qquad A = 2\Delta_{yz}, \quad B = 2\Delta_{zx}, \quad C = 2\Delta_{xy}$$

die doppelten gemeinen Koordinaten des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$, und nach § 39, (8) ist:

$$(5)\qquad D = 6 \,.\, O P_1 P_2 P_3$$

der sechsfache Rauminhalt des Tetraeders $O P_1 P_2 P_3$ (vgl. § 39, 2).

3. Allgemeine Form der Gleichung der Ebene. *Jede gegebene Ebene kann nach* § 40, **1**; **2** *durch eine Gleichung von der Form:*

$$(6)\qquad Ax + By + Cz + D = 0$$

dargestellt werden.[61])

Ist jetzt umgekehrt die Gleichung (6) mit willkürlichen Koeffizienten A, B, C, D gegeben, so wird sie jedenfalls einen Ort von ∞^2 Punkten x, y, z darstellen, da ihr bei beliebiger Wahl von zwei Koordinaten durch einen entsprechenden Wert der dritten genügt werden kann. Sind nun $P_1 = x_1, y_1, z_1$; $P_2 = x_2, y_2, z_2$; $P_3 = x_3, y_3, z_3$ irgend drei getrennte, nicht in gerader Linie liegende Punkte des fraglichen Ortes, so genügen ihre Koordinaten der Gleichung (6) so daß:

$$(7)\qquad \begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0, \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0. \end{cases}$$

Hieraus aber folgt mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ (Anm. 2, III, (14)):

$$(8)\quad \begin{cases} \varrho A = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \varrho B = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \varrho C = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \\ \varrho D = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Die Gleichung (6) nimmt durch diese Darstellung ihrer Koeffizienten, von dem Faktor ϱ abgesehen, die Form (1) an, bedeutet also die Ebene der drei Punkte P_1, P_2, P_3.

Jede gegebene Gleichung von der Form (6) *stellt eine Ebene dar.*

4. Die Anzahl der Konstanten. Die allgemeine Gleichung (6) der Ebene enthält *drei Konstanten*, die Verhältnisse der vier Koeffizienten. In der Tat bestimmen drei Punkte, die die Ebene vollkommen bestimmen, in den Gleichungen (8) nur die Verhältnisse der vier Koeffizienten (vgl. § 16, **5**).

Die vier Koeffizienten der Gleichung einer gegebenen Ebene bleiben daher um einen gemeinsamen Faktor unbestimmt. Umgekehrt stellen zwei gegebene Gleichungen:

$$(9) \qquad \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

dieselbe Ebene dar, wenn:

$$(10) \qquad A_1 : B_1 : C_1 : D_1 = A_2 : B_2 : C_2 : D_2$$

oder mit einem Proportionalitätsfaktor $-\lambda_1 : \lambda_2$ *geschrieben:*

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = 0, \quad \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 = 0, \quad \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0, \quad \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 = 0.$$

Indem man zur Abkürzung setzt:

$$(11) \qquad \begin{cases} X_1 = A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1, \\ X_2 = A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2, \end{cases}$$

spricht man diesen Satz auch so aus:

Die beiden Gleichungen $X_1 = 0$ *und* $X_2 = 0$ *stellen immer dann und nur dann dieselbe Ebene dar, wenn mit zwei nicht verschwindenden konstanten Faktoren die Identität (die in* x, y, z *identische Gleichung) besteht*[62]*):*

$$(12) \qquad \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = 0.$$

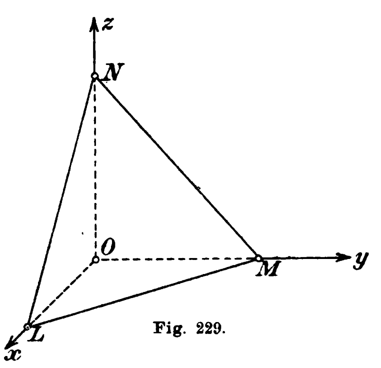


Fig. 229.

5. Bedeutung der Koeffizientenverhältnisse der allgemeinen Gleichung der Ebene. Die Ebene (6) schneidet die Koordinatenachsen $y = 0$, $z = 0$; $z = 0$, $x = 0$; $x = 0$, $y = 0$ (vgl. § 31, **6**) in drei Punkten L, M, N (Fig. 229) mit den Koordinaten (vgl. § 16, (14))[63]):

$$(13) \qquad x = OL = -\frac{D}{A}, \quad y = OM = -\frac{D}{B}, \quad z = ON = -\frac{D}{C}.$$

Mit $D = 0$ geht die Ebene (6) durch den Koordinatenanfangspunkt;

mit $A = 0$ ist sie der x-Achse, mit $B = 0$ und $C = 0$ der yz-Ebene parallel. Es sind also:

$$(14) \qquad Ax + By + Cz = 0,$$

$$(15) \qquad By + Cz + D = 0,$$

$$(16) \qquad Ax + D = 0$$

die allgemeinen Gleichungsformen für solche Ebenen, die bezüglich durch O gehen oder der x-Achse oder der yz-Ebene parallel sind.

6. Spurlinien der Ebene. Die Geraden LM und LN heißen bei der Stellung § 31, Fig. 180 des Koordinatensystems die Spurlinien der Ebene in Aufriß- und Grundrißebene (in Fig. 230 ist die letztere wie in § 31, 7) in die erstere umgeklappt, so daß die drei Strecken OL, OM, ON in ihrer wahren Größe erscheinen. Die beiden Spurlinien charakterisieren die Ebene vollständig und dienen in der darstellenden Geometrie zur Darstellung der Ebene.

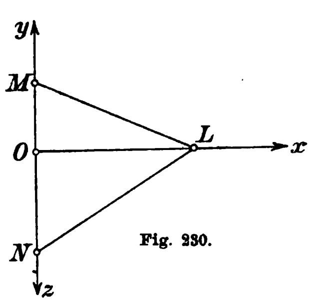


Fig. 230.

Ihre Gleichungen in bezug auf die ebenen Koordinatensysteme Oxz und Oxy sind (vgl. § 16, 6):

$$(17) \qquad Ax + Cz + D = 0, \quad Ax + By + D = 0.$$

7. Ebenen durch einen gegebenen Punkt. Soll die Ebene:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

einen gegebenen Punkt x_0, y_0, z_0 enthalten, so muß:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

sein. Mit Subtraktion beider Gleichungen folgt:

Die Gleichung jeder durch den Punkt x_0, y_0, z_0 gehenden Ebene hat die Form:

$$(18) \qquad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

8. Parameterdarstellung der Ebene. Die $\xi\eta$-Ebene des in § 37, 5 gebrauchten Koordinatensystems $\Omega\xi\eta\zeta$ kann als eine ganz beliebige, mit Bezug auf das Koordinatensystem $Oxyz$ gegebene Ebene des Raumes gelten. Für jeden Punkt x, y, z dieser Ebene ist aber in den Formeln § 37, (13) $\zeta = 0$, während ξ und η unabhängig voneinander und beliebig variieren. Daher ergibt sich (Fig. 231):

Ist $\Omega = x_0, y_0, z_0$ ein fester Punkt einer Ebene E, ferner a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 die Richtungskosinus zweier von Ω innerhalb der Ebene ausgehenden Achsen ξ und η, so bieten die Gleichungen (vgl. § 16, (2)):

$$(19)\quad \begin{cases} x = x_0 + a_1\xi + a_2\eta, \\ y = y_0 + b_1\xi + b_2\eta, \\ z = z_0 + c_1\xi + c_2\eta \end{cases}$$

eine Parameterdarstellung der Ebene.[107]) Die Parameter ξ und η bedeuten die (schiefwinkligen) Koordinaten des laufenden Punktes der Ebene in dem ebenen Koordinatensystem $\Omega\xi\eta$ (vgl. § 10, **6**).

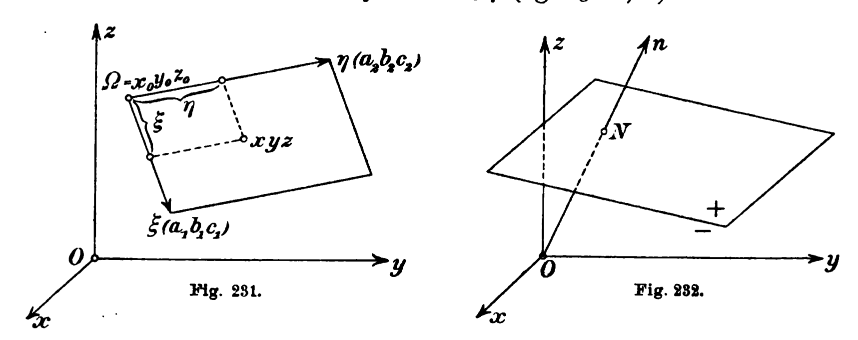


Fig. 231. Fig. 232.

9. Ebene durch einen Punkt und zwei Richtungen. Durch Elimination der Parameter ergibt sich in (vgl. § 16, (3)):

$$(20)\quad \begin{vmatrix} x - x_0 & a_1 & a_2 \\ y - y_0 & b_1 & b_2 \\ z - z_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung der Ebene, die durch den Punkt x_0, y_0, z_0 und zwei von ihm in den Richtungen a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 ausgehende Geraden geht.

§ 41. Der Abstand eines Punktes von der Ebene.

1. Ebene nach dem Koordinatenanfangspunkt gerichtet. Die Gleichung einer Ebene sei in bezug auf ein positiv orientiertes rechtwinkliges Koordinatensystem:

$$(1)\quad Ax + By + Cz + D = 0.$$

Kommt es darauf an, die Ebene als *gerichtete* Ebene[65]) aufzufassen (vgl. § 32, **2**), *so soll als ihre positive Seite immer die dem Koordinatenanfangspunkt O abgewendete Seite gelten* (Fig. 232).

Das von O auf die Ebene gefällte Perpendikel ON bezeichnet dann die Richtung der *positiven Normale n* der Ebene (vgl. § 17, **1**; § 32, **4**).

2. Darstellung der Richtungskosinus der positiven Normale. Seien $P_1 = x_1, y_1, z_1$, $P_2 = x_2, y_2, z_2$, $P_3 = x_3, y_3, z_3$ drei beliebige Punkte

der Ebene (Fig. 233), die jedoch so gewählt sind, daß die positive Normale des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ (vgl. § 36, 1) mit der positiven Normale der Ebene übereinkommt. Nach § 40, (8) stellen sich dann die Koeffizienten A, B, C, D bis auf einen gemeinsamen Faktor, den wir hier $\varepsilon\varrho$ ($\varrho > 0$, $\varepsilon = \pm 1$) nennen wollen, durch die Koordinaten von P_1, P_2, P_3 in folgender Weise dar:

$$(2)\begin{cases} \varepsilon\varrho A = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 2\Delta_{yz}, \quad \varepsilon\varrho B = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = 2\Delta_{zx}, \\ \varepsilon\varrho C = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 2\Delta_{xy}, \quad \varepsilon\varrho D = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 6 \,.\, OP_1P_2P_3, \end{cases}$$

wo $\Delta_{yz}, \Delta_{zx}, \Delta_{xy}$ die gemeinen Koordinaten des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ (vgl. § 40, (4)) sind und $OP_1P_2P_3$ der relative Rauminhalt des Tetraeders $OP_1P_2P_3$ (vgl. § 40, (5)) ist.

Da nun der Voraussetzung nach O auf der negativen Seite des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ liegt, ist nach § 39, 1 dieser Rauminhalt negativ und somit nach der letzten Formel (2), wo $\varrho > 0$ sein sollte, $\varepsilon D < 0$ oder:

$$(3) \qquad \varepsilon = -\operatorname{sign.} D.$$

Fig. 233.

Der doppelte absolute Flächeninhalt des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ ist nach § 36, (5) mit Rücksicht auf (2):

$$(4) \quad 2\Delta = 2\,.\,\overline{P_1 P_2 P_3} = 2\sqrt{\Delta_{yz}^2 + \Delta_{zx}^2 + \Delta_{xy}^2} = \varrho\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

und die Richtungskosinus der positiven Normale n des Dreiecks, ebenso:

$$a = \frac{\Delta_{yz}}{\Delta} = \frac{A}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad b = \frac{\Delta_{zx}}{\Delta} = \frac{B}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$c = \frac{\Delta_{xy}}{\Delta} = \frac{C}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Unabhängig von den drei Punkten P_1, P_2, P_3 folgt also (vgl. § 17, 2):

Die Richtungskosinus der positiven Normale n der durch die Gleichung (1) *gegebenen und nach O gerichteten Ebene, auch kurz die „Stellungskosinus der Ebene“* [99]) *genannt, sind:*

$$(5) \; a = \frac{A}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \; b = \frac{B}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \; c = \frac{C}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

wo das Vorzeichen ε durch (3) bestimmt ist. Sie hängen nur von den Verhältnissen der vier Konstanten A, B, C, D ab.

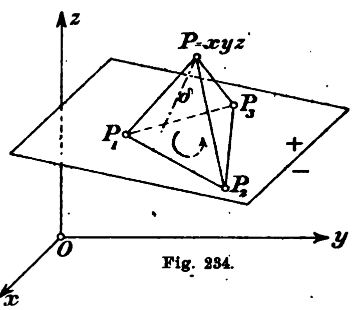


Fig. 234.

3. Der Abstand eines Punktes von der Ebene. *Der Abstand δ eines Punktes $P = x, y, z$ von der gerichteten Ebene* (1) *soll positiv oder negativ gelten, je nachdem der Punkt auf der positiven oder negativen Seite (mit O ungleichseitig oder gleichseitig) liegt.*

Der relative Rauminhalt des Tetraeders $PP_1P_2P_3$ (Fig. 234) ist daher, falls P_1, P_2, P_3 die in § 41, 2 angenommenen Punkte sind, nach § 39, (4):

$$6 \,.\, PP_1P_2P_3 = 2\varDelta \,.\, \delta.$$

Andererseits ist nach § 39, (7) mit Benutzung der Gleichungen (2):

$$6 \,.\, PP_1P_2P_3 = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \varepsilon\varrho\,(Ax + By + Cz + D)$$

und daher:

$$2\varDelta \,.\, \delta = \varepsilon\varrho\,(Ax + By + Cz + D).$$

Setzt man hier den Wert (4) von $2\varDelta$ ein, so folgt:

Der Abstand δ des Punktes $P = x, y, z$ von der durch die Gleichung (1) *gegebenen und mit Bezug auf O gerichteten Ebene ist*[66]*:*

$$(6) \qquad \delta = \frac{Ax + By + Cz + D}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

wo ε wieder durch (3) bestimmt ist.

Der Ausdruck (6) ist hiernach für alle Punkte x, y, z auf der negativen Seite der Ebene (1), auf der O liegt, negativ und für alle Punkte auf der positiven Seite positiv, während er für alle Punkte der Ebene selbst verschwindet (vgl. § 17, 3).

4. Ebene nach einem beliebigen Punkt gerichtet. Statt nach dem Koordinatenanfangspunkt O wollen wir jetzt die Ebene (1) nach einem beliebigen Punkt $P_0 = x_0, y_0, z_0$ richten. *Es soll also ihre positive Seite diejenige sein, die dem Punkte P_0 abgewandt ist. Der Abstand δ eines Punktes von der Ebene soll wieder auf ihrer positiven Seite positiv sein.* Wir führen zunächst P_0 als Koordinatenanfangspunkt O' eines neuen parallelen Koordinatensystems $O'x'y'z'$ ein mittels der Substitution (vgl. § 37, 1):

(7) $$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y', \quad z = z_0 + z'.$$

Die Gleichung der Ebene (1) wird dann:

(8) $$Ax' + By' + Cz' + D' = 0,$$

wo:

(9) $$D' = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D.$$

Nach § 41, **2** und **3** gelten daher für die Richtungskosinus der positiven Normale der nach O' gerichteten Ebene (8) in bezug auf das neue System $O'x'y'z'$ die Formeln (5) mit:

(10) $$\varepsilon = -\operatorname{sign.} D'$$

und für den Abstand eines Punktes x', y', z' die Formel:

(11) $$\delta = \frac{Ax' + By' + Cz' + D'}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

mit demselben Werte von ε.

Fig. 235.

Die Richtungskosinus einer gerichteten Geraden in bezug auf parallele und gleichgerichtete Achsen sind aber nach § 32, **1** dieselben. Es folgt daher, wenn wir in (10) den Wert (9) und in (11) mittels (7) wieder die alten Koordinaten x, y, z des Punktes x', y', z' einführen (vgl. § 17, **4**):

Die Richtungskosinus der positiven Normale n der nach einem beliebigen Punkte x_0, y_0, z_0 gerichteten Ebene (1) *sind durch die Formeln* (5) *und der Abstand eines Punktes x, y, z von der Ebene durch die Formel* (6) *bestimmt, beidemal mit:*

(12) $$\varepsilon = -\operatorname{sign.}(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D).$$

5. Die Polarkoordinaten des von O gefällten Perpendikels. Bezeichnet $p = \overline{ON}$ die *absolute* Länge des von O auf die Ebene gefällten Perpendikels ON (Fig. 235), so sind, indem wir die Ebene wieder wie in § 41, **1** nach O richten, p, a, b, c die Polarkoordinaten der Strecke ON (vgl. § 34, **1**).

Da der Abstand δ des Punktes O von der Ebene im Sinne von § 41, **3** negativ, also $\delta = -p$ ist, und sich aus der Formel (6) mit $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ergeben muß, so wird:

(13) $$-p = \frac{D}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Die Polarkoordinaten p, a, b, c des von O auf die Ebene (1) *ge-*

fällten Perpendikels sind durch die Formeln (5) *und* (13) *bestimmt, wo* ε *den Wert* (3) *hat.*

6. Die Hessesche Normalform der Gleichung der Ebene. Da nun nach (5) und (13) identisch in x, y, z:

$$(14) \qquad \frac{Ax + By + Cz + D}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = ax + by + cz - p$$

ist, so kann nach § 40, (12) die Ebene (1) auch in der Form:

$$(15) \qquad ax + by + cz - p = 0$$

dargestellt werden. Man nennt diese Gleichung, *in der die Koeffizienten* p, a, b, c *die Polarkoordinaten des von O auf die Ebene gefällten Perpendikels sind, die Hessesche Normalform der Gleichung der Ebene.*[67])

Sie geht aus der allgemeinen Form (1) durch Division mit dem Faktor $\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, $\varepsilon = -\operatorname{sign.} D$ hervor.

Hieraus folgt zugleich, daß unter den Bedingungen:

$$(16) \qquad A^2 + B^2 + C^2 = 1, \quad D < 0$$

die Gleichung (1) selbst die Normalform hat, oder daß die für die Normalform (15) erfüllten Bedingungen:

$$(17) \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad p > 0$$

hinreichend sind, um die Normalform analytisch zu kennzeichnen.

Der Satz § 41, 3 kann nun mit Rücksicht auf (14) so ausgesprochen werden (Fig. 235):

Ist eine Ebene durch ihre Gleichung (15) *in der Normalform gegeben, so ist der Abstand* δ *eines Punktes* x, y, z *von der Ebene:*

$$(18) \qquad \delta = ax + by + cz - p,$$

wobei als positive Seite der Ebene, auf der δ *positiv ist, die dem Koordinatenanfangspunkt abgewandte Seite gilt* (vgl. § 17, 5).

Für $p = 0$ ist die positive Seite der Ebene, auf der δ positiv ist, dadurch bestimmt, daß die positive Normale (§ 32, 4) die Richtungskosinus a, b, c hat, da für $x = a,\ y = b,\ z = c$ (vgl. § 33, (16)) $\delta = a^2 + b^2 + c^2 = 1$ wird.

7. Der Neigungswinkel einer gerichteten Geraden gegen eine gerichtete Ebene. Die Richtungskosinus einer Geraden g (Fig. 236) seien a', b', c'; für ihren Winkel ψ gegen die positive Normale (5) der Ebene (1) ist nach § 35, (1):

$$\cos \overline{ng} = \cos\psi = aa' + bb' + cc' = \frac{Aa' + Bb' + Cc'}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Für den Neigungswinkel χ von g gegen diese Ebene E selbst folgt da-

her nach § 32, (7):

$$\sin Eg = \sin \chi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \cos\psi = \frac{Aa' + Bb' + Cc'}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Der Neigungswinkel χ einer durch ihre Richtungskosinus a', b', c' gegebenen gerichteten Geraden gegen die durch ihre Gleichung (1) *gegebene und nach O gerichtete Ebene ist durch die Angaben:*

$$(19) \qquad \sin\chi = \frac{Aa' + Bb' + Cc'}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad -\frac{\pi}{2} < \chi < +\frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon = -\operatorname{sign.} D$$

eindeutig bestimmt.

8. Ebene durch zwei Achsen gerichtet. Ist eine Ebene durch einen Punkt x_0, y_0, z_0 und zwei von ihm ausgehende Achsen ξ und η

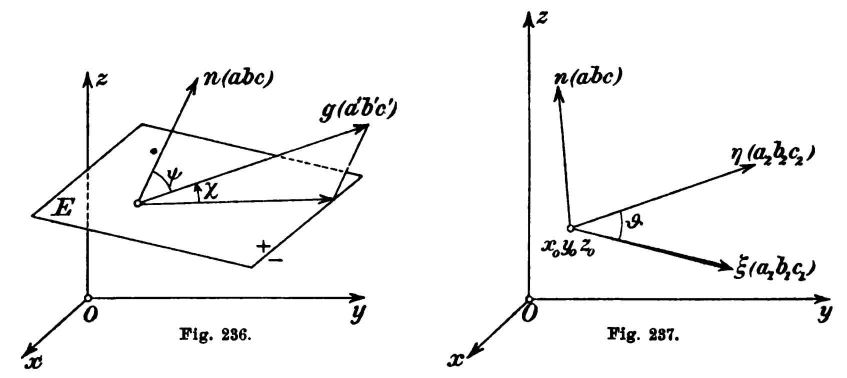


Fig. 236. Fig. 237.

mit den Richtungskosinus a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 gegeben (Fig. 237), so sind die Koeffizienten A, B, C ihrer Gleichung (1) nach § 40, (20):

$$(20) \qquad A = b_1c_2 - b_2c_1, \quad B = c_1a_2 - c_2a_1, \quad C = a_1b_2 - a_2b_1,$$

so daß nach § 35, (2) für den Winkel ϑ der beiden Achsen:

$$(21) \qquad \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sin \overline{\xi\eta} = \sin\vartheta, \quad (\sin\vartheta > 0).$$

Die Richtungskosinus der positiven Normale n der Ebene wären dann im Sinne von (5), (3):

$$(22) \qquad a = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{\varepsilon\sin\vartheta}, \quad b = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{\varepsilon\sin\vartheta}, \quad c = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{\varepsilon\sin\vartheta}.$$

Richtet man aber die Ebene nicht wie in § 41, **1** in bezug auf O, sondern nach der Folge der Achsen ξ, η wie in § 32, 8, so muß man das Vorzeichen ε nicht wie in (3), sondern aus der Bedingung bestimmen, daß das Achsensystem $\xi\eta n$ positiv orientiert sei (vgl. § 32, 8), also nach § 37, **3** die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} > 0 \text{ sei.}$$

Dies gibt aber nach (22) die Bedingung:

$$\frac{(b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (c_1 a_2 - c_2 a_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{\varepsilon \sin\vartheta} = \varepsilon \sin\vartheta > 0$$

(vgl. § 35, (2)), so daß $\varepsilon = +1$ sein muß.

Sind daher a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 die Richtungskosinus zweier durch einen Punkt gehenden Achsen ξ und η, so hat die positive Normale der durch die Achsenfolge ξ, η gerichteten Ebene dieser Achsen die Richtungskosinus[97]*):*

$$(23) \qquad a = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{\sin\vartheta}, \quad b = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{\sin\vartheta}, \quad c = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\sin\vartheta},$$

wo (vgl. § 32, (1)):

$$\vartheta = \overline{\xi\eta}, \qquad (0 < \vartheta < \pi).$$

9. Darstellung des Sinus einer Ecke als Produkt der Sinus zweier Winkel. Es seien jetzt ξ, η, ζ die Kanten einer Ecke und

$$(24) \qquad D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \sin\xi\eta\zeta$$

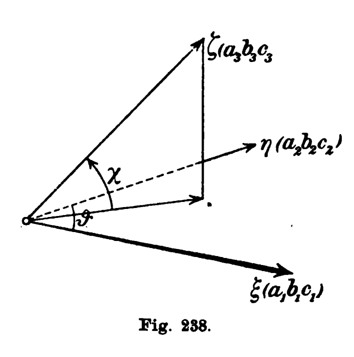


Fig. 238.

die Determinante ihrer Richtungskosinus (vgl. § 37, (9)). Die positive Normale n der durch die Achsenfolge $\xi\eta$ gerichteten $\xi\eta$-Ebene ist nach (23) unter Anwendung der Bezeichnung § 37, (4):

$$(25) \qquad a = \frac{A_3}{\sin\vartheta}, \quad b = \frac{B_3}{\sin\vartheta}, \quad c = \frac{C_3}{\sin\vartheta}.$$

Für den Neigungswinkel $\chi = \xi\eta, \zeta$ der ζ-Achse gegen die $\xi\eta$-Ebene (Fig. 238) ergibt sich dann mit Hinblick auf § 32, (7) und § 35, (1):

$$\sin(\xi\eta, \zeta) = \sin\chi = \cos\overline{n\zeta} = a a_3 + b b_3 + c c_3$$

und damit nach (25) (vgl. Anm. 1, II, (6)):

$$\sin(\xi\eta, \zeta) = \sin\chi = \frac{A_3 a_3 + B_3 b_3 + C_3 c_3}{\sin\vartheta} = \frac{D}{\sin\vartheta} = \frac{\sin\xi\eta\zeta}{\sin\overline{\xi\eta}}.$$

Sonach wird:

$$(26) \qquad \sin\xi\eta\zeta = \sin\overline{\xi\eta} \cdot \sin(\xi\eta, \zeta).$$

Der Sinus der Ecke $\xi\eta\zeta$ ist gleich dem Produkt aus dem Sinus des Winkels $\vartheta = \overline{\xi\eta}$ der beiden Kanten ξ, η $(0 < \vartheta < \pi)$ und dem Sinus

des Neigungswinkels $\chi = \widehat{\xi\eta,\zeta}$ *der Kante* ζ *gegen die Ebene* $\xi\eta\left(-\frac{\pi}{2} < \chi < +\frac{\pi}{2}\right)$.

In der Tat hat der Sinus der Ecke das Vorzeichen dieses Neigungswinkels (vgl. § 32, **3** und **11**).

Infolge der Gleichberechtigung der drei Kanten ergänzt man (26) zu:

$$(27)\quad \sin\xi\eta\zeta = \sin\overline{\eta\zeta}\cdot\sin(\eta\zeta,\xi) = \sin\overline{\zeta\xi}\cdot\sin(\zeta\xi,\eta) = \sin\overline{\xi\eta}\cdot\sin(\xi\eta,\zeta).$$

Der Sinus einer Ecke liegt nach (27) *zwischen den Grenzen* -1 *und* $+1$ *und kann diese Grenzen nur erreichen, wenn jede Kante auf den beiden andern senkrecht steht* (vgl. § 32, (11)).[94]

§ 42. Zwei Ebenen und der Ebenenbüschel.

1. Der Winkel zweier gerichteten Ebenen. Zwei Ebenen Π_1 und Π_2 seien durch ihre Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

gegeben und nach § 41, **1** gerichtet. Unter ihrem Winkel ist dann nach § 32, **5** der Winkel ϑ ihrer positiven Normalen n_1 und n_2 zu verstehen (Fig. 239). Da deren Richtungskosinus nach § 41, (5) die Werte haben (vgl. § 18, **1**):

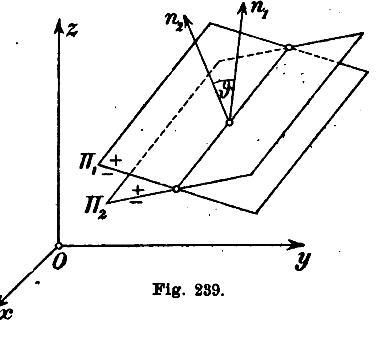


Fig. 239.

$$(2)\qquad \begin{cases} a_i = \dfrac{A_i}{\varepsilon_i\sqrt{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2}}, \\ b_i = \dfrac{B_i}{\varepsilon_i\sqrt{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2}}, \\ c_i = \dfrac{C_i}{\varepsilon_i\sqrt{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2}}, \\ \varepsilon_i = -\operatorname{sign.} D_i, \end{cases}$$

$i = 1, 2$, so ergibt sich nach § 35, (1); (2) *für den Winkel* ϑ *der beiden gerichteten Ebenen* (1):

$$(3)\qquad \cos\vartheta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\varepsilon_1\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\varepsilon_2\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

$$(4)\qquad \sin\vartheta = \sqrt{\frac{(B_1C_2 - B_2C_1)^2 + (C_1A_2 - C_2A_1)^2 + (A_1B_2 - A_2B_1)^2}{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)}}.$$

2. Senkrechte und parallele Ebenen. Die beiden Ebenen (1) sind nach (3) *zueinander senkrecht*, wenn:

(5) $$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0;$$

dagegen nach (4) einander *parallel*, wenn (vgl. § 33, 8):

(6) $$A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2.$$

Mit Rücksicht auf § 40, (10) kann man daher *die Gleichungen von zwei parallelen Ebenen* immer mit gleichen Koeffizienten von x, y, z, also in der Form:

(7) $$\begin{cases} Ax + By + Cz + D_1 = 0, \\ Ax + By + Cz + D_2 = 0 \end{cases}$$

annehmen.

3. Büschel von Parallelebenen. Alle Ebenen, die einer gegebenen Ebene parallel sind, bilden einen *Büschel von Parallelebenen.*[13]) Ein solcher wird nach (7) durch eine Gleichung von der Form:

(8) $$Ax + By + Cz + \varkappa = 0$$

dargestellt, in der $\varkappa$ einen Parameter von wechselndem Werte bezeichnet.

Die Richtungskosinus a, b, c der gemeinsamen *ungerichteten Normale* aller Ebenen (8) oder *die Kosinus der Stellung dieser Ebenen* sind nach § 41, (5) ihren Verhältnissen nach:

(9) $$a : b : c = A : B : C$$

(vgl. § 33, 8). Die Größen A, B, C, die nur ihren Verhältnissen nach in Betracht kommen, sind *homogene Koordinaten dieser Stellung.*[105])

Durch jeden gegebenen Punkt x_0, y_0, z_0 des Raumes geht eine Ebene des Büschels (8), deren Parameter $\varkappa$ den Wert hat (vgl. § 40, 7; § 42, 9):

$$\varkappa = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0).$$

4. Innerer und äußerer Winkelraum zwischen zwei Ebenen. Als *innere Winkelfläche i zwischen den Normalen* n_1 und n_2 der beiden Ebenen Π_1 und Π_2, die wir von einem Punkte der Durchschnittslinie s der beiden Ebenen ausgehen lassen, gilt nach § 35, 3 diejenige, die von *gleichnamigen* Schenkeln begrenzt wird (in Fig. 240, die den Durchschnitt der Ebenen Π_1 und Π_2 mit der Ebene der beiden Normalen n_1 und n_2 darstellt, ist die innere Winkelfläche punktiert). Als *inneren Winkelraum J zwischen den beiden Ebenen* betrachten wir daher denjenigen (in Fig. 240

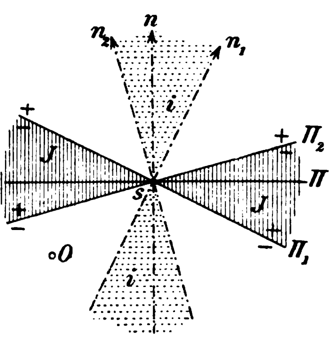


Fig. 240.

schraffierten), der von *ungleichnamigen* Seiten der beiden Ebenen begrenzt wird (in Fig. 240 sind die positiven Seiten mit $+$, die negativen mit $-$ bezeichnet). Denn liegt eine durch die Achse s gehende Ebene Π in diesem innern Winkelraum J, so liegt ihre Normale n in der innern Winkelfläche i und umgekehrt.

Da nach § 41, **1** beide Ebenen dem Anfangspunkt O ihre negative Seite zuwenden, so liegt dieser stets in dem von gleichnamigen (negativen) Seiten begrenzten äußeren Winkelraum, so daß wir auch sagen können (vgl. § 18, **4**):

Als äußerer Winkelraum zwischen den beiden gerichteten Ebenen (1) *gilt derjenige, der den Koordinatenanfangspunkt O enthält.*

5. Teilung des Winkels zwischen zwei gerichteten Ebenen. Unter dem Sinusverhältnis λ, nach dem eine durch s gehende ungerichtete Ebene Π den Winkel der beiden gerichteten Ebenen Π_1 und Π_2 teilt, verstehen wir dasjenige, nach dem die ungerichtete Normale n der Ebene Π den Winkel der gerichteten Normalen n_1 und n_2 teilt (vgl. § 4, **3**), also kurz:

$$\lambda = \frac{\sin \Pi_1 \Pi}{\sin \Pi_2 \Pi} = \frac{\sin n_1 n}{\sin n_2 n}. \tag{10}$$

Das Sinusverhältnis λ ist nach § 4, **3** *positiv* oder *negativ*, je nachdem die Ebene Π im *äußeren* oder *inneren Winkelraum* der Ebenen Π_1 und Π_2 liegt. Die ungerichtete Ebene Π bestimmt das Sinusverhältnis eindeutig und ist ihrerseits durch dasselbe eindeutig bestimmt.

6. Gleichung der ungerichteten Ebene, die den Winkel zweier gerichteten Ebenen in bestimmtem Sinusverhältnis teilt. Wir setzen zur Abkürzung:

$$\begin{cases} X_1 = A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1, \\ X_2 = A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2. \end{cases} \tag{11}$$

Diejenige Gerade n, die den Winkel der Normalen n_1 und n_2 im Sinusverhältnis λ teilt, hat nach § 35, (8) Richtungskosinus u, v, w mit den Verhältnissen:

$$u : v : w = a_1 - \lambda a_2 : b_1 - \lambda b_2 : c_1 - \lambda c_2.$$

Nach (8) stellt daher die Gleichung:

$$(a_1 - \lambda a_2) x + (b_1 - \lambda b_2) y + (c_1 - \lambda c_2) z + \varkappa = 0 \tag{12}$$

bei veränderlichem $\varkappa$ alle die untereinander parallelen Ebenen dar, die n als Normale haben. Unter diesen befindet sich nach § 42, **3** auch die Ebene Π, die den Winkel der Ebenen Π_1 und Π_2 im Sinusverhältnis λ teilt; ihre Gleichung muß aus (12) erhalten werden, wenn

man $\varkappa$ so bestimmt, daß die durch (12) dargestellte Ebene durch die Schnittlinie s von Π_1 und Π_2 geht. Nun kann man unter Benutzung von (2) und (11) die Gleichung (12) schreiben:

$$(13)\qquad \frac{X_1 - D_1}{\varepsilon_1 \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} - \lambda \frac{X_2 - D_2}{\varepsilon_2 \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} + \varkappa = 0.$$

Die Bedingung, daß dieser Gleichung alle Punkte von s genügen, also alle Punkte, für die gleichzeitig $X_1 = 0$ und $X_2 = 0$ ist[68]), lautet:

$$\frac{-D_1}{\varepsilon_1 \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} - \lambda \frac{-D_2}{\varepsilon_2 \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} + \varkappa = 0.$$

Danach aber reduziert sich (13) auf:

$$\frac{X_1}{\varepsilon_1 \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} - \lambda \frac{X_2}{\varepsilon_2 \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = 0.$$

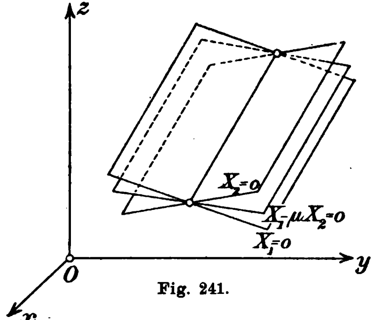


Fig. 241.

Sind (Fig. 241)

$$(14)\qquad \begin{cases} X_1 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ X_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen zweier gerichteten Ebenen, so ist die Gleichung der Ebene, die deren Winkel im Sinusverhältnis λ teilt:

$$(15)\qquad X_1 - \mu X_2 = 0,$$

wo:[22])

$$(16)\qquad \mu = \frac{\varepsilon_1 \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}{\varepsilon_2 \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \cdot \lambda; \quad \varepsilon_1 = -\operatorname{sign.} D_1, \quad \varepsilon_2 = -\operatorname{sign.} D_2$$

und der den Koordinatenanfangspunkt O enthaltende Winkelraum als äußerer gilt, in dem λ positiv ist (vgl. § 18, 4).[22])

7. Allgemeinere Bestimmung des äußeren Winkelraumes. Ist *der äußere Winkelraum zwischen den Ebenen* (14) nicht durch O, sondern *durch einen beliebigen Punkt x_0, y_0, z_0 gegeben,* der in ihm liegen soll, so hat man, bei gleicher Begründung wie in § 42, **6** mit Rücksicht auf § 41, 4, in (16) zu setzen (vgl. § 18, **5**):

$$(17)\qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = -\operatorname{sign.}(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1), \\ \varepsilon_2 = -\operatorname{sign.}(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2). \end{cases}$$

8. Anwendung der Hesseschen Normalform. Bei Anwendung der Hesseschen Normalform der Gleichungen (14) wird nach § 41, (17) der Koeffizient von λ in (16) gleich 1 und lautet der Satz von § 42, **6**:

Sind:

$$(18)\qquad \begin{cases} N_1 = a_1x + b_1y + c_1z - p_1 = 0, \\ N_2 = a_2x + b_2y + c_2z - p_2 = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen zweier Ebenen in der Hesseschen Normalform, so ist die Gleichung derjenigen Ebene, die den Winkel jener beiden im Sinusverhältnis λ teilt:[67])

$$(19)\qquad N_1 - \lambda N_2 = 0.$$

Insbesondere lauten die Gleichungen der *inneren* und *äußeren Halbierungsebene* ($\lambda = -1$ und $\lambda = +1$, vgl. § 35, **4**) bezüglich (vgl. § 18, **6**):

$$(20)\qquad N_1 + N_2 = 0, \quad N_1 - N_2 = 0.$$

9. Die Gleichung des Ebenenbüschels mit multipliziertem Teilungsverhältnis als Parameter. Die Gleichung (15) stellt bei veränderlichem λ, bezüglich μ, alle durch die Schnittlinie s der beiden Ebenen (14) gehenden Ebenen dar. Sie ist *die Gleichung des Ebenenbüschels*[13]), das durch die in (14) gegebenen *Grundebenen, die wir nun Γ_1 und Γ_2 nennen wollen,* bestimmt ist (vgl. § 18, **7**).

Der Parameter μ der Büschelgleichung bedeutet nach (16) und (10) *das multiplizierte Teilungsverhältnis* der laufenden Ebene des Büschels in bezug auf die beiden Grundebenen (vgl. § 6, (7′)).

Durch jeden Punkt x_0, y_0, z_0 des Raumes, ausgenommen die auf der Achse s des Büschels liegenden Punkte, geht eine bestimmte Ebene des Büschels (vgl. § 42, **3**).

Man erhält den Parameter $\mu = \mu_0$ dieser Ebene aus der Bedingung, daß die Koordinaten x_0, y_0, z_0 der Gleichung (15) genügen, also aus:

$$X_1^0 - \mu X_2^0 = 0,$$

wo X_1^0 und X_2^0 die mit $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ gebildeten Ausdrücke (9) sind (vgl. § 42, (17)). Es ist daher:

$$(21)\qquad \mu_0 = \frac{X_1^0}{X_2^0}.$$

10. Die Gleichung des Ebenenbüschels mit Doppelverhältnis als Parameter. Als *Einheitsebene Γ_0 des Büschels* (vgl. § 18, **8**) gilt diejenige Ebene, für die das multiplizierte Teilungsverhältnis μ den Wert 1 hat. Entspricht es dem Werte $\lambda = \lambda_0$ des Teilungsverhältnisses selbst, so ist nach (16):

$$1 = \frac{\varepsilon_1 \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}{\varepsilon_2 \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \cdot \lambda_0,$$

und damit wieder nach (16) der Parameter μ der laufenden Ebene Π gleich dem Doppelverhältnis (vgl. § 42, (10) und § 6, (16′)):

(22) $$\mu = \frac{\lambda}{\lambda_0} = (\Gamma_1 \Gamma_2 \Pi \Gamma_0) = \frac{\sin \Gamma_1 \Pi}{\sin \Gamma_2 \Pi} \cdot \frac{\sin \Gamma_2 \Gamma_0}{\sin \Gamma_1 \Gamma_0},$$

wobei nun die Angabe des äußeren Winkelraums nicht mehr erforderlich ist (vgl. § 18, 8).

Gibt man die Einheitsebene durch einen Punkt x_0, y_0, z_0, durch den sie gehen soll, so ist wie in (21), nur jetzt mit $\mu_0 = 1$:

(23) $$1 = \frac{X_1^0}{X_2^0},$$

wonach man die Gleichung (15) in der Form:

$$\frac{X_1}{X_1^0} - \mu \frac{X_2}{X_2^0} = 0$$

schreiben und sagen kann:

Sind $X_1 = 0$ *und* $X_2 = 0$ *in* (14) *die Gleichungen der Grundebenen* Γ_1 *und* Γ_2 *eines Ebenenbüschels und* x_0, y_0, z_0 *die Koordinaten eines festen Punktes, durch den die Einheitsebene* Γ_0 *bestimmt werden soll, so ist die Gleichung der laufenden Ebene* Π *des Büschels:*

(24) $$\frac{X_1}{X_1^0} - \mu \frac{X_2}{X_2^0} = 0,$$

wo μ *das Doppelverhältnis*

(25) $$\mu = (\Gamma_1 \Gamma_2 \Pi \Gamma_0)$$

bedeutet.

Die Gleichungen (15) und (24) sind gleich allgemein, aber während (15) von den Konstanten A_1, B_1, C_1, D_1 und A_2, B_2, C_2, D_2 selbst abhängt, enthält (24) nur die Verhältnisse $A_1 : B_1 : C_1 : D_1$ und $A_2 : B_2 : C_2 : D_2$ und stimmt darin mit den Gleichungen (14) überein, die auch nur diese Verhältnisse enthalten (vgl. § 40, **4**).

11. Doppelverhältnis von vier Ebenen im Büschel. Da in der Gleichung (15) des Büschels der Parameter μ nach (16) das multiplizierte Teilungsverhältnis oder nach der Ausdrucksweise von § 6, (7') die *multiplizierte Verhältniskoordinate* der laufenden Ebene Π in bezug auf die beiden Grundebenen Γ_1 und Γ_2 als Anfangsebenen ist, so folgt wie in § 18, **9**:

Das Doppelverhältnis von vier durch ihre Gleichungen:[70])

(26) $$X_1 - \mu_1 X_2 = 0, \quad X_1 - \mu_2 X_2 = 0, \quad X_1 - \mu_3 X_2 = 0, \quad X_1 - \mu_4 X_2 = 0$$

gegebenen Ebenen Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 *des Büschels* (15) *ist:*

(27) $$\delta = (\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4) = \frac{(\mu_1 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_4)}{(\mu_2 - \mu_3)(\mu_1 - \mu_4)}.$$

Das Doppelverhältnis, das zwei durch ihre Gleichungen:

(28) $$X_1 - \mu_1 X_2 = 0, \quad X_1 - \mu_2 X_2 = 0$$

gegebene Ebenen Π_1 *und* Π_2 *mit den beiden Grundebenen* Γ_1 und Γ_2 *des Büschels bilden, ist:*

(29) $$\delta = (\Gamma_1 \Gamma_2 \Pi_1 \Pi_2) = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Für $\mu_2 = -\mu_1$ sind die Ebenen (28) zu den Grundebenen *harmonisch.*

Die gleichen Sätze gelten auch für die Form (24) der Gleichung des Büschels.

§ 43. Die Gleichungen der geraden Linie im Raume.

1. Parameterdarstellung der geraden Linie. Nach § 34, (6) bestehen zwischen den Polarkoordinaten einer Strecke P_0P, nämlich ihrer Länge s und ihren Richtungskosinus α, β, γ, und den Koordinaten x_0, y_0, z_0 und x, y, z ihrer Endpunkte die Gleichungen:

(1) $$x - x_0 = \alpha s, \quad y - y_0 = \beta s, \quad z - z_0 = \gamma s.$$

Läßt man daher bei festen Werten von $x_0, y_0, z_0; \alpha, \beta, \gamma$ die im Sinne von § 34, 6 *relative* Länge s der Strecke von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen, so erhält man in (vgl. § 16, (2)):

(2) $$\begin{cases} x = x_0 + \alpha s, \quad y = y_0 + \beta s, \quad z = z_0 + \gamma s \\ \quad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad -\infty < s < +\infty) \end{cases}$$

eine Parameterdarstellung[60]) *der gerichteten geraden Linie, die durch den Punkt* x_0, y_0, z_0 *in der Richtung* α, β, γ *hindurchgeht* (Fig. 242).

Die Formeln gehen auch (vgl. § 40, (19)) mit $\xi = s, \eta = 0, \zeta = 0$ (und α, β, γ für a_1, b_1, c_1) aus § 37, (13) hervor. Der Parameter $\xi = s$ bedeutet *die Koordinate des Punktes auf der Geraden* (vgl. § 1, 6).

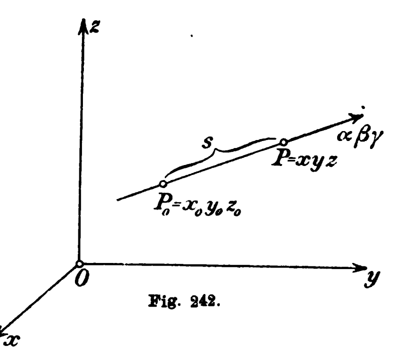


Fig. 242.

2. Darstellung der Geraden durch eine Proportion. Durch Elimination von s ergeben sich aus (2) die Gleichungen (vgl. § 16, (3)):

(3) $$x - x_0 : y - y_0 : z - z_0 = \alpha : \beta : \gamma \qquad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \text{ oder } \neq 1)$$

für die durch den Punkt x_0, y_0, z_0 *in der Richtung* $\alpha : \beta : \gamma$ *hindurchgehende (ungerichtete) Gerade.*

Hier brauchen α, β, γ nicht selbst die Richtungskosinus zu sein, sondern sich nur wie diese zu verhalten (vgl. § 33, 8):

Insbesondere ist:

$$x : y : z = \alpha : \beta : \gamma \tag{4}$$

die durch den Anfangspunkt O in der Richtung $\alpha : \beta : \gamma$ gehende Gerade.

3. Darstellung der Geraden als Durchschnitt zweier Ebenen. Die Proportion (3) vertritt zwei lineare Gleichungen zwischen x, y, z. In der Tat kann die Gerade im Raume immer als Durchschnitt zweier Ebenen betrachtet und daher durch zwei Gleichungen von der Form:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

dargestellt werden.

Ist x_0, y_0, z_0 ein Punkt der Geraden, so können die beiden Gleichungen (5) auf die Form § 40, (18) und danach in die Form:

$$x - x_0 : y - y_0 : z - z_0 = B_1 C_2 - B_2 C_1 : C_1 A_2 - C_2 A_1 : A_1 B_2 - A_2 B_1 \tag{6}$$

der Proportion (3) gebracht werden (Anm. 2, II, (12)).

4. Matrixgleichung der Verbindungslinie zweier Punkte. Eine Gerade sei als Verbindungslinie zweier getrennten Punkte $P_1 = x_1, y_1, z_1$ und $P_2 = x_2, y_2, z_2$ gegeben (Fig. 243). Die beiden Punkte bestimmen mit einem beliebigen Punkte $P = x, y, z$ des Raumes ein Dreieck PP_1P_2, dessen absoluter Flächeninhalt $\varDelta$ immer dann und nur dann verschwindet, wenn der Punkt P in der Verbindungslinie von P_1 und P_2 liegt. Die Bedingung $\varDelta = 0$ zerfällt aber nach § 36, (5) in die drei Bedingungen:

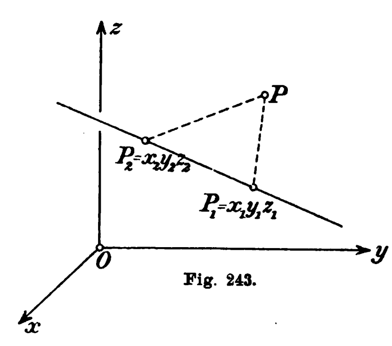


Fig. 243.

$$\varDelta_{yz} = 0, \quad \varDelta_{zx} = 0, \quad \varDelta_{xy} = 0,$$

wenn $\varDelta_{yz}, \varDelta_{zx}, \varDelta_{xy}$ die Koordinaten des Dreiecks $\varDelta$ bedeuten.

Der laufende Punkt $P = x, y, z$ der Verbindungslinie der Punkte $P_1 = x_1, y_1, z_1$ und $P_2 = x_2, y_2, z_2$ genügt daher den drei Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} 2\varDelta_{yz} &= \begin{vmatrix} y & z & 1 \\ y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad 2\varDelta_{zx} = \begin{vmatrix} z & x & 1 \\ z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ 2\varDelta_{xy} &= \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Wenn die drei Punkte P, P_1, P_2 in gerader Linie liegen, verschwindet auch der Rauminhalt Π des Tetraeders OPP_1P_2, ist also nach § 39, (8):

$$(8) \qquad 6\Pi = -\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Indem wir daher die vier Gleichungen (7) und (8) in das Verschwinden einer Matrix (Anm. 1, III, (25)) zusammenfassen, ergibt sich (vgl. § 16, (5)):

Die Verbindungslinie der Punkte x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 ist durch die die vier Gleichungen (7) *und* (8) *vertretende Gleichung:*

$$(9) \qquad \begin{Vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{Vmatrix} = 0$$

dargestellt (vgl. § 40, (1)).

5. Abhängigkeit der vier Gleichungen der Geraden. Da aber zwischen den vier Größen Δ_{yz}, Δ_{zx}, Δ_{xy} und 3Π die Identitäten bestehen:[100])

$$(10) \qquad \begin{cases} x_1 \cdot \Delta_{yz} + y_1 \cdot \Delta_{zx} + z_1 \cdot \Delta_{xy} + 3\Pi = 0 \\ x_2 \cdot \Delta_{yz} + y_2 \cdot \Delta_{zx} + z_2 \cdot \Delta_{xy} + 3\Pi = 0, \end{cases}$$

so folgen im allgemeinen aus zweien von den vier Gleichungen (7), (8) die übrigen beiden von selbst. Ist beispielsweise:

$$(11) \qquad \Delta_{zx} = 0, \quad \Delta_{xy} = 0,$$

so wird nach (10):

$$x_1 \cdot \Delta_{yz} + 3\Pi = 0$$
$$x_2 \cdot \Delta_{yz} + 3\Pi = 0$$

und hieraus folgt: $\Delta_{yz} = 0$ und $\Pi = 0$, wenn $x_1 \neq x_2$ (Anm. 2, I, 3). Im Ausnahmefalle $x_1 = x_2$ fallen aber auch die beiden Gleichungen (11), die dann lauten:

$$(z_1 - z_2)(x - x_1) = 0, \quad (y_1 - y_2)(x - x_1) = 0,$$

in eine zusammen; die Gerade ist der yz-Ebene parallel. Man kann also sagen:

Die Verbindungslinie der Punkte x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 ist, wenn sie nicht der yz-Ebene parallel ist, durch die Gleichungen:

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} z & x & 1 \\ z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

dargestellt.

6. Darstellung der Geraden durch Grundriß und Aufriß. Die Darstellung (12) fällt wieder unter die allgemeine Form (5). Die beiden Gleichungen (12) stellen (vgl. § 40, (15)) die projizierenden Ebenen der Geraden auf die zx-(Grundriß-) und xy-(Aufriß-)Ebene dar. Sie sind zugleich in bezug auf die ebenen Koordinatensysteme Ozx und Oxy (vgl. § 40, (17)) die *Gleichungen von Grundriß g' und Aufriß g'' der Geraden g,* d. h. ihren orthogonalen Projektionen auf

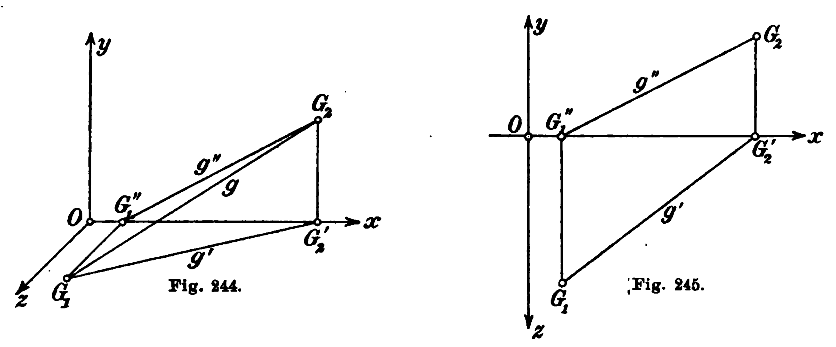


Fig. 244. Fig. 245.

die beiden Ebenen zx und xy (vgl. Fig. 244, sowie die Fig. 245, wo die Grundrißebene nach § 31, 7 aufgeklappt ist); G_1 und G_2 sind die *Spurpunkte,* d. h. die Schnittpunkte der Geraden g mit Grundriß- und Aufrißebene, G_1'' und G_2' die Projektionen von G_1 und G_2 auf die x-Achse.

7. Die Anzahl der Konstanten der Geraden. Die Gleichungen (12) lassen sich (da $x_1 \neq x_2$ sein soll) durch Auflösen nach y und z auf die Form bringen:[100])

$$(13) \qquad \begin{cases} y = b_0 + bx \\ z = c_0 + cx. \end{cases}$$

Sie enthalten *vier unabhängige Konstanten* b_0, b, c_0, c, wie denn (§ 16, 5) Grundriß und Aufriß einer Geraden völlig unabhängig voneinander gegeben sein können, worauf (Fig. 244) die über ihnen senkrecht zu Grundriß- und Aufrißebene errichteten Ebenen die Gerade als ihren Durchschnitt bestimmen. *Es gibt daher ∞^4 gerade Linien im Raume.*

8. Beziehung der beiden Darstellungen (3) und (13). Die Gleichungen (13) können in der Form:

$$x : y - b_0 : z - c_0 = 1 : b : c$$

geschrieben werden, die aus (3) mit:

$$(14) \qquad x_0 = 0, \quad y_0 = b_0, \quad z_0 = c_0; \quad \alpha : \beta : \gamma = 1 : b : c$$

hervorgeht. *Es ist* 0, b_0, c_0 *der Schnittpunkt der Geraden* (13) *mit*

der yz-Ebene, und sind (vgl. § 33, (20)):

$$(15)\qquad \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+b^2+c^2}}, \quad \beta = \frac{b}{\sqrt{1+b^2+c^2}}, \quad \gamma = \frac{c}{\sqrt{1+b^2+c^2}}$$

die Richtungskosinus der ungerichteten Geraden (13).

Die Gleichungen (3) dagegen geben, nach y und z aufgelöst, die Gleichungen

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\alpha y_0 - \beta x_0}{\alpha}, \quad z = \frac{\gamma}{\alpha} x + \frac{\alpha z_0 - \gamma x_0}{\alpha}$$

welche die Form (13) haben mit:

$$(16)\qquad b_0 = \frac{\alpha y_0 - \beta x_0}{\alpha}, \quad c_0 = \frac{\alpha z_0 - \gamma x_0}{\alpha}, \quad b = \frac{\beta}{\alpha}, \quad c = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

9. Gleichung der Verbindungsebene einer Geraden und eines Punktes. Die Gleichung einer Ebene, die durch den gegebenen Punkt x_1, y_1, z_1 geht, ist nach § 40, (18) von der Form:

$$(17)\qquad \begin{cases} A(x-x_1) + B(y-y_1) \\ \qquad + C(z-z_1) = 0. \end{cases}$$

Soll nun die Gerade (2) in dieser Ebene liegen, muß die Gleichung:

$$A(x_0+\alpha s - x_1) + B(y_0 + \beta s - y_1) + C(z_0 + \gamma s - z_1) = 0$$

identisch in s erfüllt sein, also:

$$(18)\qquad \begin{cases} A(x_0-x_1) + B(y_0-y_1) + C(z_0-z_1) = 0 \\ A\alpha + B\beta + C\gamma = 0. \end{cases}$$

Fig. 246.

Durch Elimination von A, B, C aus (17) und (18) folgt (Anm. 2, II, 3):

Die Verbindungsebene des Punktes x_1, y_1, z_1 *mit der Geraden* (3):

$$x - x_0 : y - y_0 : z - z_0 = \alpha : \beta : \gamma$$

(Fig. 246) *hat die Gleichung:*

$$(19)\qquad \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

10. Der Abstand eines Punktes von einer Geraden. Der absolute Abstand des Punktes $P_1 = x_1, y_1, z_1$ von der Geraden (2) sei δ; der absolute Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_0P_2$, wo P_0 und P_2 die den Werten $s = 0$ und $s = 1$ entsprechenden Punkte der Geraden sind (Fig. 247), sei Δ. Dann ist $\Delta = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \delta$, also nach § 36, (5):

$$\delta^2 = 4\Delta^2 = 4\Delta_{yz}^2 + 4\Delta_{zx}^2 + 4\Delta_{xy}^2,$$

wo nach § 36, (6) (vgl. Anm. 1, IV, 4):

$$2\Delta_{yz} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_0 & z_0 & 1 \\ y_0+\beta & z_0+\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_0 & z_0 & 1 \\ \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} = \beta(z_1 - z_0) - \gamma(y_1 - y_0)$$

und ebenso:

$$2\Delta_{zx} = \gamma(x_1 - x_0) - \alpha(z_1 - z_0), \quad 2\Delta_{xy} = \alpha(y_1 - y_0) - \beta(x_1 - x_0).$$

Für den Abstand δ des Punktes x_1, y_1, z_1 von der Geraden:

$$x - x_0 : y - y_0 : z - z_0 = \alpha : \beta : \gamma \qquad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1)$$

ist:[102])

$$(20) \quad \begin{cases} \delta^2 = \{\beta(z_1 - z_0) - \gamma(y_1 - y_0)\}^2 + \{\gamma(x_1 - x_0) - \alpha(z_1 - z_0)\}^2 \\ \qquad\qquad + \{\alpha(y_1 - y_0) - \beta(x_1 - x_0)\}^2. \end{cases}$$

Hier müssen nach der Ableitung α, β, γ die wirklichen Richtungskosinus sein, also $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ (vgl. § 43, 2); andernfalls ist die rechte Seite (20) noch durch $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ zu dividieren.

§ 44. Zwei gerade Linien im Raume.

1. Bedingung der vereinigten Lage zweier durch ihre Parameterdarstellungen gegebenen Geraden. Zwei Gerade g_1 und g_2 im Raume schneiden sich im allgemeinen nicht. Wenn sie sich

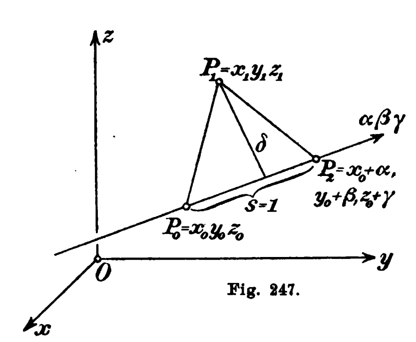


Fig. 247.

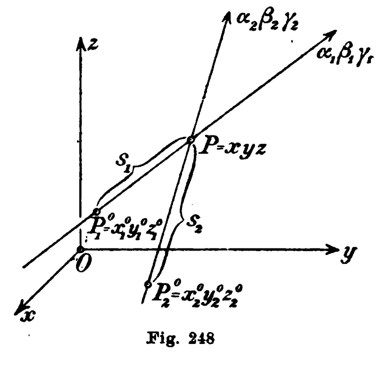


Fig. 248

schneiden, sagt man auch, daß sie sich *in vereinigter Lage* befinden.

Seien die beiden Geraden durch ihre Parameterdarstellungen (vgl. § 43, (2)):

$$(1) \quad \begin{cases} x = x_1^0 + \alpha_1 s, & y = y_1^0 + \beta_1 s, & z = z_1^0 + \gamma_1 s, \\ x = x_2^0 + \alpha_2 s, & y = y_2^0 + \beta_2 s, & z = z_2^0 + \gamma_2 s \end{cases}$$

gegeben. Haben die Geraden einen gemeinsamen Punkt $P = x, y, z,$

der zu den Parameterwerten s_1, bezüglich s_2 (Fig. 248) gehört, so müssen die drei Gleichungen bestehen:

$$(2)\qquad \begin{cases}(x_1{}^0 - x_2{}^0) + \alpha_1 s_1 - \alpha_2 s_2 = 0\\ (y_1{}^0 - y_2{}^0) + \beta_1 s_1 - \beta_2 s_2 = 0\\ (z_1{}^0 - z_2{}^0) + \gamma_1 s_1 - \gamma_2 s_2 = 0,\end{cases}$$

was nur möglich ist (Anm. 2, II, 3), wenn:

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} x_1{}^0 - x_2{}^0 & \alpha_1 & \alpha_2\\ y_1{}^0 - y_2{}^0 & \beta_1 & \beta_2\\ z_1{}^0 - z_2{}^0 & \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung (3) *ist die Bedingung, daß die beiden Geraden* (1) *sich schneiden.*

Die Parameterwerte s_1 und s_2 des Schnittpunktes P ergeben sich dann in der Tat aus den Gleichungen (2), deren wirkliche Auflösung weiterhin in den Formeln (16) erhalten wird.

2. Bedingung der vereinigten Lage zweier durch Grund- und Aufriß gegebenen Geraden. Sollen die beiden durch die Gleichungenpaare (vgl. § 43, (13)):

$$(4)\qquad \begin{cases} y = b_1{}^0 + b_1 x\\ z = c_1{}^0 + c_1 x\end{cases} \qquad \begin{cases} y = b_2{}^0 + b_2 x\\ z = c_2{}^0 + c_2 x\end{cases}$$

gegebenen Geraden sich schneiden, so muß der Schnittpunkt x, y, z allen vier Gleichungen (4) genügen, also auch den durch Elimination von y und z entstehenden Gleichungen:

$$(5)\qquad \begin{cases}(b_1 - b_2)x + (b_1{}^0 - b_2{}^0) = 0,\\ (c_1 - c_2)x + (c_1{}^0 - c_2{}^0) = 0.\end{cases}$$

Die beiden Geraden (4) *schneiden sich daher unter der Bedingung:*

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} b_1 - b_2 & b_1{}^0 - b_2{}^0\\ c_1 - c_2 & c_1{}^0 - c_2{}^0\end{vmatrix} = 0.$$

Fig. 249.

Der Schnittpunkt selbst wird dann:

$$(7)\quad x = -\frac{b_1{}^0 - b_2{}^0}{b_1 - b_2} = -\frac{c_1{}^0 - c_2{}^0}{c_1 - c_2},\ y = \frac{b_1 b_2{}^0 - b_2 b_1{}^0}{b_1 - b_2},\ z = \frac{c_1 c_2{}^0 - c_2 c_1{}^0}{c_1 - c_2}.$$

In der Grund- und Aufrißdarstellung der beiden Geraden g_1 *und* g_2 (§ 43, 6) *besteht die Bedingung des Schneidens darin, daß der Schnittpunkt* P' *der beiden Grundrisse* g_1' *und* g_2' *und der Schnittpunkt* P'' *der beiden Aufrisse* g_1'' *und* g_2'' (Fig. 249) *senkrecht übereinander liegen,*

also Grund- und Aufriß eines Raumpunktes P sind (§ 31, 7). In der Tat haben die Punkte P' und P'' unter der Bedingung (6) aus (5) die nämliche Koordinate x.

3. Schraubensinn eines Paares gerichteter Geraden. Sind g_1 und g_2 zwei gerichtete Gerade, die sich *nicht* schneiden, und verbindet man irgend einen Punkt T_1 der ersten mit irgend einem Punkt T_2 der zweiten Geraden (Fig. 250), so ist die Verbindungslinie t_{12} eine *gemeinsame Transversale* der beiden Geraden. Sie soll ihrer Richtung nach von der ersten zur zweiten Geraden laufen.

Die drei gerichteten Geraden $g_1 g_2 t_{12}$ bestimmen, in dieser Reihenfolge genommen, nach § 32, **10** einen bestimmten Schraubensinn $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(g_1 g_2 t_{12})$, denjenigen eines Achsensystems, dessen drei von irgend einem Punkte O ausgehende Achsen $g_1{}^0 g_2{}^0 t_{12}^0$ (Fig. 250) mit $g_1 g_2 t_{12}$ parallel und gleichgerichtet sind $\mathfrak{S}(g_1 g_2 t_{12}) = \mathfrak{S}(g_1{}^0 g_2{}^0 t_{12}^0)$.

Man kann den Punkt O nach T_1 verlegen und hat dann nur durch T_1 eine Parallele $g_2{}^0$ zu g_2 zu ziehen (Fig. 251). Je nachdem dann die

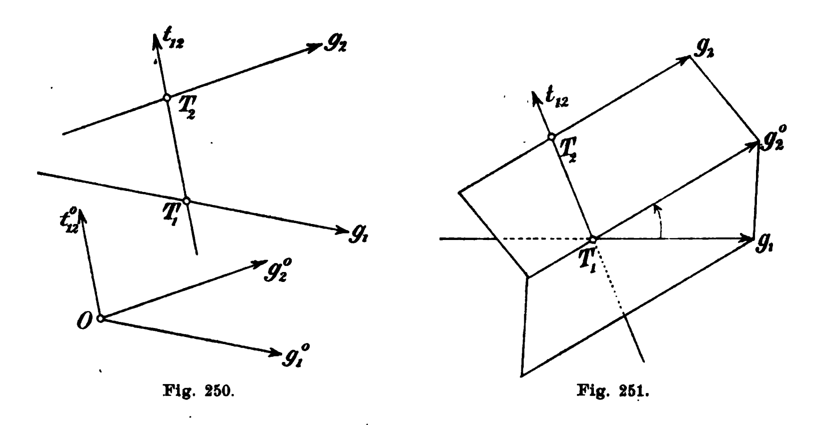


Fig. 250. Fig. 251.

positive Halbachse $T_1 T_2$ von t_{12} auf der positiven oder negativen Seite der durch die Achsenfolge $g_1 g_2{}^0$ gerichteten Ebene $g_1 g_2{}^0$ (vgl. § 32, 8) liegt, ist der Schraubensinn $\mathfrak{S}(g_1 g_2 t_{12}) = \mathfrak{S}(g_1 g_2{}^0 t_{12})$ positiv oder negativ (in Fig. 251 positiv). Denkt man sich in g_2 in der positiven Richtung von g_2 schwimmend mit dem Gesicht nach g_1 gewendet, so ist $\mathfrak{S}$ positiv oder negativ, je nachdem man g_1 von links nach rechts (wie Fig. 251) oder von rechts nach links laufen sieht.

Da nun, was das Achsensystem $g_1 g_2{}^0 t_{12}$ betrifft, die Gerade g_2 der Ebene $g_1 g_2{}^0$ parallel ist, also ihrer ganzen Ausdehnung nach auf *derselben* Seite der Ebene liegt, ist der Schraubensinn $\mathfrak{S}$ von der Wahl

des Punktes T_2 auf g_2 unabhängig. Ebenso ergibt sich aber, daß er von der Wahl von T_1 auf g_1 unabhängig ist.

Der Schraubensinn $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(g_1 g_2 t_{12})$ ist daher *unabhängig von der Wahl der Transversale* t_{12}, und den beiden Geraden g_1, g_2, zunächst bei dieser ihrer Reihenfolge eigentümlich. Er ist aber auch *von dieser Reihenfolge unabhängig.* Denn nimmt man g_2 als erste und g_1 als zweite Gerade, so ändert sich (Fig. 252 gegenüber Fig. 251) der Drehungssinn der Ebene $g_1 g_2^0$, aber auch der Sinn der Transversale, die nun als t_{21} von T_2 nach T_1 läuft. Daher ist $\mathfrak{S}(g_2 g_1 t_{21}) = \mathfrak{S}(g_1 g_2 t_{12})$.

I. *Ein Paar gerichtete Gerade* g_1, g_2, *die sich nicht schneiden, haben einen bestimmten, von ihrer Reihenfolge unabhängigen Schraubensinn* $\mathfrak{S}$,[101]) *der bestimmt wird als Schraubensinn eines Achsensystems*

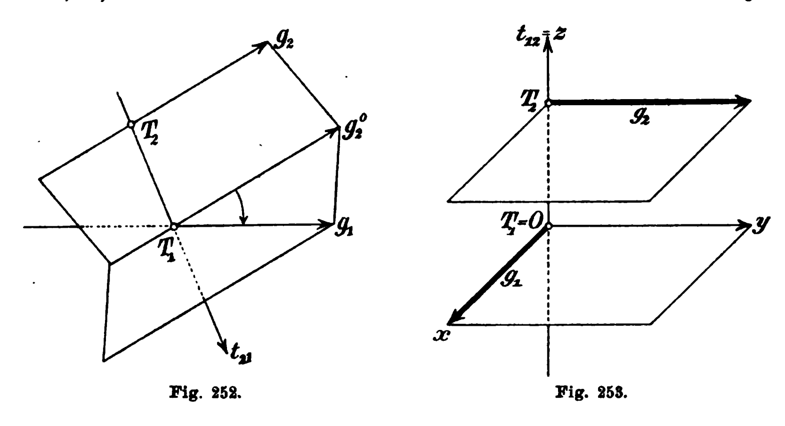


Fig. 252. Fig. 253.

$O g_1^0 g_2^0 t_{12}^0$, *dessen Achsen parallel und gleichgerichtet den beiden Geraden und einer beliebigen von* g_1 *nach* g_2 *laufenden Transversale* t_{12} *sind* (Fig. 250).

II. *Denkt man sich mit dem Kopf voran in der einen Geraden nach ihrer positiven Richtung hin schwimmend, das Gesicht der anderen Geraden zugewendet, so ist der Schraubensinn* $\mathfrak{S}$ *positiv oder negativ, je nachdem man diese ihrer positiven Richtung nach von links nach rechts oder von rechts nach links laufen sieht.*

Um ein bestimmtes Beispiel vor Augen zu haben, denken wir uns das positiv orientierte rechtwinklige Achsensystem $Oxyz$ (Fig. 253, die x-Achse tritt nach vorn aus der Zeichnungsebene Oyz heraus). Die eine Gerade g_1 sei die gerichtete x-Achse selbst, die andere g_2 gehe durch einen Punkt $T_2 = 0, 0, d$ der positiven $(d > 0)$ Halbachse z parallel der gerichteten y-Achse. Nach I ist der Schraubensinn des Paares $g_1 g_2$ gleich dem des Achsensystems $Oxyz$, also positiv. Nach

II ergibt sich dasselbe, da man, in der einen Geraden schwimmend, jedesmal die andere von links nach rechts laufend erblickt.

4. Das Moment zweier gerichteten Geraden im Raume. Zwei gerichtete Geraden g_1 und g_2 seien durch ihre Richtungskosinus α_1, β_1, γ_1 und α_2, β_2, γ_2 und durch je einen Anfangspunkt $P_1^0 = x_1^0$, y_1^0, z_1^0 und $P_2^0 = x_2^0$, y_2^0, z_2^0 gegeben (Fig. 254). Ihre Parameterdarstellung geben die Gleichungen (1).

Für den Winkel ϑ zwischen den beiden Geraden ist nach § 35, (1) und (2):

$$\cos\vartheta = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2, \tag{8}$$

$$\sin\vartheta = \sqrt{(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)^2 + (\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1)^2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2}. \tag{9}$$

Verbindet man einen beliebigen Punkt $P_1 = x_1, y_1, z_1$ (s_1) der Geraden g_1 mit einem beliebigen Punkte $P_2 = x_2, y_2, z_2$ (s_2) der Geraden g_2 (Fig. 254), so erhält man eine *gemeinsame Transversale* $t_{12} = P_1P_2$ der beiden Geraden g_1 und g_2.

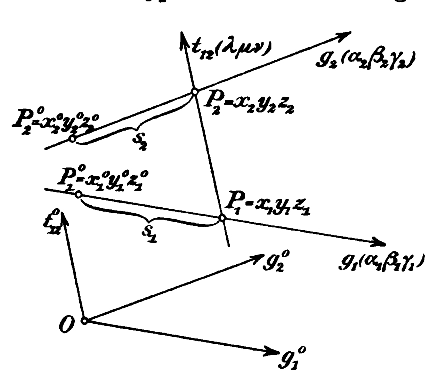


Fig. 254.

Die von P_1 nach P_2 hinlaufende Transversale hat, wenn:

$$t = \overline{P_1P_2} \tag{10}$$

ihre *absolute Länge* von P_1 bis P_2 bedeutet, nach § 34, (7) die Richtungskosinus:

$$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{t}, \quad \mu = \frac{y_2 - y_1}{t},$$
$$\nu = \frac{z_2 - z_1}{t},$$

oder nach (1):

$$\left\{\begin{aligned} \lambda &= \frac{x_2^0 - x_1^0 + \alpha_2 s_2 - \alpha_1 s_1}{t}, \quad \mu = \frac{y_2^0 - y_1^0 + \beta_2 s_2 - \beta_1 s_1}{t}, \\ \nu &= \frac{z_2^0 - z_1^0 + \gamma_2 s_2 - \gamma_1 s_1}{t}. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Der Sinus der Ecke, deren Kanten g_1^0, g_2^0, t_{12}^0, etwa von O ausgehend (Fig. 254), mit den Geraden g_1, g_2, t_{12} parallel und gleichgerichtet sind, ist dann bei positiv orientiertem System $Oxyz$ nach § 37, (9):

$$\sin g_1^0 g_2^0 t_{12}^0 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \lambda \\ \beta_1 & \beta_2 & \mu \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \nu \end{vmatrix},$$

also mit Benutzung von (11):

$$\sin g_1^0 g_2^0 t_{12}^0 = \frac{1}{t}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & x_2^0 - x_1^0 + \alpha_2 s_2 - \alpha_1 s_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & y_2^0 - y_1^0 + \beta_2 s_2 - \beta_1 s_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & z_2^0 - z_1^0 + \gamma_2 s_2 - \gamma_1 s_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{t}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & x_2^0 - x_1^0 \\ \beta_1 & \beta_2 & y_2^0 - y_1^0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & z_2^0 - z_1^0 \end{vmatrix}$$

(Anm. 1, IV, 4). Führen wir die *den Geraden* g_1, g_2 *eigentümliche* Größe

(12)
$$M = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & x_2^0 - x_1^0 \\ \beta_1 & \beta_2 & y_2^0 - y_1^0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & z_2^0 - z_1^0 \end{vmatrix}$$

ein, so wird:

(13)
$$t \cdot \sin g_1^0 g_2^0 t_{12}^0 = M.$$

Wir nennen den Ausdruck M *in* (12) *das Moment*[101]) *der beiden Geraden* g_1, g_2, *die bezüglich durch die Punkte* x_1^0, y_1^0, z_1^0 *und* x_2^0, y_2^0, z_2^0 *in den Richtungen* α_1, β_1, γ_1 *und* α_2, β_2, γ_2 *hindurchgehen* (Fig. 254). Da nun t nach (10) positiv ist, und der Sinus der Ecke $g_1^0 g_2^0 t_{12}^0$ nach § 32, **11** positiv oder negativ ist, je nachdem das Achsensystem $g_1^0 g_2^0 t_{12}^0$ und daher nach § 44, **3** das Geradenpaar g_1, g_2 positiven oder negativen Schraubensinn hat, so folgt:

Der Schraubensinn eines Paares gerichteter Geraden ist positiv oder negativ, je nachdem ihr Moment positiv oder negativ ist.

Das Moment zweier Geraden ist nach seiner Definition (12) *von der Reihenfolge der beiden Geraden unabhängig,* da die Determinante (12) bei Vertauschung der Indizes 1 und 2 sich nicht ändert (Anm. 1, IV, 2; 5).

In Übereinstimmung mit § 44, **3** ergibt sich also auch hier der Schraubensinn des Paares unabhängig von der Reihenfolge, sowie von der Wahl der Transversale.

Für die beiden Geraden in Fig. 253 können wir:

$$x_1^0 = 0, \quad y_1^0 = 0, \quad z_1^0 = 0; \quad x_2^0 = 0, \quad y_2^0 = 0, \quad z_2^0 = d$$

nehmen und ist:

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = 0; \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = 1, \quad \gamma_2 = 0.$$

Damit wird nach (12):

$$M = d > 0,$$

so daß der Schraubensinn des Paares positiv ist.

Aus (3) und (12) folgt:

Das Verschwinden des Momentes ist die Bedingung, daß die beiden Geraden sich schneiden.

5. Die Fußpunkte der gemeinsamen Normale von zwei Geraden. Die Transversale $t_{12} = \lambda, \mu, \nu$ der beiden Geraden g_1, g_2 in

§ 44, 4, die bisher (Fig. 254) eine ganz beliebige war, wird zur *gemeinsamen Normale n_{12} der beiden Geraden*, wenn (§ 35, (4)):

$$(14)\qquad \begin{cases} \alpha_1\lambda + \beta_1\mu + \gamma_1\nu = 0, \\ \alpha_2\lambda + \beta_2\mu + \gamma_2\nu = 0, \end{cases}$$

oder nach (11) und (8):

$$(15)\qquad \begin{cases} s_1 - \cos\vartheta\,.\,s_2 = \alpha_1(x_2^0 - x_1^0) + \beta_1(y_2^0 - y_1^0) + \gamma_1(z_2^0 - z_1^0) \\ \cos\vartheta\,.\,s_1 - s_2 = \alpha_2(x_2^0 - x_1^0) + \beta_2(y_2^0 - y_1^0) + \gamma_2(z_2^0 - z_1^0). \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich durch Ausflösung nach s_1 und s_2, wenn nur $\sin\vartheta \neq 0$ ist, stets je ein und nur ein Wert für s_1 und s_2, nämlich:

$$(16)\qquad \begin{cases} \sin^2\vartheta\,.\,s_1 = (\alpha_1 - \alpha_2\cos\vartheta)(x_2^0 - x_1^0) + (\beta_1 - \beta_2\cos\vartheta)(y_2^0 - y_1^0) \\ \qquad\qquad + (\gamma_1 - \gamma_2\cos\vartheta)(z_2^0 - z_1^0), \\ \sin^2\vartheta\,.\,s_2 = (\alpha_2 - \alpha_1\cos\vartheta)(x_1^0 - x_2^0) + (\beta_2 - \beta_1\cos\vartheta)(y_1^0 - y_2^0) \\ \qquad\qquad + (\gamma_2 - \gamma_1\cos\vartheta)(z_1^0 - z_2^0). \end{cases}$$

Diese Formeln geben für die Darstellung (1) *der beiden Geraden die beiden Parameterwerte der Fußpunkte P_1 und P_2 der gemeinsamen Normale n_{12}* (Fig. 255).

Wenn g_1 und g_2 sich schneiden, geben die Formeln (16) *die Parameter s_1 und s_2 des Schnittpunktes* (vgl. § 44, 1).

Denn multipliziert man die drei Gleichungen (2) bezüglich mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ oder $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und addiert, so folgen auch die Formeln (15).

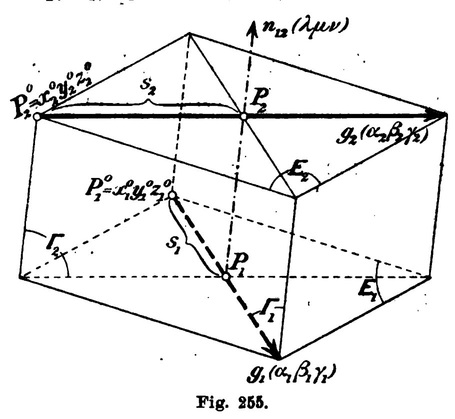


Fig. 255.

6. Die Gleichungen der gemeinsamen Normale. Die durch P_1 und P_2 (Fig. 255) senkrecht zur gemeinsamen Normale n_{12} gelegten Ebenen E_1 und E_2 enthalten die Geraden g_1 und g_2 bezüglich ganz. Man erhält also n_{12} auch dadurch, daß man durch g_1 eine zu g_2 parallele Ebene E_1 und durch g_2 eine zu g_1 parallele Ebene E_2 legt und dann weiter durch g_1 und g_2 die zu E_1 und E_2 senkrechten Ebenen Γ_1 und bezüglich Γ_2 zieht. Dann ist n_{12} der Durchschnitt $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ der beiden letzteren Ebenen.

Die Ebene Γ_1 ist dadurch bestimmt, daß sie durch $P_1^0 = x_1^0, y_1^0, z_1^0$ geht und zwei durch P_1^0 gehende Gerade, die eine g_1 mit den Richtungskosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und die andere parallel n_{12} mit den durch (14) bestimmten Richtungskosinus λ, μ, ν enthält; ihre Gleichung ist da-

her nach § 40, (20):

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} x - x_1^0 & y - y_1^0 & z - z_1^0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 0.$$

Ebenso hat die Ebene Γ_2 die Gleichung:

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} x - x_2^0 & y - y_2^0 & z - z_2^0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 0.$$

Nach (14) folgt aber für die Richtungskosinus λ, μ, ν der gemeinsamen Normale n_{12} (vgl. § 33, 8):

$$(18)\qquad \lambda = \varepsilon \cdot \frac{\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2}{\sin\vartheta}, \quad \mu = \varepsilon \cdot \frac{\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2}{\sin\vartheta}, \quad \nu = \varepsilon \cdot \frac{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}{\sin\vartheta},$$

$$(\varepsilon = \pm 1).$$

Damit wird:

$$\varepsilon \sin\vartheta \,.\, (\beta_1\nu - \gamma_1\mu) = \beta_1(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2) - \gamma_1(\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2) = \alpha_1\cos\vartheta - \alpha_2,$$

usw., so daß man die beiden Gleichungen (17) auch schreiben kann:

$$(19)\quad \begin{cases} (\alpha_1\cos\vartheta - \alpha_2)(x - x_1^0) + (\beta_1\cos\vartheta - \beta_2)(y - y_1^0) + (\gamma_1\cos\vartheta - \gamma_2)(z - z_1^0) = 0, \\ (\alpha_2\cos\vartheta - \alpha_1)(x - x_2^0) + (\beta_2\cos\vartheta - \beta_1)(y - y_2^0) + (\gamma_2\cos\vartheta - \gamma_1)(z - z_2^0) = 0. \end{cases}$$

Dies sind somit die Gleichungen (vgl. § 43, (5)) *der gemeinsamen Normale* n_{12} *der beiden Geraden* g_1 *und* g_2, *die durch* (1) *gegeben sind und den Winkel* ϑ *miteinander bilden.*

7. Die kürzeste Entfernung zweier Geraden im Raume. Da die Strecke P_1P_2 der gemeinsamen Normale (Fig. 255) auf den beiden parallelen Ebenen E_1 und E_2 senkrecht steht, so ist die absolute Länge

$$(20)\qquad n = \overline{P_1P_2}$$

der Strecke P_1P_2 die senkrechte Entfernung der beiden Ebenen und daher die kürzeste Entfernung der in diesen Ebenen verlaufenden Geraden g_1 und g_2.

Nach der für jede beliebige Transversale t_{12} gültigen Formel (13) ist aber speziell für die Transversale n_{12}:

$$M = n \,.\, \sin g_1^0 g_2^0 n_{12}^0,$$

während mit Einsetzung der Werte (18) von λ, μ, ν:

$$\sin g_1^0 g_2^0 n_{12}^0 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \lambda \\ \beta_1 & \beta_2 & \mu \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \nu \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\varepsilon}{\sin\vartheta}\{(\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2)^2 + (\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2)^2 + (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)^2\} = \varepsilon \sin\vartheta$$

wird (vgl. § 41, (26)), und daher:

$$M = n \,.\, \varepsilon \sin \vartheta. \tag{21}$$

Da n und $\sin\vartheta$ positiv sind, folgt hieraus, daß ε das Vorzeichen des Momentes M ist, wodurch für die von g_1 nach g_2 laufende Normale n_{12} auch das Vorzeichen ε der Richtungskosinus (18) bestimmt ist.

Die Formel (21) aber gibt, wenn wir im Gegensatz zu (20) das Vorzeichen ε in n aufnehmen, den Satz:[102])

Der kürzeste Abstand n zweier gerichteten Geraden g_1 und g_2 ist:

$$n = \frac{M}{\sin \vartheta}. \tag{22}$$

wo M das Moment und ϑ den Winkel der beiden Geraden bedeutet, und n positiv oder negativ gerechnet ist, je nachdem das Paar der beiden Geraden positiven oder negativen Schraubensinn hat.

8. Das Moment zweier Geraden, die durch (4) gegeben sind. Sind die Gleichungen der beiden Geraden g_1 und g_2 in der Form (4) gegeben, so haben wir, um sie in die Form (1) zu bringen, nach § 43, (14) und (15) zu setzen:

$$\begin{gathered} x_1^0 = 0,\ y_1^0 = b_1^0,\ z_1^0 = c_1^0;\quad x_2^0 = 0,\ y_2^0 = b_2^0,\ z_2^0 = c_2^0, \\ \alpha_1 = \frac{1}{\varkappa_1},\ \beta_1 = \frac{b_1}{\varkappa_1},\ \gamma_1 = \frac{c_1}{\varkappa_1};\quad \alpha_2 = \frac{1}{\varkappa_2},\ \beta_2 = \frac{b_2}{\varkappa_2},\ \gamma_1 = \frac{c_2}{\varkappa_2}, \end{gathered} \tag{23}$$

wo wir, um die beiden Geraden zu richten, etwa mit positivem Vorzeichen setzen:

$$\varkappa_1 = \sqrt{1 + b_1^2 + c_1^2},\quad \varkappa_2 = \sqrt{1 + b_2^2 + c_2^2}. \tag{24}$$

Dann wird nach (12):

$$M = \frac{1}{\varkappa_1 \varkappa_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_2^0 - b_1^0 \\ c_1 & c_2 & c_2^0 - c_1^0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\varkappa_1 \varkappa_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 - b_1 & b_2^0 - b_1^0 \\ c_1 & c_2 - c_1 & c_2^0 - c_1^0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\varkappa_1 \varkappa_2} \begin{vmatrix} b_2 - b_1 & b_2^0 - b_1^0 \\ c_2 - c_1 & c_2^0 - c_1^0 \end{vmatrix}.$$

Das Moment der beiden im Sinne der Richtungskosinus (23), (24) *gerichteten Geraden* (4) *ist* (vgl. (6)):

$$M = \frac{1}{\sqrt{1 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{1 + b_2^2 + c_2^2}} \cdot \begin{vmatrix} b_2 - b_1 & b_2^0 - b_1^0 \\ c_2 - c_1 & c_2^0 - c_1^0 \end{vmatrix}. \tag{25}$$

9. Das Moment zweier Geraden als Rauminhalt eines Tetraeders. Sind $P_1 = x_1, y_1, z_1$ und $P_2 = x_2, y_2, z_2$ zwei in der positiven Richtung der Geraden g_1 aufeinanderfolgende Punkte derselben und $P_3 = x_3, y_3, z_3$ und $P_4 = x_4, y_4, z_4$ zwei ebenso auf g_2 liegende (Fig. 256), so ist (§ 34, (7)):

$$\alpha_1 = \frac{x_2 - x_1}{r_{12}}, \quad \beta_1 = \frac{y_2 - y_1}{r_{12}}, \quad \gamma_1 = \frac{z_2 - z_1}{r_{12}}, \quad r_{12} = \overline{P_1 P_2}.$$

$$\alpha_2 = \frac{x_4 - x_3}{r_{34}}, \quad \beta_2 = \frac{y_4 - y_3}{r_{34}}, \quad \gamma_2 = \frac{z_4 - z_3}{r_{34}}, \quad r_{34} = \overline{P_3 P_4}.$$

Indem man nun den Ausdruck (12) mit P_1 und P_3 (Fig. 256) für P_1^0 und P_2^0 (Fig. 254) bildet, wird (Anm. 1, IV, 4; 2; III, (17)):

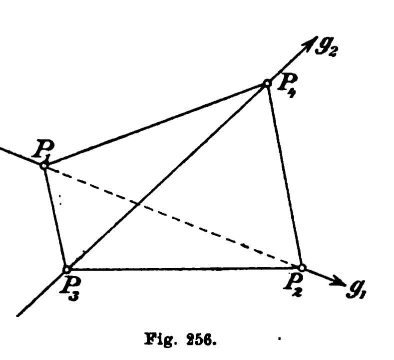


Fig. 256.

$$M = \frac{1}{r_{12} r_{34}} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_3 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_3 & y_3 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_4 - z_3 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r_{12} r_{34}} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_4 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{r_{12} r_{34}} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r_{12} r_{34}} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r_{12} r_{34}} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r_{12} r_{34}} 6 P_1 P_2 P_3 P_4$$

(vgl. § 39, (7)).

Das Moment zweier gerichteten Geraden, die bezüglich vom Punkte P_1 *nach dem Punkte* P_2 *und von* P_3 *nach* P_4 *laufen, ist der sechsfache relative Rauminhalt des Tetraeders* $P_1 P_2 P_3 P_4$ *dividiert durch die absoluten Entfernungen* $\overline{P_1 P_2}$ *und* $\overline{P_3 P_4}$*:*

$$(26) \qquad M = \frac{6 \cdot P_1 P_2 P_3 P_4}{\overline{P_1 P_2} \cdot \overline{P_3 P_4}} = \frac{1}{r_{12} r_{34}} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

$$r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$
$$r_{34} = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 + (z_4 - z_3)^2}.$$

Da M eine den beiden Geraden eigentümliche Konstante ist, bleibt der Rauminhalt $P_1 P_2 P_3 P_4$ ungeändert, wenn man die Strecken $\overline{P_1 P_2}$

und $P_3 P_4$, ohne ihre Länge zu ändern, beliebig auf den Geraden verschiebt.

Macht man $r_{12} = r_{34} = 1$, wird direkt:

(27) $$M = 6 \,.\, P_1 P_2 P_3 P_4 .$$

III. Kapitel.

Die Koordinaten der Ebene.

§ 45. Die Koordinaten der Ebene und die Gleichung des Punktes.

1. Die Koordinaten der Ebene.[71]) Die durch die allgemeine Gleichung:

(1) $$Ax + By + Cz + D = 0$$

gegebene Ebene schneidet nach § 40, 5 auf den Koordinatenachsen die Strecken (Fig. 257):

(2) $$OL = -\frac{D}{A}, \quad OM = -\frac{D}{B}, \quad ON = -\frac{D}{C}$$

ab. *Die negativen reziproken Werte der relativen Längen dieser Strecken heißen die Koordinaten der Ebene* und werden als solche mit u, v, w bezeichnet, so daß (vgl. § 19, 1):

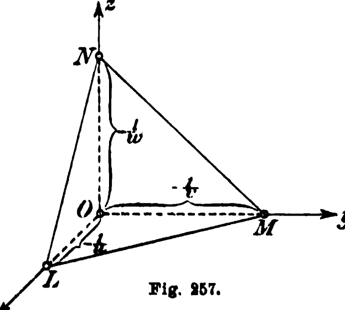


Fig. 257.

(3) $$u = \frac{A}{D}, \quad v = \frac{B}{D}, \quad w = \frac{C}{D}.$$

Sind umgekehrt *die Koordinaten u, v, w gegeben*, so ist nach (3):

$$A : B : C : D = u : v : w : 1$$

und daher *die Gleichung der Ebene* (vgl. § 40, 4):

(4) $$ux + vy + wz + 1 = 0$$

(über den Fall $D = 0$ vgl. § 47, 5; § 49, 5).

Die Beziehung zwischen einer Ebene und ihren Koordinaten ist daher wechselseitig eindeutig.

Nach § 19, 1 sind v, w; w, u; u, v zugleich die Koordinaten der Schnittlinien MN, NL, LM in bezug auf die ebenen Koordinatensysteme Oyz, Ozx, Oxy (vgl. § 31, 4).

2. Besondere Werte der Koordinaten. Alle Ebenen, von deren drei Koordinaten eine, etwa $u = 0$ ist, sind (vgl. § 40, 5; § 31, 6) der

x-Achse parallel; alle Ebenen, für die $v = 0$ und $w = 0$, sind der yz-Ebene parallel.

Alle Ebenen von gleichem u gehen durch einen festen Punkt L der x-Achse, alle Ebenen von gleichem v und w gehen durch eine feste Gerade MN der yz-Ebene (Fig. 257).

3. Die Gleichung des Punktes in laufenden Ebenenkoordinaten. Sind A, B, C, D beliebige (nicht mit den in (1) vorkommenden in Beziehung stehende) Konstanten und u, v, w die Koordinaten einer veränderlichen Ebene, so kann man sich die Gleichung:

$$Au + Bv + Cw + D = 0 \tag{5}$$

dadurch entstanden denken, daß man in die Gleichung (4) der Ebene u, v, w die Werte:

$$x = \frac{A}{D}, \quad y = \frac{B}{D}, \quad z = \frac{C}{D} \tag{6}$$

eingesetzt hat. Die Gleichung (5) ist daher die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Punkt (6) auf der Ebene u, v, w liegt, oder, was dasselbe ist, daß die veränderliche Ebene u, v, w durch den festen Punkt (6) geht.

Eine veränderliche Ebene geht immer dann und nur dann durch den festen Punkt (6), *wenn ihre Koordinaten* u, v, w *der Gleichung* (5) *genügen.*

Man nennt daher (5) *die Gleichung des Punktes* (6) *in laufenden Ebenenkoordinaten* u, v, w. Es gibt ∞^2 Ebenen, deren Koordinaten der Gleichung (5) genügen.

4. Dualität zwischen den Koordinaten, beziehungsweise den Gleichungen von Ebene und Punkt. Wir können die vorstehenden Erklärungen in folgender Weise gegenüberstellen (vgl. § 19, 3):

Ist:	*Ist:*
(7) $Ax + By + Cz + D = 0$	(7') $Au + Bv + Cw + D = 0$
die Gleichung einer Ebene in laufenden Punktkoordinaten x, y, z, *so sind:*	*die Gleichung eines Punktes in laufenden Ebenenkoordinaten* u, v, w, *so sind:*
(8) $u_0 = \frac{A}{D}, \quad v_0 = \frac{B}{D}, \quad w_0 = \frac{C}{D}$	(8') $x_0 = \frac{A}{D}, \quad y_0 = \frac{B}{D}, \quad z_0 = \frac{C}{D}$
die Koordinaten der Ebene.	*die Koordinaten des Punktes.*
Sind $u_0, v_0\ w_0$ *die Koordinaten einer Ebene, so ist:*	*Sind* x_0, y_0, z_0 *die Koordinaten eines Punktes, so ist:*
(9) $u_0 x + v_0 y + w_0 z + 1 = 0$	(9') $x_0 u + y_0 v + z_0 w + 1 = 0$

die Gleichung der Ebene in laufenden Punktkoordinaten x, y, z.

die Gleichung des Punktes in laufenden Ebenenkoordinaten u, v, w.

5. Bedingung der vereinigten Lage von Punkt und Ebene. Die Ebene u_0, v_0, w_0 und der Punkt x_0, y_0, z_0 *liegen* daher *vereinigt*, d. h. die Ebene geht durch den Punkt und der Punkt liegt in der Ebene, immer dann und nur dann, wenn:

$$u_0 x_0 + v_0 y_0 + w_0 z_0 + 1 = 0. \tag{10}$$

6. Ebene durch drei Punkte, Punkt in drei Ebenen. Die *Gleichung eines Punktes* hat nach § 45, **3** immer die Form:

$$Au + Bv + Cw + D = 0. \tag{11}$$

Sie hängt, wie die Gleichung der Ebene § 40, **3**; **4**, von *drei Konstantenverhältnissen* $A : B : C : D$ ab, die bestimmt sind durch drei Ebenen u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3, welche durch den Punkt gehen. Denn da deren Koordinaten der Gleichung (11) genügen müssen, so ist:

$$\left\{\begin{array}{l} Au_1 + Bv_1 + Cw_1 + D = 0, \\ Au_2 + Bv_2 + Cw_2 + D = 0, \\ Au_3 + Bv_3 + Cw_3 + D = 0. \end{array}\right. \tag{12}$$

Eliminiert man aus (11) und (12) die Konstantenverhältnisse, so erhält man (Anm. 2, III, 3) die Gleichung des Punktes, der in den drei Ebenen liegt, und damit den folgenden rechts stehenden Satz, zu dem der duale, links stehende schon § 40, **1** abgeleitet wurde (vgl. § 19, **6**).

Die Gleichung der Verbindungsebene der drei Punkte x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 *ist in laufenden Koordinaten* x, y, z:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Es ist zugleich die Bedingung dafür, daß die vier Punkte x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 in einer Ebene liegen.

Die Gleichung des Schnittpunktes der drei Ebenen u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3 *ist in laufenden Koordinaten* u, v, w:

$$\begin{vmatrix} u & v & w & 1 \\ u_1 & v_1 & w_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{13'}$$

Es ist zugleich die Bedingung dafür, daß die vier Ebenen u, v, w; u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3 durch einen Punkt gehen.

7. Abstand einer Ebene von einem Punkte. Ist ein Punkt durch die Gleichung (11) und eine Ebene durch ihre Koordinaten u_0, v_0, w_0 gegeben, so hat der Punkt die Koordinaten:

$$x = \frac{A}{D}, \quad y = \frac{B}{D}, \quad z = \frac{C}{D}$$

und die Ebene die Gleichung:

$$u_0 x + v_0 y + w_0 z + 1 = 0.$$

Nach § 41, (6) ist der senkrechte Abstand des Punktes von der Ebene:

$$\delta = \frac{u_0 \cdot \frac{A}{D} + v_0 \cdot \frac{B}{D} + w_0 \cdot \frac{C}{D} + 1}{-\sqrt{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}}$$

oder mit Unterdrückung des Index 0:

Der senkrechte Abstand der durch ihre Koordinaten u, v, w gegebenen und gerichteten (vgl. § 41, 1) *Ebene* (Fig. 258) *von dem durch seine Gleichung:*[72])

(14) $$Au + Bv + Cw + D = 0$$

gegebenen Punkte ist:

(15) $$\delta = \frac{Au + Bv + Cw + D}{-D\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

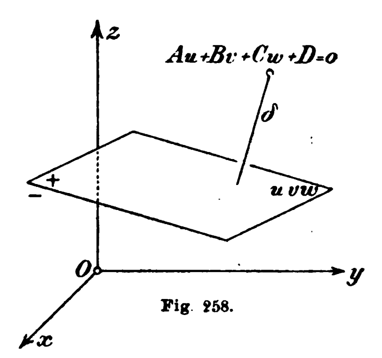


Fig. 258.

8. Die Hessesche Normalform der Gleichung des Punktes. Bringt man die allgemeine Gleichung (5) des Punktes durch Division mit D auf die Form:

(16) $$au + bv + cw + 1 = 0,$$

welche die Hessesche Normalform der Gleichung des Punktes heißt[73]), so sind nach (9′) die Koeffizienten a, b, c direkt die Koordinaten des Punktes. Der Abstand der Ebene u, v, w von dem Punkte ist dann nach (15):

(17) $$\delta = \frac{au + bv + cw + 1}{-\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

Dies ist zugleich der Abstand eines durch seine *Koordinaten* a, b, c gegebenen Punktes von einer durch ihre *Koordinaten* u, v, w gegebenen Ebene.

9. Parameterdarstellung des Ebenenbündels. Nach § 40, 7 umfaßt die Gleichung:

(18) $$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

alle durch den Punkt x_0, y_0, z_0 gehenden Ebenen. Sind λ, μ, ν die Richtungskosinus der Normale einer solchen Ebene, so ist (§ 41, (5)):

$$\lambda : \mu : \nu = A : B : C.$$

Indem man daher in (18) λ, μ, ν statt A, B, C setzt, erhält man nach (8) für die Koordinaten der Ebene:

$$(19)\quad u = \frac{-\lambda}{x_0\lambda + y_0\mu + z_0\nu}, \quad v = \frac{-\mu}{x_0\lambda + y_0\mu + z_0\nu}, \quad w = \frac{-\nu}{x_0\lambda + y_0\mu + z_0\nu}.$$

Dies ist eine Parameterdarstellung der Koordinaten u, v, w aller durch den Punkt x_0, y_0, z_0 gehenden Ebenen, der Ebenen eines *Bündels*[107]). Die Parameter λ, μ, ν bedeuten die homogenen Koordinaten der Stellung der laufenden Ebene des Bündels (vgl. § 42, 3).

10. Transformation der Ebenenkoordinaten von einem rechtwinkligen System auf ein anderes. In bezug auf das rechtwinklige Koordinatensystem $Oxyz$ (Fig. 259) sei ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem $O'x'y'z'$ gegeben, und zwar durch die Koordinaten x_0, y_0, z_0 seines Anfangspunktes O' und die Richtungskosinus a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 seiner Achsen x', y', z'. In bezug auf das neue System habe der Anfangspunkt O des alten die Koordinaten x_0', y_0', z_0'. Zwischen den Koordinaten x, y, z und x', y', z' eines Punktes in bezug auf die beiden Systeme bestehen nach § 37, (13) und (19) die Gleichungen:

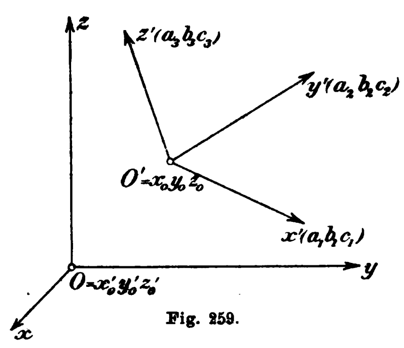


Fig. 259.

$$(20)\begin{cases} x = x_0 + a_1x' + a_2y' + a_3z', \\ y = y_0 + b_1x' + b_2y' + b_3z', \\ z = z_0 + c_1x' + c_2y' + c_3z', \end{cases} \qquad (21)\begin{cases} x' = x_0' + a_1x + b_1y + c_1z, \\ y' = y_0' + a_2x + b_2y + c_2z, \\ z' = z_0' + a_3x + b_3y + c_3z, \end{cases}$$

wobei nach § 37, (18):

$$(22)\quad \begin{cases} x_0' = -a_1x_0 - b_1y_0 - c_1z_0, \\ y_0' = -a_2x_0 - b_2y_0 - c_2z_0, \\ z_0' = -a_3x_0 - b_3y_0 - c_3z_0. \end{cases}$$

Hat nun in bezug auf das alte System eine Ebene die Koordinaten u, v, w und daher nach (9) die Gleichung:

$$ux + vy + wz + 1 = 0,$$

so wird in bezug auf das neue zunächst ihre Gleichung nach (20):

$$(a_1u + b_1v + c_1w)x' + (a_2u + b_2v + c_2w)y' + (a_3u + b_3v + c_3w)z' \\ + (x_0u + y_0v + z_0w + 1) = 0$$

und sind daher nach (8) ihre Koordinaten (vgl. § 21, (6)):

$$(23)\qquad u' = \frac{a_1 u + b_1 v + c_1 w}{x_0 u + y_0 v + z_0 w + 1}, \qquad v' = \frac{a_2 u + b_2 v + c_2 w}{x_0 u + y_0 v + z_0 w + 1},$$

$$w' = \frac{a_3 u + b_3 v + c_3 w}{x_0 u + y_0 v + z_0 w + 1}.$$

Geht man umgekehrt von einer Ebene mit den neuen Koordinaten u', v', w' aus, so erhält man unter Benutzung von (21) für die alten (vgl. § 21, (9)):

$$(24)\qquad u = \frac{a_1 u' + a_2 v' + a_3 w'}{x_0' u' + y_0' v' + z_0' w' + 1}, \qquad v = \frac{b_1 u' + b_2 v' + b_3 w'}{x_0' u' + y_0' v' + z_0' w' + 1},$$

$$w = \frac{c_1 u' + c_2 v' + c_3 w'}{x_0' u' + y_0' v' + z_0' w' + 1}.$$

Zwischen den alten und neuen Koordinaten einer Ebene bestehen somit die Gleichungen (23) *und* (24).

§ 46. Zwei Punkte und die Punktreihe.

1. Gleichung des Punktes, der die Strecke zweier Punkte in bestimmtem Verhältnis teilt. Zwei Punkte P_1 und P_2 seien durch ihre Gleichungen $U_1 = 0$ und $U_2 = 0$ gegeben, wo die Abkürzungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} U_1 = A_1 u + B_1 v + C_1 w + D_1, \\ U_2 = A_2 u + B_2 v + C_2 w + D_2 \end{cases}$$

in derselben Weise wie § 42, (11) gebraucht sind. Die Koordinaten der Punkte sind dann nach § 45, (8'):

$$x_1 = \frac{A_1}{D_1}, \quad y_1 = \frac{B_1}{D_1}, \quad z_1 = \frac{C_1}{D_1};$$

$$x_2 = \frac{A_2}{D_2}, \quad y_2 = \frac{B_2}{D_2}, \quad z_2 = \frac{C_2}{D_2}.$$

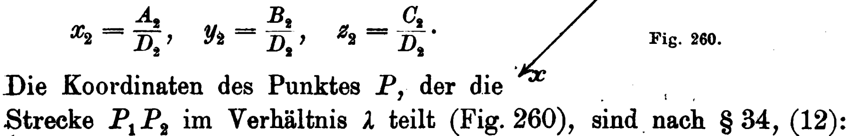


Fig. 260.

Die Koordinaten des Punktes P, der die Strecke $P_1 P_2$ im Verhältnis λ teilt (Fig. 260), sind nach § 34, (12):

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} = \frac{\frac{A_1}{D_1} - \lambda \frac{A_2}{D_2}}{1 - \lambda}, \qquad y = \frac{\frac{B_1}{D_1} - \lambda \frac{B_2}{D_2}}{1 - \lambda}, \qquad z = \frac{\frac{C_1}{D_1} - \lambda \frac{C_2}{D_2}}{1 - \lambda}.$$

Die Gleichung dieses Punktes P ist daher nach § 45, (9') nach Multiplikation mit $1 - \lambda$:

$$\left(\frac{A_1}{D_1} - \lambda \frac{A_2}{D_2}\right) u + \left(\frac{B_1}{D_1} - \lambda \frac{B_2}{D_2}\right) v + \left(\frac{C_1}{D_1} - \lambda \frac{C_2}{D_2}\right) w + (1 - \lambda) = 0$$

oder nach (1):

$$\frac{U_1}{D_1} - \lambda \frac{U_2}{D_2} = 0.$$

Sind daher (vgl. § 20, **1**):

$$(2) \qquad \begin{cases} U_1 = A_1 u + B_1 v + C_1 w + D_1 = 0, \\ U_2 = A_2 u + B_2 v + C_2 w + D_2 = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen zweier Punkte, so ist die Gleichung des Punktes, der die Strecke der beiden im Verhältnis λ teilt:[74])

$$(3) \qquad U_1 - \mu U_2 = 0,$$

wo:

$$(4) \qquad \mu = \frac{D_1}{D_2} \lambda.$$

2. Anwendung der Hesseschen Normalform. Mit $D_1 = 1$, $D_2 = 1$ (vgl. § 45, 8) nimmt der Satz die Form an:

Sind:

$$(5) \qquad \begin{cases} N_1 = a_1 u + b_1 v + c_1 w + 1 = 0, \\ N_2 = a_2 u + b_2 v + c_2 w + 1 = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen zweier Punkte in der Hesseschen Normalform, so ist die Gleichung desjenigen Punktes, der die Strecke jener im Verhältnis λ teilt:

$$(6) \qquad N_1 - \lambda N_2 = 0.$$

Insbesondere lauten die Gleichungen des *Mittelpunktes* und des *unendlich fernen Punktes* der Strecke ($\lambda = -1$ und $\lambda = +1$ nach § 3, **3**; **4**) bezüglich:[75])

$$(7) \qquad N_1 + N_2 = 0, \qquad N_1 - N_2 = 0 \qquad \text{(vgl. § 47, (8))}.$$

3. Die Gleichung der Punktreihe mit dem multiplizierten Teilungsverhältnis als Parameter. Die Gleichung (3) stellt bei veränderlichem λ, bezüglich μ, alle Punkte auf der Verbindungslinie g der Punkte (2) dar. Sie ist *die Gleichung der Punktreihe*, welche durch die in (2) gegebenen *Grundpunkte, die wir nun G_1 und G_2 nennen wollen*, bestimmt ist.

Der *Parameter* μ der Gleichung der Punktreihe bedeutet *das multiplizierte Teilungsverhältnis* des laufenden Punktes P der Reihe in bezug auf die beiden Grundpunkte (vgl. § 20, **3**).

Auf jeder Ebene u_0, v_0, w_0 des Raumes, ausgenommen die durch die Trägerin g der Punktreihe gehenden Ebenen, liegt ein bestimmter Punkt P_0 der Reihe.

Sein Parameter μ hat (vgl. § 42, (21)) den Wert:

$$\mu_0 = \frac{U_1^0}{U_2^0}, \tag{8}$$

wo U_1^0 und U_2^0 die mit $u = u_0$, $v = v_0$, $w = w_0$ gebildeten Ausdrücke (1) sind.

4. Die Gleichung der Punktreihe mit Doppelverhältnis als Parameter. Ist $\lambda = \lambda_0$ der Wert der Teilungsverhältnisse λ für denjenigen Punkt G_0, für den das multiplizierte Teilungsverhältnis μ den Wert 1 hat, so wird wie § 42, **10**:

$$\mu = \frac{\lambda}{\lambda_0} = (G_1 G_2 P G_0). \tag{9}$$

Auch folgt in derselben Weise wie dort:

Sind $U_1 = 0$ und $U_2 = 0$ in (2) die Gleichungen der Grundpunkte G_1 und G_2 einer Punktreihe und u_0, v_0, w_0 die Koordinaten einer festen Ebene, die den Einheitspunkt G_0 der Reihe ausschneidet, so ist die Gleichung des laufenden Punktes P der Reihe:

$$\frac{U_1}{U_1^0} - \mu \frac{U_2}{U_2^0} = 0, \tag{10}$$

wo μ das Doppelverhältnis:

$$\mu = (G_1 G_2 P G_0) \tag{11}$$

bedeutet.

5. Doppelverhältnis von vier Punkten der Reihe. Da in der Gleichung (3) der Parameter μ, wie in § 20, **5**, die multiplizierte Verhältniskoordinate des Punktes P in bezug auf die Punkte G_1 und G_2 ist, so folgt:

Das Doppelverhältnis von vier durch ihre Gleichungen:

$$U_1 - \mu_1 U_2 = 0, \quad U_1 - \mu_2 U_2 = 0, \quad U_1 - \mu_3 U_2 = 0, \quad U_1 - \mu_4 U_2 = 0 \tag{12}$$

gegebenen Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 der Reihe (3) *ist:*

$$\delta = (P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{(\mu_1 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_4)}{(\mu_2 - \mu_3)(\mu_1 - \mu_4)}. \tag{13}$$

Das Doppelverhältnis, das zwei durch ihre Gleichungen:

$$U_1 - \mu_1 U_2 = 0, \qquad U_1 - \mu_2 U_2 = 0 \tag{14}$$

gegebene Punkte P_1, P_2 mit den Grundpunkten G_1, G_2 der Reihe bilden, ist:

$$\delta = (G_1 G_2 P_1 P_2) = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \tag{15}$$

Für $\mu_2 = -\mu_1$ sind die Punkte (14) zu den Grundpunkten *harmonisch.*

6. Koordinaten der Punkte einer Punktreihe und der Ebenen eines Ebenenbüschels. Sind zwei Ebenen durch ihre Koordinaten u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 gegeben, so sind ihre Gleichungen:

$$u_1 x + v_1 y + w_1 z + 1 = 0, \qquad u_2 x + v_2 y + w_2 z + 1 = 0,$$

und daher nach § 42, (15) die Gleichung der Ebene, die den Winkel jener beiden im Sinusverhältnis λ teilt:

$$(u_1 - \varkappa \lambda u_2) x + (v_1 - \varkappa \lambda v_2) y + (w_1 - \varkappa \lambda w_2) z + (1 - \varkappa \lambda) = 0,$$

$$(16) \qquad \varkappa = \frac{\sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}}.$$

Durch die Koeffizienten dieser Gleichung sind aber die Koordinaten der Ebene bestimmt. Neben den Satz § 34, (12), den wir links wiederholen, tritt daher der rechts folgende duale Satz (vgl § 20, 6):[75])

Die Koordinaten x, y, z eines Punktes, der die Strecke der Punkte x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 im Verhältnis λ teilt, sind:

$$(17) \qquad x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}, \quad z = \frac{z_1 - \lambda z_2}{1 - \lambda}.$$

Die Koordinaten u, v, w einer Ebene, die den Winkel der Ebenen u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 im Verhältnis λ teilt, sind mit dem Wert (16) *von $\varkappa$:*

$$(17') \qquad u = \frac{u_1 - \varkappa \lambda u_2}{1 - \varkappa \lambda}, \quad v = \frac{v_1 - \varkappa \lambda v_2}{1 - \varkappa \lambda}, \quad w = \frac{w_2 - \varkappa \lambda w_2}{1 - \lambda}.$$

IV. Kapitel:

Die homogenen gemeinen Koordinaten.

§ 47. Die homogenen Koordinaten des Punktes und der Ebene.

1. Begriff der homogenen gemeinen Koordinaten. Unter den homogenen gemeinen Koordinaten[77]) des Punktes oder der Ebene verstehen wir vier Zahlen x', y', z', t' oder u', v', w', s', deren Verhältnisse die gemeinen Koordinaten x, y, z oder u, v, w des Punktes oder der Ebene sind, derart daß:

$$(1) \quad \frac{x'}{t'} = x, \quad \frac{y'}{t'} = y, \quad \frac{z'}{t'} = z, \qquad (1') \quad \frac{u'}{s'} = u, \quad \frac{v'}{s'} = v, \quad \frac{w'}{s'} = w.$$

Die homogenen Koordinaten bestimmen den Punkt oder die Ebene vollständig, sind aber durch diese *nur ihren Verhältnissen nach* bestimmt.

Sie sollen stets *endliche* Werte haben und dürfen, damit ihre Verhältnisse bestimmt bleiben, *niemals alle vier gleichzeitig verschwinden.*

Wir lassen fernerhin die in (1) und (1') zur Unterscheidung eingeführten Akzente weg. Um dann von den gemeinen zu den homogenen gemeinen Koordinaten überzugehen, haben wir nur $x, y\ z$ (u, v, w) durch $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t} \left(\frac{u}{s}, \frac{v}{s}, \frac{w}{s}\right)$ zu ersetzen, während wir umgekehrt mit $t = 1$, $(s = 1)$ von diesen zu jenen zurückkehren (vgl. § 22, **1**).

2. Gleichungen der Ebene und des Punktes in homogenen Koordinaten. Die allgemeine Gleichung der Ebene oder des Punktes (§ 40, (6); § 45, (5)) wird bei Einführung der homogenen Koordinaten unter nachfolgender Multiplikation mit t oder s:

(2) $Ax + By + Cz + Dt = 0.$ (2') $Au + Bv + Cw + Ds = 0.$

3. Homogene Koordinaten und Koeffizienten der Gleichungen der Ebene und des Punktes. Der Vorteil der homogenen Koordinaten zeigt sich zuerst darin, daß sie sich direkt mit den Koeffizienten der Gleichungen decken. Denn die Sätze § 45, **4** lauten gegenwärtig:

Ist:

(2) $Ax + By + Cz + Dt = 0$

die Gleichung einer Ebene in laufenden Punktkoordinaten x, y, z, t, *so sind:*

(3) $u_0 = A,\ v_0 = B,\ w_0 = C,\ s_0 = D$

die Koordinaten der Ebene.

Sind u_0, v_0, w_0, s_0 *die Koordinaten einer Ebene, so ist:*

(4) $u_0 x + v_0 y + w_0 z + s_0 t = 0$

ihre Gleichung.

Ist:

(2') $Au + Bv + Cw + Ds = 0$

die Gleichung eines Punktes in laufenden Ebenenkoordinaten u, v, w, s, *so sind:*

(3') $x_0 = A,\ y_0 = B,\ z_0 = C,\ t_0 = D$

die Koordinaten des Punktes.

Sind x_0, y_0, z_0, t_0 *die Koordinaten eines Punktes, so ist:*

(4') $x_0 u + y_0 v + z_0 w + t_0 s = 0$

seine Gleichung.

Die Angaben (3) und (3') sind dabei nur bis auf einen gemeinsamen Faktor gemeint (vgl. § 40, (10)).

4. Bedingung der vereinigten Lage von Punkt und Ebene in homogenen Koordinaten. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die vereinigte Lage des Punktes x, y, z, t und der Ebene u, v, w, s lautet entsprechend § 45, (10) (vgl. § 22, (5)):

(5) $$ux + vy + wz + st = 0.$$

5. Die unendlich ferne Ebene und der Koordinatenanfangspunkt. Die homogenen Koordinaten ermöglichen eine Anpassung der analytischen Formeln an die Vorstellung, daß alle unendlich

fernen Punkte des Raumes eine Ebene, *die unendlich ferne Ebene* E_∞, bilden.[17])

Hat nämlich die vierte der homogenen Koordinaten x, y, z, t eines Punktes P den Wert 0, so wird, da x, y, z, t nicht alle vier 0 sein dürfen, wenigstens eine der gemeinen Koordinaten $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ von P unendlich, und damit auch der Punkt P unendlich fern (vgl. § 31, 4). Ist umgekehrt P unendlich fern, und damit wenigstens eine seiner gemeinen Koordinaten unendlich, so muß, da x, y, z, t immer endlich bleiben sollen, $t = 0$ sein. Daher ist:

$$t = 0$$

die notwendige und hinreichende Bedingung aller unendlich fernen Punkte. Diese ist aber nach (2) die Gleichung einer Ebene, deren Koordinaten $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, $w_0 = 0$ sind. Wir sagen daher (vgl. § 22, 5):

Die unendlich ferne Ebene E_∞ *hat die Gleichung:*[78])

$$t = 0 \tag{6}$$

und die Koordinaten:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad s \neq 0 \; (s = 1). \tag{7}$$

Die Gleichung eines unendlich fernen Punktes $x_0 = A$, $y_0 = B$, $z_0 = C$, $t_0 = 0$ hat nach (4') stets die Form:

$$Au + Bv + Cw = 0 \tag{8}$$

(vgl. § 46, (7)).

Das duale Seitenstück zur unendlich fernen Ebene bildet der *Koordinatenanfangspunkt*, der die gemeinen Koordinaten 0, 0, 0, also die homogenen Koordinaten:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad t \neq 0 \; (t = 1) \tag{9}$$

hat und daher nach (4') die Gleichung (vgl. § 40, (14)):

$$s = 0. \tag{10}$$

6. Schnittlinie einer Ebene mit der unendlich fernen Ebene. Eine beliebige Ebene, deren Gleichung

$$Ax + By + Cz + Dt = 0 \tag{11}$$

ist, schneidet die unendlich ferne Ebene (6) in einer Geraden, welche durch die beiden Gleichungen:

$$Ax + By + Cz = 0, \quad t = 0 \tag{12}$$

dargestellt wird und *die unendlich ferne Gerade der Ebene* (11) ist (vgl. § 22, 5). Da sie nach (12) von D unabhängig ist, vielmehr

nur von den Verhältnissen $A : B : C$ abhängt, so folgt mit Hinblick auf § 42 (6):

Parallele Ebenen schneiden die unendlich ferne Ebene in derselben Geraden.

7. Schnittpunkt einer Geraden mit der unendlich fernen Ebene. Die Gleichungen einer Geraden, die in der Richtung α, β, γ (Fig. 261) durch den Punkt x_0, y_0, z_0, t_0 geht, werden nach § 43, (3) in homogenen Koordinaten:

(13) $$t_0 x - x_0 t : t_0 y - y_0 t : t_0 z - z_0 t = \alpha : \beta : \gamma.$$

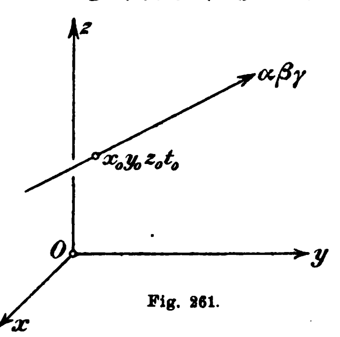


Fig. 261.

Der Schnittpunkt der Geraden mit der unendlich fernen Ebene, der unendlich ferne Punkt der Geraden (vgl. § 3, 4), genügt den Gleichungen (13) und (6), so daß für ihn:

(14) $$x : y : z = \alpha : \beta : \gamma, \quad t = 0.$$

Die drei ersten homogenen Koordinaten des Schnittpunktes einer Geraden mit der unendlich fernen Ebene verhalten sich wie die Richtungskosinus der Geraden (vgl. § 22, **6**).

Parallele Gerade schneiden also die unendlich ferne Ebene in demselben Punkte.

8. Verbindungsebene dreier Punkte und Schnittpunkt dreier Ebenen. Die Sätze § 45, **6** lauten bei Anwendung homogener Koordinaten:

Die Gleichung der Verbindungsebene dreier gegebenen Punkte x_1, y_1, z_1, t_1; x_2, y_2, z_2, t_2; x_3, y_3, z_3, t_3 in laufenden Koordinaten x, y, z, t ist:

(15) $$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \end{vmatrix} = 0,$$

Es ist zugleich die Bedingung dafür, daß vier gegebene Punkte x, y, z, t; x_1, y_1, z_1, t_1; x_2, y_2, z_2, t_2; x_3, y_3, y_3, t_3 in einer Ebene liegen.

Die Gleichung des Schnittpunktes dreier gegebenen Ebenen u_1, v_1, w_1, s_1; u_2, v_2, w_2, s_2; u_3, v_3, w_3, s_3 in laufenden Koordinaten u, v, w, s ist:

(15′) $$\begin{vmatrix} u & v & w & s \\ u_1 & v_1 & w_1 & s_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & s_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & s_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Es ist zugleich die Bedingung dafür, daß vier gegebene Ebenen u, v, w, s; u_1, v_1, w_1, s_1; u_2, v_2, w_2, s_2; u_3, v_3, w_3, s_3 durch einen Punkt gehen.

9. Besondere Fälle der Gleichungen (15). Sind in (15) von den drei gegebenen Punkten der erste endlich, etwa $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $z_1 = z_0$, $t_1 = 1$, die beiden andern aber *unendlich fern* und in der

Richtung a_1, b_1, c_1, bezüglich a_2, b_2, c_2 gelegen, so wird nach (14) aus der Gleichung (15) mit $t = 1$ (Anm. 1, IV, 4; III, (17)):

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

In der Tat ist diese Gleichung in § 40, (20) für die Ebene gefunden worden, die zwei vom Punkte x_0, y_0, z_0 in den Richtungen a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 ausgehende Geraden enthält.[79]

Sind in (15') *zwei von den drei Ebenen parallel*, also etwa $u_2 : v_2 : w_2 = u_3 : v_3 : w_3$, so verschwindet der Koeffizient von s (Anm. 1, III, (17); IV, 3), und die Gleichung erhält die Form (8); der Schnittpunkt liegt unendlich fern.

Die Bedingung, daß die vier Punkte $x_0, y_0, z_0, 1$; $a_1, b_1, c_1, 0$; $a_2, b_2, c_2, 0$; $a_3, b_3, c_3, 0$ in einer Ebene liegen, lautet nach (15):

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder in anderer Ausdrucksweise (vgl. § 37, (9) und § 47, (14)):

Drei von einem Punkte ausgehende Geraden ξ, η, ζ mit den Richtungskosinus a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 liegen in einer Ebene, wenn (Fig. 262):

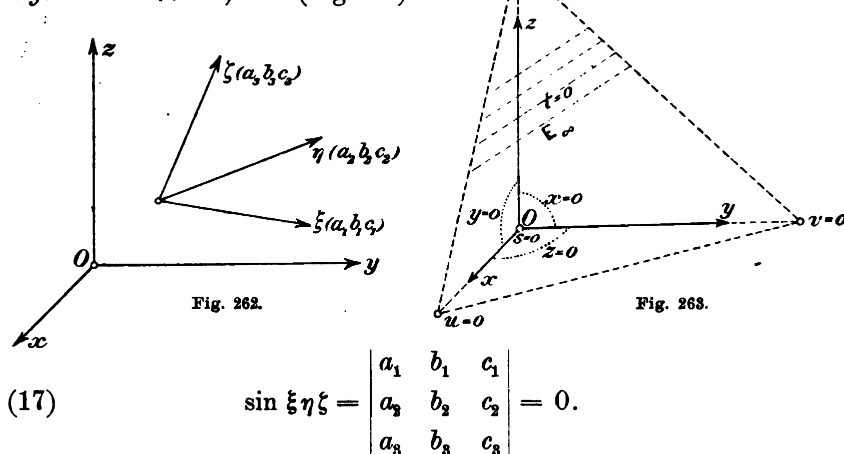


Fig. 262. Fig. 263.

$$(17)\qquad \sin \xi\eta\zeta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

10. Das Koordinatentetraeder der homogenen Koordinaten. Denken wir uns das rechtwinklige Koordinatensystem $Oxyz$ durch

Hinzunahme der unendlich fernen Ebene E_∞ zu einem „*Koordinatentetraeder*“ ergänzt (in Fig. 263 sind die punktierten Teile unendlich fern zu denken), so haben die Seitenebenen des Tetraeders, die yz-, zx-, xy-Ebene und die unendlich ferne Ebene, die Gleichungen:

(18) $$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad t = 0$$

und daher (bis auf einen gemeinsamen Faktor) die Koordinaten:

(19) $$u, v, w, s = 1, 0, 0, 0; \quad 0, 1, 0, 0; \quad 0, 0, 1, 0; \quad 0, 0, 0, 1.$$

Dagegen haben die bezüglich gegenüberliegenden Ecken, die unendlich fernen Punkte der x-, y-, z-Achse und der Anfangspunkt O, die Koordinaten:

(20) $$x, y, z, t = 1, 0, 0, 0; \quad 0, 1, 0, 0; \quad 0, 0, 1, 0; \quad 0, 0, 0, 1$$

und die Gleichungen:

(21) $$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad s = 0.$$

Die homogenen gemeinen Koordinaten lehnen sich also in der Tat an die vier gleichberechtigt erscheinenden Ebenen des Tetraeders an (vgl. § 22, **9**).

11. Gleichungen des Ebenenbüschels und der Punktreihe in homogenen Koordinaten. Wenn man in der Gleichung § 42, (24), die nur von den Verhältnissen $A_1 : B_1 : C_1 : D_1$ und $A_2 : B_2 : C_2 : D_2$ abhängt, die Bezeichnung der letzteren in $u_1 : v_1 : w_1 : s_1$ und $u_2 : v_2 : w_2 : s_2$ abändert und die Gleichung gleichzeitig in x, y, z, t und x_0, y_0, z_0, t_0 homogen schreibt, so nimmt der Satz § 42, **10** und ebenso der duale § 46, **4** die Form an:

Sind:

(22) $$\begin{cases} X_1 = u_1 x + v_1 y + w_1 z + s_1 t = 0, \\ X_2 = u_2 x + v_2 y + w_2 z + s_2 t = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen der beiden Grundebenen Γ_1, Γ_2 eines Ebenenbüschels, so ist die Gleichung der laufenden Ebene Π des Büschels:

(23) $$\frac{X_1}{X_1{}^0} - \mu \frac{X_2}{X_2{}^0} = 0;$$

dabei ist x_0, y_0, z_0, t_0 ein zur Bestimmung der Einheitsebene Γ_0 gegebener Punkt, sind $X_1{}^0, X_2{}^0$ die für ihn gebildeten Ausdrücke X_1, X_2, und bedeutet μ das Doppelverhältnis:

(24) $$\mu = (\Gamma_1 \Gamma_2 \Pi \Gamma_0).$$

Sind:

(22′) $$\begin{cases} U_1 = x_1 u + y_1 v + z_1 w + t_1 s = 0, \\ U_2 = x_2 u + y_2 v + z_2 w + t_2 s = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen der beiden Grundpunkte G_1, G_2 einer Punktreihe, so ist die Gleichung des laufenden Punktes P der Reihe:

(23′) $$\frac{U_1}{U_1{}^0} - \mu \frac{U_2}{U_2{}^0} = 0;$$

dabei ist u_0, v_0, w_0, s_0 eine zur Bestimmung des Einheitspunktes G_0 gegebene Ebene, sind $U_1{}^0, U_2{}^0$ die für sie gebildeten Ausdrücke U_1, U_2, und bedeutet μ das Doppelverhältnis:

(24′) $$\mu = (G_1 G_2 P G_0).$$

Die Gleichung (23) enthält, dem Begriff der homogenen Koordinaten entsprechend, nur *die Verhältnisse* $u_1 : v_1 : w_1 : s_1$, $u_2 : v_2 : w_2 : s_2$, $x_0 : y_0 : z_0 : t_0$ und $x : y : z : t$.

Kommt es nicht auf die genaue Feststellung der Bedeutung von μ an, so kann man die Gleichungen (23) und (23′) auch in der kürzeren Form schreiben:

(25) $X_1 - \mu X_2 = 0,$ (25′) $U_1 - \mu U_2 = 0.$

Hier ist dann μ im allgemeinen nur als das *multiplizierte Teilungsverhältnis*, nach dem Π den Winkel von Γ_1, Γ_2 oder P die Strecke G_1, G_2 teilt, zu erklären; es bleibt aber naturgemäß um einen Faktor unbestimmt, da mit den Grundebenen Γ_1, Γ_2 nur die Verhältnisse $u_1 : v_1 : w_1 : s_1$ und $u_2 : v_2 : w_2 : s_2$ gegeben sind, während in (25) der Faktor μ sich ändert, wenn etwa u_2, v_2, w_2, s_2 mit einem gemeinsamen Faktor multipliziert werden (vgl. § 22, **10**).

12. Parameterdarstellung im Ebenenbüschel und auf der Punktreihe. Im Anschluß an (25) und (25′) kann man die Sätze von § 47, **11** auch aussprechen:[80])

Sind u_1, v_1, w_1, s_1 *und* u_2, v_2, w_2, s_2 *die Koordinaten der beiden Grundebenen eines Ebenenbüschels, so sind die Koordinaten der laufenden Ebene des Büschels mit einem Proportionalitätsfaktor* ϱ *in der Form darstellbar:*

$$(26)\quad \begin{cases} \varrho u = u_1 - \mu u_2, \\ \varrho v = v_1 - \mu v_2, \\ \varrho w = w_1 - \mu w_2, \\ \varrho s = s_1 - \mu s_2. \end{cases}$$

Sind x_1, y_1, z_1, t_1 *und* x_2, y_2, z_2, t_2 *die Koordinaten der beiden Grundpunkte einer Punktreihe, so sind die Koordinaten des laufenden Punktes der Reihe mit einem Proportionalitätsfaktor* ϱ *in der Form darstellbar:*

$$(26')\quad \begin{cases} \varrho x = x_1 - \mu x_2, \\ \varrho y = y_1 - \mu y_2, \\ \varrho z = z_1 - \mu z_2, \\ \varrho t = t_1 - \mu t_2. \end{cases}$$

Es sind die auf homogene Koordinaten bezogenen Parameterdarstellungen des § 46, **6**.

13. Büschel paralleler Ebenen und unendlich ferne Punktreihe. Einen Spezialfall der Gleichung (25) bildet die Gleichung:

$$(27)\qquad (u_1 x + v_1 y + w_1 z + s_1 t) - \mu s_2 t = 0,$$

die einen *Büschel paralleler Ebenen* darstellt (vgl. § 42, (8); § 47, **6**), da die eine Grundebene unendlich fern ist (vgl. § 22, **12**; § 9, **3**).

Einen Spezialfall der Gleichung (25′) bildet die Gleichung

$$(28)\qquad (x_1 u + y_1 v + z_1 w) - \mu(x_2 u + y_2 v + z_2 w) = 0$$

die eine *unendlich ferne Punktreihe* darstellt, da beide Grundpunkte unendlich fern sind (vgl. § 47, (8)).

§ 48. Die homogenen Koordinaten der geraden Linie im Raume.

1. Die vier Hauptgleichungen einer durch zwei Ebenen oder zwei Punkte gegebenen Geraden.

Zwei Ebenen mit den Koordinaten u_1, v_1, w_1, s_1 und u_2, v_2, w_2, s_2 haben die Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} X_1 = u_1 x + v_1 y + w_1 z + s_1 t = 0, \\ X_2 = u_2 x + v_2 y + w_2 z + s_2 t = 0. \end{cases}$$

Diese stellen zugleich *in laufenden Punktkoordinaten die Gerade* dar, die der Durchschnitt der beiden Ebenen ist. Da aber durch die Gerade nicht nur die beiden Ebenen (1), sondern die ∞^1 Ebenen des Büschels (vgl. § 47, (25)):

$$(2)\qquad X_1 - \mu X_2 = 0$$

hindurchgehen, so sind die zur Darstellung gewählten Ebenen (1) für die Gerade nicht charakteristisch; sie könnte ebensogut als Durchschnitt irgend zweier anderer Ebenen des Büschels (2) dargestellt werden. Als ausgezeichnete Ebenen des Büschels bieten sich nun diejenigen dar, welche durch die vier Eckpunkte (vgl. § 47, **10**):

$$x, y, z, t = 1, 0, 0, 0;\ \ 0, 1, 0, 0;\ \ 0, 0, 1, 0;\ \ 0, 0, 0, 1$$

des Koordinatentetraeders gehen und nach § 42, (21) den Werten:

$$\mu = \frac{u_1}{u_2};\ \frac{v_1}{v_2};\ \frac{w_1}{w_2};\ \frac{s_1}{s_2}$$

des Parameters entsprechen. Ihre Gleichungen sind, wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

Zwei Punkte mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1, t_1 und x_2, y_2, z_2, t_2 haben die Gleichungen:

$$(1')\quad \begin{cases} U_1 = x_1 u + y_1 v + z_1 w + t_1 s = 0, \\ U_2 = x_2 u + y_2 v + z_2 w + t_2 s = 0. \end{cases}$$

Diese stellen zugleich *in laufenden Ebenenkoordinaten die Gerade* dar, die die beiden Punkte verbindet. Da aber auf der Geraden nicht nur die beiden Punkte (1′), sondern die ∞^1 Punkte der Punktreihe:

$$(2')\qquad U_1 - \mu U_2 = 0$$

liegen, so sind die zur Darstellung gewählten Punkte (1′) für die Gerade nicht charakteristisch; sie könnte ebensogut als Verbindungslinie irgend zweier anderer Punkte der Punktreihe (2′) dargestellt werden. Als ausgezeichnete Punkte der Reihe bieten sich nun diejenigen dar, welche in den vier Ebenen:

$$u, v, w, s = 1, 0, 0, 0;\ \ 0, 1, 0, 0;\ \ 0, 0, 1, 0;\ \ 0, 0, 0, 1$$

des Koordinatentetraeders liegen und nach § 46, (8) den Werten:

$$\mu = \frac{x_1}{x_2};\ \frac{y_1}{y_2};\ \frac{z_1}{z_2};\ \frac{t_1}{t_2}$$

des Parameters entsprechen. Ihre Gleichungen sind, wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$(3)\begin{cases} q_{23}=\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}, & q_{31}=\begin{vmatrix} w_1 & u_1 \\ w_2 & u_2 \end{vmatrix}, \\ q_{12}=\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}, & q_{14}=\begin{vmatrix} u_1 & s_1 \\ u_2 & s_2 \end{vmatrix}, \\ q_{24}=\begin{vmatrix} v_1 & s_1 \\ v_2 & s_2 \end{vmatrix}, & q_{34}=\begin{vmatrix} w_1 & s_1 \\ w_2 & s_2 \end{vmatrix}, \end{cases}$$

die folgenden:

$$(4)\begin{cases} q_{12}y - q_{31}z + q_{14}t = 0, \\ q_{23}z - q_{12}x + q_{24}t = 0, \\ q_{31}x - q_{23}y + q_{34}t = 0, \\ q_{14}x + q_{24}y + q_{34}z = 0. \end{cases}$$

Die drei ersten Ebenen (4) *sind zugleich diejenigen Ebenen, welche die Gerade orthogonal auf die Koordinatenebenen yz, zx und xy projizieren; die letzte ist die Verbindungsebene der Geraden mit dem Anfangspunkt O.*

$$(3')\begin{cases} p_{23}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, & p_{31}=\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \\ p_{12}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, & p_{14}=\begin{vmatrix} x_1 & t_1 \\ x_2 & t_2 \end{vmatrix}, \\ p_{24}=\begin{vmatrix} y_1 & t_1 \\ y_2 & t_2 \end{vmatrix}, & p_{34}=\begin{vmatrix} z_1 & t_1 \\ z_2 & t_2 \end{vmatrix}, \end{cases}$$

die folgenden:

$$(4')\begin{cases} p_{12}v - p_{31}w + p_{14}s = 0, \\ p_{23}w - p_{12}u + p_{24}s = 0, \\ p_{31}u - p_{23}v + p_{34}s = 0, \\ p_{14}u + p_{24}v + p_{34}w = 0. \end{cases}$$

Die vier Gleichungen (4′) *sind die Gleichungen der Schnittpunkte der Geraden mit den Koordinatenebenen yz, zx und xy, sowie mit der unendlich fernen Ebene* (vgl. § 47, (8)).

Obwohl im allgemeinen nur zwei von den vier Ebenen (4) oder vier Punkten (4′) zur Bestimmung der Geraden (1) oder (1′) erforderlich sind (vgl. § 43, 5), wollen wir sie doch als gleichberechtigt alle beibehalten und sie die *vier Hauptgleichungen der Geraden in laufenden Punkt-, bezüglich Ebenenkoordinaten* nennen.

2. Unabhängigkeit der Koeffizienten der Hauptgleichungen von der Wahl zweier Ebenen des Ebenenbüschels. Die Verhältnisse der sechs Größen (3) sind nun, obwohl sie mit den Koordinaten der beiden Ebenen (1) gebildet sind, nicht diesen eigentümlich, sondern der Geraden, in der diese sich schneiden. Denn bilden wir die entsprechenden Ausdrücke für zwei andere Ebenen des Büschels (2), etwa für:

$$X_1 - \mu_1 X_2 = 0, \quad X_1 - \mu_2 X_2 = 0,$$

so werden sie (Anm. 1, IV, 4; 5):

$$\begin{vmatrix} v_1 - \mu_1 v_2 & w_1 - \mu_1 w_2 \\ v_1 - \mu_2 v_2 & w_1 - \mu_2 w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 - \mu_1 v_2 & w_1 - \mu_1 w_2 \\ (\mu_1 - \mu_2) v_2 & (\mu_1 - \mu_2) w_2 \end{vmatrix}$$

$$= (\mu_1 - \mu_2) \begin{vmatrix} v_1 - \mu_1 v_2 & w_1 - \mu_1 w_2 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = (\mu_1 - \mu_2) \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}, \quad \text{usw.},$$

unterscheiden sich also von den ursprünglichen Ausdrücken (3) nur um einen gemeinsamen Faktor $\mu_1 - \mu_2$.[104])

Die Verhältnisse der sechs Koeffizienten (3) *der vier Hauptgleichungen* (4) *bleiben daher beim Übergang von den Ebenen* (1) *zu zwei anderen Ebenen des Büschels* (2) *ungeändert.*

Irgend zwei durch eine gegebene Gerade gelegte getrennte Ebenen bestimmen eindeutig die Verhältnisse der sechs Koeffizienten der Hauptgleichungen.

Die Verhältnisse der sechs Koeffizienten (3′) *der vier Hauptgleichungen* (4′) *bleiben daher beim Übergang von den Punkten* (1′) *zu zwei anderen Punkten der Reihe* (2′) *ungeändert.*

Irgend zwei auf einer gegebenen Geraden gewählte getrennte Punkte bestimmen eindeutig die Verhältnisse der sechs Koeffizienten der Hauptgleichungen.

3. Abhängigkeit der sechs Koeffizienten der Hauptgleichungen voneinander. Die Entwicklung der identisch verschwindenden Determinante (Anm. 1, IV, 3; 1, III, (19)):

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & s_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & s_2 \\ u_1 & v_1 & w_1 & s_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & s_2 \end{vmatrix} = 0$$

nach den Unterdeterminanten der beiden ersten und beiden letzten Zeilen, gibt mit Rücksicht auf (3):

$$2(q_{23}q_{14} + q_{31}q_{24} + q_{12}q_{34}) = 0.$$

Zwischen den sechs Koeffizienten der vier Hauptgleichungen (4) *einer gegebenen Geraden besteht stets die Beziehung:*

(5) $q_{23}q_{14} + q_{31}q_{24} + q_{12}q_{34} = 0.$

Zwischen den sechs Koeffizienten der vier Hauptgleichungen (4′) *einer gegebenen Geraden besteht stets die Beziehung:*

(5′) $p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} + p_{12}p_{34} = 0.$

4. Bestimmung der Geraden durch die sechs Koeffizienten. Sind umgekehrt sechs Größen $q_{23}, q_{31}, q_{12}, q_{14}, q_{24}, q_{34}$, die der Gleichung (5) entsprechen, ihren Verhältnissen nach beliebig gegeben, so bestehen zwischen den vier Ausdrücken:

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_{12}y - q_{31}z + q_{14}t, \\ Q_2 &= q_{23}z - q_{12}x + q_{24}t, \\ Q_3 &= q_{31}x - q_{23}y + q_{34}t, \\ Q_4 &= -q_{14}x - q_{24}y - q_{34}z \end{aligned}$$

identisch in x, y, z, t die Gleichungen:

$$(6) \quad \begin{cases} q_{34} Q_2 - q_{24} Q_3 + q_{23} Q_4 = 0, \\ q_{14} Q_3 - q_{34} Q_1 + q_{31} Q_4 = 0, \\ q_{24} Q_1 - q_{14} Q_2 + q_{12} Q_4 = 0, \\ q_{23} Q_1 + q_{31} Q_2 + q_{12} Q_3 = 0. \end{cases}$$

Hieraus folgt nach § 51, **3**, daß von den vier Ebenen:

$$(7) \qquad Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad Q_3 = 0. \quad Q_4 = 0$$

irgend zwei durch die Schnittlinie der zwei übrigen gehen (ohne daß die vier Ebenen alle in eine zusammenfallen). Die vier Gleichungen (7) stellen daher stets eine bestimmte gerade Linie dar und sind, wie ihre Form zeigt, deren Hauptgleichungen (4).

Irgend sechs ihren Verhältnissen nach gegebene und die Bedingung (5) *erfüllende Koeffizienten* q_{kl} *bestimmen eine Gerade, deren vier Hauptgleichungen die Gleichungen* (4) *sind.*

Irgend sechs ihren Verhältnissen nach gegebene und die Bedingung (5') *erfüllende Koeffizienten* p_{kl} *bestimmen eine Gerade, deren vier Hauptgleichungen die Gleichungen* (4') *sind.*

5. Die homogenen Koordinaten der geraden Linie. Da eine gegebene Gerade nach § 48, **2** die Verhältnisse der sechs Koeffizienten ihrer Hauptgleichungen eindeutig bestimmt, und umgekehrt die mit Rücksicht auf (5) gegebenen Verhältnisse dieser Koeffizienten nach § 48, **4** die Gerade eindeutig bestimmen, so betrachten wir diese Koeffizienten als homogene (Achsen- oder Strahlen-) Koordinaten der Geraden (vgl. § 47, **1**). Wir sagen also (vgl. § 47, **3**) mit $kl = 23$, 31, 12, 14, 24, 34:[103])

Die sechs homogenen Achsenkoordinaten q_{kl} *einer Geraden sind die Koeffizienten ihrer Hauptgleichungen* (4) *in Punktkoordinaten.*

Sie drücken sich durch die Koordinaten u_1, v_1, w_1, s_1 *und* u_2, v_2, w_2, s_2 *zweier durch die Gerade gehenden Ebenen in der Weise* (3) *aus.*

Sie erfüllen stets die Bedingung (5).

Die sechs homogenen Strahlenkoordinaten p_{kl} *einer Geraden sind die Koeffizienten ihrer Hauptgleichungen* (4') *in Ebenenkoordinaten.*

Sie drücken sich durch die Koordinaten x_1, y_1, z_1, t_1 *und* x_2, y_2, z_2, t_2 *zweier auf der Geraden liegenden Punkte in der Weise* (3') *aus* (vgl. § 22, (15)).

Sie erfüllen stets die Bedingung (5').

Die Indizes *kl* geben die Kolonnennummern in der Matrix:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & s_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & s_2 \end{vmatrix}$$

an, deren Unterdeterminanten die q_{kl} in (3) sind. Daher ist (Anm. 1, IV, 2) allgemein:

$$q_{ik} = - q_{ki}, \quad p_{ik} = - p_{ki}. \tag{8}$$

6. Die Schnittpunkte der Geraden mit den Koordinatenebenen. Die Koeffizienten der Gleichungen (4′) der Schnittpunkte der Geraden p_{kl} mit den Koordinatenebenen geben nach § 47, (3′) zugleich die Koordinaten dieser Punkte, also:

Die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden (1′) *mit den Ebenen des Koordinatentetraeders sind:*

$$(9') \quad \begin{cases} x_1 : y_1 : z_1 : t_1 = 0 : p_{12} : -p_{31} : p_{14}, \\ x_2 : y_2 : z_2 : t_2 = -p_{12} : 0 : p_{23} : p_{24}, \\ x_3 : y_3 : z_3 : t_3 = p_{31} : -p_{23} : 0 : p_{34}, \\ x_4 : y_4 : z_4 : t_4 = p_{14} : p_{24} : p_{34} : 0. \end{cases}$$

Aber auch aus den Gleichungen (4) kann man für die Gerade (1) die Schnittpunkte mit den Ebenen des Koordinatentetraeders erhalten. Indem man nämlich in der zweiten und dritten Gleichung (4) $x = 0$ setzt und nach $z : t$ und $y : t$ auflöst, indem man alsdann analog mit der dritten und ersten, sowie mit der ersten und zweiten Gleichung (4) verfährt, indem man endlich in den drei ersten Gleichungen (4) $t = 0$ setzt und nach $x : y : z$ auflöst, ergibt sich:

Die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden (1) *mit den Ebenen des Koordinatentetraeders sind:*

$$(9) \quad \begin{cases} x_1 : y_1 : z_1 : t_1 = 0 : q_{34} : -q_{24} : q_{23}, \\ x_2 : y_2 : z_2 : t_2 = -q_{34} : 0 : q_{14} : q_{31}, \\ x_3 : y_3 : z_3 : t_3 = q_{24} : -q_{14} : 0 : q_{12}, \\ x_4 : y_4 : z_4 : t_4 = q_{23} : q_{31} : q_{12} : 0. \end{cases}$$

Infolge von (5) genügt jeder dieser Punkte allen vier Gleichungen (4).

7. Abhängigkeit der Achsen- und Strahlenkoordinaten derselben Geraden. Die Geraden (1) und (1′) fallen zusammen, wenn zwei Punkte der einen mit zwei Punkten der andern zusammenfallen.

Die beiden ersten Punkte (9) fallen aber mit den beiden ersten (9′) zusammen, wenn mit zwei Faktoren ϱ und σ:

$$\varrho p_{12} = q_{34}, \quad \varrho p_{31} = q_{24}, \quad \varrho p_{14} = q_{23},$$
$$\sigma p_{12} = q_{34}, \quad \sigma p_{23} = q_{14}, \quad \sigma p_{24} = q_{31}.$$

Hier muß aber wegen der beiden Gleichungen zwischen p_{12} und q_{34}

notwendig $\varrho = \sigma$ sein. Dann aber folgt nach (5) und (5') auch:

$$q_{12} = -\frac{q_{23}q_{14}+q_{31}q_{24}}{q_{34}} = -\varrho\,\frac{p_{14}p_{23}+p_{24}p_{31}}{p_{12}} = \varrho\,p_{34}$$

und somit:[104])

Zwischen Strahlen- und Achsenkoordinaten derselben Geraden besteht die Beziehung:

$$(10)\qquad p_{23}:p_{31}:p_{12}:p_{14}:p_{24}:p_{34} = q_{14}:q_{24}:q_{34}:q_{23}:q_{31}:q_{12}.$$

8. Doppelte Form der vier Hauptgleichungen einer Geraden. Mit Rücksicht auf (4), (4'), (10) folgt:

Hat eine Gerade die Strahlenkoordinaten p_{kl} und die Achsenkoordinaten q_{kl}, so sind ihre Gleichungen in laufenden Punktkoordinaten:

$$(11)\ \begin{cases} q_{12}y - q_{31}z + q_{14}t = 0,\\ q_{23}z - q_{12}x + q_{24}t = 0,\\ q_{31}x - q_{23}y + q_{34}t = 0,\\ q_{14}x + q_{24}y + q_{34}z = 0, \end{cases} \quad \textit{oder} \quad (12)\ \begin{cases} p_{34}y - p_{24}z + p_{23}t = 0,\\ p_{14}z - p_{34}x + p_{31}t = 0,\\ p_{24}x - p_{14}y + p_{12}t = 0,\\ p_{23}x + p_{31}y + p_{12}z = 0, \end{cases}$$

und ihre Gleichungen in laufenden Ebenenkoordinaten:

$$(11')\ \begin{cases} p_{12}v - p_{31}w + p_{14}s = 0,\\ p_{23}w - p_{12}u + p_{24}s = 0,\\ p_{31}u - p_{23}v + p_{34}s = 0,\\ p_{14}u + p_{24}v + p_{34}w = 0. \end{cases} \quad \textit{oder} \quad (12')\ \begin{cases} q_{34}v - q_{24}w + q_{23}s = 0,\\ q_{14}w - q_{34}u + q_{31}s = 0,\\ q_{24}u - q_{14}v + q_{12}s = 0,\\ q_{23}u + q_{31}v + q_{12}w = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (11) und (12) sind zugleich die *Bedingungen der vereinigten Lage von Punkt und Gerader,* die Gleichungen (11') und (12') die *Bedingungen der vereinigten Lage von Ebene und Gerader* (vgl. § 47, (5)).

Die Gleichungen (12) und (12') sind mit Rücksicht auf (3) und (3') beziehungsweise die Entwicklungen (Anm. 1, III, (25); II, (6)) der Gleichungen (vgl. § 43, (9)):

$$(13)\ \begin{vmatrix} x & y & z & t\\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1\\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (13')\ \begin{vmatrix} u & v & w & s\\ u_1 & v_1 & w_1 & s_1\\ u_2 & v_2 & w_2 & s_2 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Beziehung zu den übrigen Darstellungen in § 43. Die zweite und dritte Gleichung (12) geben nach y und z aufgelöst (und mit $t = 1$) die Gleichungen der Geraden in der Form § 43, (13).

Um daher eine durch ihre Koordinaten p_{kl} gegebene Gerade in der Form:

$$(14)\qquad y = b_0 + bx, \qquad z = c_0 + cx$$

darzustellen, hat man für die Koeffizienten in (14) zu setzen:

$$(15) \qquad b_0 = \frac{p_{12}}{p_{14}}, \quad b = \frac{p_{24}}{p_{14}}, \quad c_0 = -\frac{p_{31}}{p_{14}}, \quad c = \frac{p_{34}}{p_{14}}.$$

Ist umgekehrt die Gerade durch die Gleichungen (14) gegeben, so hat man mit Rücksicht auf (15) und (5′):

$$(16) \qquad p_{23} : p_{31} : p_{12} : p_{14} : p_{24} : p_{34} = bc_0 - cb_0 : -c_0 : b_0 : 1 : b : c.$$

Verbindet man diese Proportion mit § 43, (16), so ergibt sich weiter:

Ist eine Gerade durch ihre Gleichungen von der Form:

$$(17) \qquad x - x_0 : y - y_0 : z - z_0 = \alpha : \beta : \gamma$$

(vgl. § 43, (3)) gegeben, so ist für ihre Koordinaten:

$$(18) \qquad p_{23} : p_{31} : p_{12} : p_{14} : p_{24} : p_{34} = \beta z_0 - \gamma y_0 : \gamma x_0 - \alpha z_0 : \alpha y_0 - \beta x_0 : \alpha : \beta : \gamma.$$

Dies folgt aber auch direkt aus (3′), indem man die Gerade als Verbindungslinie der Punkte α, β, γ, 0 (vgl. § 47, (14)) und x_0, y_0, z_0, 1 ansieht.

10. Die Richtungskosinus einer durch ihre Koordinaten gegebenen Geraden. Insbesondere geht hieraus umgekehrt hervor:

Für die Richtungskosinus α, β, γ einer durch ihre Koordinaten p_{kl} oder q_{kl} gegebenen Geraden ist:

$$(19) \qquad \alpha : \beta : \gamma = p_{14} : p_{24} : p_{34} = q_{23} : q_{31} : q_{12}.$$

11. Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene, Verbindungsebene mit einem Punkte.

Soll ein Punkt x, y, z, t auf der Ebene u, v, w, s und der Geraden (1) liegen, so muß er die drei Gleichungen erfüllen:

$$ux + vy + wz + st = 0,$$
$$u_1x + v_1y + w_1z + s_1t = 0,$$
$$u_2x + v_2y + w_2z + s_2t = 0.$$

Durch Auflösen dieser Gleichungen nach x, y, z, t folgt aber mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ (Anm. 2, III, (14)):

Der Schnittpunkt der Ebene u, v, w, s und der Geraden q_{kl} hat die Koordinaten:

Soll eine Ebene u, v, w, s durch den Punkt x, y, z, t und die Gerade (1′) gehen, so muß sie die drei Gleichungen erfüllen:

$$xu + yv + zw + ts = 0,$$
$$x_1u + y_1v + z_1w + t_1s = 0,$$
$$x_2u + y_2v + z_2w + t_2s = 0.$$

Durch Auflösen dieser Gleichungen nach u, v, w, s folgt aber mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ:

Die Verbindungsebene des Punktes x, y, z, t und der Geraden p_{kl} hat die Koordinaten:

$$(20)\begin{cases}\varrho x = q_{34}v - q_{24}w + q_{23}s,\\ \varrho y = q_{14}w - q_{34}u + q_{31}s,\\ \varrho z = q_{24}u - q_{14}v + q_{12}s,\\ \varrho t = -q_{23}u - q_{31}v - q_{12}w.\end{cases}$$

Die Lösung der Aufgabe wird unbestimmt, wenn mit (12') Ebene und Gerade vereinigt liegen.

$$(20')\begin{cases}\varrho u = p_{34}y - p_{24}z + p_{23}t,\\ \varrho v = p_{14}z - p_{34}x + p_{31}t,\\ \varrho w = p_{24}x - p_{14}y + p_{12}t,\\ \varrho s = -p_{23}x - p_{31}y - p_{12}z.\end{cases}$$

Die Lösung der Aufgabe wird unbestimmt, wenn mit (12) Punkt und Gerade vereinigt liegen.

12. Bedingung der vereinigten Lage zweier Geraden. Eine Gerade sei durch zwei Punkte $P_1 = x_1, y_1, z_1, t_1$ und $P_2 = x_2, y_2, z_2, t_2$ gegeben, so daß ihre Koordinaten p_{kl} die Werte (3') haben; eine zweite Gerade sei durch zwei Punkte $P_1' = x_1', y_1', z_1', t_1'$ und $P_2' = x_2', y_2', z_2', t_2'$ gegeben; ihre Koordinaten p_{kl}' haben die mit den akzentuierten Punktkoordinaten gebildeten Werte (3'). Beide Geraden liegen vereinigt, d. h. sie schneiden sich, immer dann und nur dann, wenn die vier Punkte P_1, P_2, P_1', P_2' in einer Ebene liegen, also nach § 47, (15):

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1\\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2\\ x_1' & y_1' & z_1' & t_1'\\ x_2' & y_2' & z_2' & t_2'\end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man die Determinante nach den Unterdeterminanten der beiden ersten und beiden letzten Zeilen (Anm. 1, III, (19)), so ergibt sich mit Rücksicht auf (3'):

Die Bedingung der vereinigten Lage zweier Geraden mit den Strahlenkoordinaten p_{kl} und p_{kl}' lautet:

$$(21)\qquad p_{23}p_{14}' + p_{31}p_{24}' + p_{12}p_{34}' + p_{14}p_{23}' + p_{24}p_{31}' + p_{34}p_{12}' = 0.$$

In den Achsenkoordinaten der beiden Geraden würde die Bedingung lauten:

$$(21')\qquad q_{23}q_{14}' + q_{31}q_{24}' + q_{12}q_{34}' + q_{14}q_{23}' + q_{24}q_{31}' + q_{34}q_{12}' = 0.$$

13. Das Moment zweier durch ihre Strahlenkoordinaten gegebenen Geraden. Geht man mit $t_1 = 1$, $t_2 = 1$ zu nicht homogenen Punktkoordinaten über, so werden die Koordinaten der Verbindungslinie der Punkte $P_1 = x_1, y_1, z_1$ und $P_2 = x_2, y_2, z_2$ nach (3'):

$$(22)\quad\begin{cases}p_{23} = y_1z_2 - z_1y_2, & p_{31} = z_1x_2 - x_1z_2, & p_{12} = x_1y_2 - y_1x_2,\\ p_{14} = x_1 - x_2, & p_{24} = y_1 - y_2, & p_{34} = z_1 - z_2.\end{cases}$$

Nimmt man dann diese p_{kl} nicht bloß ihren Verhältnissen nach, sondern nach ihren Werten (22), so sind nach (19):

$$(23)\ \alpha = \frac{-p_{14}}{\sqrt{p_{14}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2}},\quad \beta = \frac{-p_{24}}{\sqrt{p_{14}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2}},\quad \gamma = \frac{-p_{34}}{\sqrt{p_{14}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2}},$$

die Richtungskosinus der von P_1 nach P_2 gerichteten Geraden (vgl. § 34, (7)). Zugleich ist:

$$(24)\qquad r_{12} = \overline{P_1 P_2} = \sqrt{p_{14}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2}$$

die absolute Entfernung der Punkte P_1 und P_2.

Das Moment zweier gerichteten Geraden $P_1 P_2$ und $P_1' P_2'$ mit den Koordinaten p_{kl} und p_{kl}' wird in dieser Auffassung nach § 44, (26) mit Entwicklung der Determinante wie § 48, **12**:

$$(25)\qquad M = \frac{p_{23}p_{14}' + p_{31}p_{24}' + p_{12}p_{34}' + p_{14}p_{23}' + p_{24}p_{31}' + p_{34}p_{12}'}{\sqrt{p_{14}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2}\ \sqrt{p_{14}'^2 + p_{24}'^2 + p_{34}'^2}}.$$

Es hängt seinem absoluten Werte nach nur von den Verhältnissen der sechs Linienkoordinaten jeder der beiden Geraden ab.

14. Strahlenkoordinaten der Kanten des Koordinatentetraeders. Im Anschluß an § 47, **10** kann man nach (3′) die Strahlenkoordinaten der Verbindungslinie je zweier der Punkte § 47, (20) bilden. Man erhält damit als Strahlenkoordinaten der x-, y- und z-Achse bezüglich:

$$p_{23},\ p_{31},\ p_{12},\ p_{14},\ p_{24},\ p_{34} = 0, 0, 0, 1, 0, 0;\ \ 0, 0, 0, 0, 1, 0;\ \ 0, 0, 0, 0, 0, 1$$

und für die Strahlenkoordinaten der unendlich fernen Geraden der yz-, zx- und xy-Ebene ebenso:

$$p_{23},\ p_{31},\ p_{12},\ p_{14},\ p_{24},\ p_{34} = 1, 0, 0, 0, 0, 0;\ \ 0, 1, 0, 0, 0, 0;\ \ 0, 0, 1, 0, 0, 0.$$

§ 49. Homogene Koordinaten in Gebilden zweiter und erster Stufe.

1. Übergang vom Raume auf Gebilde niederer Stufe. Indem wir den Punkten, Strahlen und Ebenen des Raumes besondere Lagen gegen das Koordinatensystem (vgl. § 47, Fig. 263) geben, erhalten wir teils früher eingeführte Koordinaten in Gebilden niederer Stufe als Sonderfälle der homogenen Raumkoordinaten wieder, teils aber auch neue homogene Koordinaten, die wir im folgenden zusammenstellen.

2. Punktkoordinaten im endlichen oder unendlich fernen Punktfeld. Wie in § 31, **4** ergibt sich auch für homogene Koordinaten nach § 47, **1**, daß für einen in der xy-Ebene liegenden Punkt x, y, z, t, für den $z = 0$ ist, x, y, t homogene Punktkoordinaten in bezug auf das *ebene* System Oxy sind (vgl. § 22, **1**).

Für einen unendlich fernen Punkt x, y, z, t, für den $t = 0$ ist, verhalten sich nach § 47, 7 x, y, z wie die Richtungskosinus der durch den Punkt gehenden Geraden. Sie sind nur von der Richtung der Achsen des Systems $Oxyz$ (vgl. § 32, **1**), nicht von der Lage von O abhängig. Danach sprechen wir die Definition aus (vgl. § 23, **1**):

Unter homogenen gemeinen Koordinaten x, y, z eines Punktes der unendlich fernen Ebene in bezug auf ein „Koordinatendreieck", dessen Ecken von einem rechtwinkligen Achsensystem $Oxyz$ ausgeschnitten werden, verstehen wir drei Zahlen, die sich verhalten wie die Richtungskosinus der durch den Punkt gehenden Geraden in bezug auf dasselbe System $Oxyz$.

3. Linienkoordinaten im endlichen Linienfeld. Soll eine Gerade p_{kl} mit der xy-Ebene $u, v, w, s = 0, 0, 1, 0$ vereinigt liegen, so muß nach § 48, (11'):

$$p_{31} = 0, \quad p_{23} = 0, \quad p_{34} = 0 \tag{1}$$

sein, worauf nach § 48, (12); (8) die Gleichungen der Geraden werden:

$$z = 0, \quad p_{24}x + p_{41}y + p_{12}t = 0. \tag{2}$$

Hieraus folgt nach § 22, **3**:

Für eine in der xy-Ebene liegende Gerade verschwinden die Strahlenkoordinaten p_{23}, p_{31}, p_{34}, während p_{24}, p_{41}, p_{12} die homogenen Linienkoordinaten u, v, s in bezug auf das ebene System Oxy werden: $p_{24} : p_{41} : p_{12} = u : v : s$.

Die Bedingung § 48, (5') kommt mit (1) in Wegfall.

4. Linienkoordinaten in der unendlich fernen Ebene. Soll die Gerade p_{kl} mit der Ebene $u, v, w, s = 0, 0, 0, 1$ vereinigt liegen, muß nach § 48, (11'):

$$p_{14} = 0, \quad p_{24} = 0, \quad p_{34} = 0 \tag{3}$$

sein, worauf nach § 48, (12) die Gleichungen der Geraden werden:

$$t = 0, \quad p_{23}x + p_{31}y + p_{12}z = 0. \tag{4}$$

Für eine unendlich ferne Gerade verschwinden die Strahlenkoordinaten p_{14}, p_{24}, p_{34}, während p_{23}, p_{31}, p_{12} die Stellungskosinus (vgl. § 42, **3**) der durch die Gerade gehenden Ebenen werden. Wir definieren daher wie in § 49, **2**:

Unter homogenen gemeinen Koordinaten u, v, w einer Geraden der unendlich fernen Ebene in bezug auf ein „Koordinatendreieck", dessen Ecken von einem rechtwinkligen Achsensystem $Oxyz$ ausgeschnitten werden, verstehen wir drei Zahlen, die sich verhalten wie die Stellungs-

kosinus der durch die Gerade gehenden Ebenen in bezug auf dasselbe System $Oxyz$.

Es wird dann $p_{23} : p_{31} : p_{12} = u : v : w$.

5. Ebenenkoordinaten im Ebenenbündel. Für eine durch den Punkt O gehende Ebene:

$$ux + vy + wz = 0, \tag{5}$$

für die $s = 0$ ist (vgl. § 47, **3**), verhalten sich nach § 41, (5) u, v, w wie die Stellungskosinus a, b, c der Ebene, die Richtungskosinus ihres Perpendikels (Fig. 264).

Alle durch einen Punkt gehenden Ebenen bilden ein Ebenenbündel.

Da nun O ein beliebiger Punkt des Raumes ist, soll überhaupt die Definition gelten:

Unter homogenen gemeinen Koordinaten u, v, w einer Ebene im Bündel in bezug auf ein von drei rechtwinkligen Ebenen des Bündels

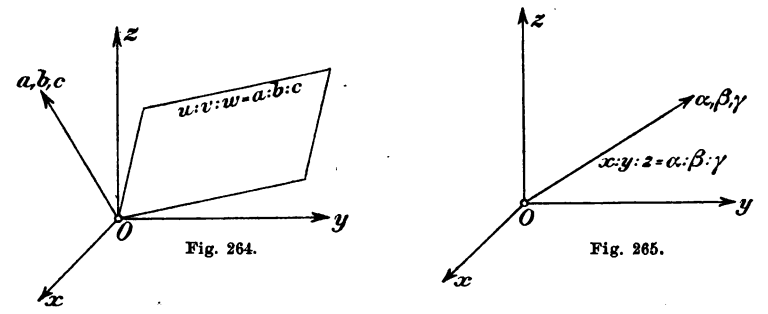


Fig. 264. Fig. 265.

gebildetes „Koordinatendreiflach" $Oxyz$ verstehen wir drei Zahlen, die sich verhalten wie die Stellungskosinus a, b, c der Ebene in bezug auf das Achsensystem $Oxyz$.

6. Strahlenkoordinaten im Strahlbündel. Soll die Gerade p_{kl} mit dem Punkte $x, y, z, t = 0, 0, 0, 1$ vereinigt liegen, so muß nach § 48, (12):

$$p_{23} = 0, \quad p_{31} = 0, \quad p_{12} = 0 \tag{6}$$

sein, während nach § 48, **10** p_{14}, p_{24}, p_{34} sich (Fig. 265) wie die Richtungskosinus der Geraden verhalten.

Alle durch einen Punkt gehenden Geraden bilden ein Strahlbündel.

Wie in § 49, **5**, soll daher überhaupt die Definition gelten:

Unter homogenen gemeinen Koordinaten x, y, z eines Strahles im Bündel in bezug auf ein von drei rechtwinkligen Strahlen des Bündels gebildetes „Koordinatendreikant" $Oxyz$ verstehen wir drei Zahlen, die sich verhalten wie die Richtungskosinus α, β, γ des Strahles im Achsensystem $Oxyz$.

Es wird dann $p_{14}:p_{24}:p_{34} = x:y:z$.

Sie verhalten sich nach § 33, (14) auch wie die gemeinen Koordinaten eines jeden *Punktes* des Strahles im System $Oxyz$ und sind deshalb mit x, y, z bezeichnet.

7. Dualität und Bedingung der vereinigten Lage im Bündel. Jeder Punkt im Raume ist der *Mittelpunkt* (das Zentrum, der Träger) sowohl eines *Ebenenbündels* als eines *Strahlbündels*, die man beide zusammen schlechthin als *Bündel* bezeichnet.[105])

Das Bündel bildet alsdann *im Raume* das duale Seitenstück zur Ebene, welche als Trägerin von ∞^2 Punkten und ∞^2 Geraden gleichzeitig als *Punktfeld* und als *Strahlfeld* betrachtet werden kann.

Der Dualität zwischen Punkt und Strahl *in der Ebene* entspricht hier wiederum die *Dualität zwischen Ebene und Strahl im Bündel.*

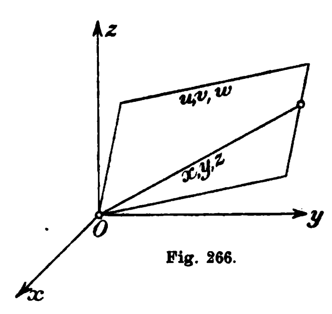


Fig. 266.

Aus den Definitionen von § 49, 5 und 6 folgt mit Rücksicht auf § 35, (4) sofort:

Bezieht man die Koordinaten u, v, w der Ebene und die Koordinaten x, y, z des Strahles im Bündel auf dasselbe Achsensystem $Oxyz$, so ist die Bedingung der vereinigten Lage beider (Fig. 266):

$$(7) \qquad ux + vy + wz = 0.$$

8. Gleichungen der Ebene und des Strahles im Bündel. Die Gleichung (7) ist daher bei festem u, v, w *die Gleichung der Ebene u, v, w in laufenden Strahlenkoordinaten x, y, z* und bei festem x, y, z *die Gleichung des Strahles in laufenden Ebenenkoordinaten u, v, w.*

Insbesondere:

geht die Ebene:	liegt der Strahl:
$Ax + By = 0$	$Au + Bv = 0$
durch die z-Achse.	in der xy-Ebene.

Es ergibt sich ferner ebenso wie in § 22, 7:

Die Gleichung der Verbindungsebene zweier Strahlen x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 ist in laufenden Koordinaten x, y, z:

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung des Schnittstrahles zweier Ebenen u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 ist in laufenden Koordinaten u, v, w:

$$(8') \qquad \begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Normalform der Gleichung der Ebene und des Strahles im

Bündel. Fassen wir u, v, w und x, y, z nicht bloß ihren Verhältnissen nach auf, wie in § 49, **5**; **6**, sondern direkt als Richtungskosinus, so bestimmen u, v, w die *gerichtete* Ebene, diejenige, deren positive Normale (vgl. § 32, **4**) die Richtungskosinus u, v, w hat, und x, y, z den *gerichteten* Strahl (vgl. § 33, **2**). Wir nennen in diesem Falle:

$$(9) \quad \begin{cases} ux + vy + wz = 0 \\ (u^2 + v^2 + w^2 = 1) \end{cases} \qquad (9') \quad \begin{cases} xu + yv + zw = 0 \\ (x^2 + y^2 + z^2 = 1) \end{cases}$$

die *Normalform der Gleichung der Ebene und des Strahles* im Bündel (vgl. § 41, **6**).

Beschreibt man um O eine Kugel vom Radius 1, so werden u, v, w *die Koordinaten eines gerichteten größten Kreises* und x, y, z *die Koordinaten eines Punktes auf der Kugel.*

Zwei Punkte x, y, z und $-x, -y, -z$ liegen diametral, zwei größte Kreise u, v, w und $-u, -v, -w$ fallen zusammen und sind nur dem Drehungssinne nach verschieden (Fig. 267).

Ist $u = x$, $v = y$, $w = z$, so ist x, y, z der auf der positiven Seite des als Äquator gedachten Kreises u, v, w liegende Pol der Kugel (Fig. 267).

10. Koordinaten im Ebenenbündel mit unendlich fernem Mittelpunkt. Für eine der z-Achse parallele Ebene (vgl. § 40, (15)) ist

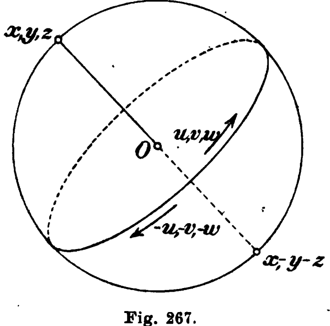


Fig. 267.

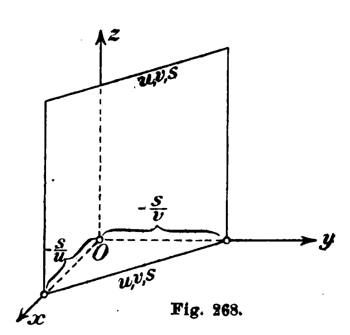


Fig. 268.

$w = 0$ und sind u, v, s zugleich die Linienkoordinaten der Spurlinie der Ebene in der xy-Ebene in bezug auf das ebene System Oxy (vgl. § 22, **1**; Fig. 268). Auf eine Parallelverschiebung der xy-Ebene kommt es dabei nicht an.

Wir verstehen daher unter den homogenen gemeinen Koordinaten u, v, s (nicht homogen: u, v) im Ebenenbündel mit unendlich fernem Zentrum in bezug auf ein rechtwinkliges Achsensystem $Oxyz$, dessen

yz- und zx-Ebene dem Bündel angehören, die Linienkoordinaten u, v, s der Schnittlinie mit der xy-Ebene in bezug auf das ebene System Oxy.

11. Koordinaten im Parallelstrahlenbündel. Soll die Gerade p mit dem unendlich fernen Punkte der z-Achse $x, y, z, t = 0, 0, 1, 0$ (§ 47, **10**) vereinigt liegen, muß nach § 48, (12):

$$(10) \qquad p_{24} = 0, \quad p_{14} = 0, \quad p_{12} = 0$$

sein, worauf nach § 48, (11′) die Gleichungen der Geraden werden (vgl. § 48, (8); (10)):

$$(11) \quad w = 0, \quad p_{31}u - p_{23}v + p_{34}s = 0 \quad \text{oder} \quad q_{24}u + q_{41}v + q_{12}s = 0.$$

Für eine der z-Achse parallele Gerade verschwinden die Achsenkoordinaten q_{23}, q_{31}, q_{34}, während q_{24}, q_{41}, q_{12} die Koordinaten ihres Spurpunktes in der xy-Ebene werden: $q_{24} : q_{41} : q_{12} = x : y : t$ (§ 22, (3′)).

Wir verstehen daher unter homogenen Koordinaten x, y, t (nicht homogen: x, y) im Parallelstrahlenbündel in bezug auf ein rechtwinkliges

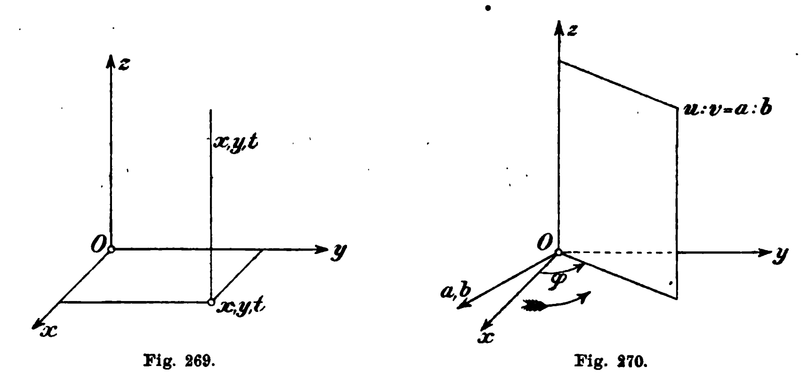


Fig. 269. Fig. 270.

Achsensystem $Oxyz$, dessen z-Achse dem Bündel angehört, die Koordinaten des Schnittpunktes mit der xy-Ebene in bezug auf das ebene System Oxy (Fig. 269).

12. Koordinaten auf der Punktreihe. Für einen Punkt der x-Achse werden $y = 0$, $z = 0$ und x, t homogene Koordinaten der Punktreihe (vgl. § 7, **1**).

Für einen Punkt auf der unendlich fernen Geraden der xy-Ebene werden $z = 0$, $t = 0$ und x, y homogene gemeine Koordinaten in bezug auf das vom Achsensystem Oxy bestimmte Zweieck (vgl. § 23, **1**).

13. Koordinaten im Ebenenbüschel. Für eine Ebene durch die z-Achse wird $w = 0$, $s = 0$ und verhalten sich, wie in § 49, **5**, u, v wie die Richtungskosinus a, b des Perpendikels der Ebene in bezug

auf das ebene System Oxy. Auf eine Parallelverschiebung in der Richtung der z-Achse kommt es dabei nicht an (Fig. 270):

Wir verstehen daher unter homogenen Koordinaten u, v der Ebene im Ebenenbüschel in bezug auf ein rechtwinkliges Achsensystem $Oxyz$, dessen yz- und zx-Ebene dem Büschel angehört, zwei Zahlen, die sich verhalten wie die Richtungskosinus a, b des Perpendikels der Ebene im ebenen System Oxy (vgl. § 23, 2).

Bei Angabe eines Drehungssinnes in der xy-Ebene (Fig. 270) ist:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{u}{v} \tag{12}$$

die *gemeine Koordinate der Ebene im Büschel*[13]), wie in § 2, **11** und § 7, (3).

Bei einer der yz-Ebene parallelen Ebene $u, 0, 0, s$ betrachten wir die Koordinaten x, $t = -s:u$ ihres Schnittpunktes mit der x-Achse (vgl. § 49, **12**) zugleich als ihre Koordinaten (vgl. § 23, **2**).

14. Koordinaten im Strahlbüschel. Soll die Gerade p_{kl} sowohl in der xy-Ebene liegen, als durch den Punkt O gehen, muß sie nach (1) und (6) den Bedingungen:

$$p_{23} = 0, \quad p_{31} = 0, \quad p_{12} = 0, \quad p_{34} = 0 \tag{13}$$

genügen. Zugleich folgt, je nachdem man p_{14}, p_{24} in der Bedeutung § 49, **6** oder § 49, **3** nimmt, also:

$$p_{14} : p_{24} = x : y \quad \text{oder} \quad p_{24} : -p_{14} = u : v: \tag{14}$$

Für eine in der xy-Ebene liegende und durch O gehende Gerade verschwinden die Koordinaten p_{23}, p_{31}, p_{12}, p_{34}, während p_{14}, p_{24} in die erste und p_{24}, $-p_{14}$ in die zweite Art Strahlenkoordinaten § 7, **2** *übergehen.*

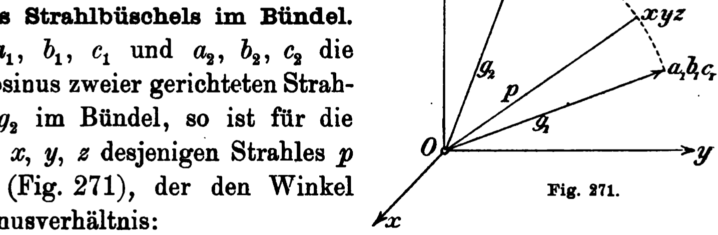


Fig. 271.

15. Gleichung und Parameterdarstellung des Strahlbüschels im Bündel. Sind nun a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 die Richtungskosinus zweier gerichteten Strahlen g_1 und g_2 im Bündel, so ist für die Koordinaten x, y, z desjenigen Strahles p im Bündel (Fig. 271), der den Winkel jener im Sinusverhältnis:

$$\frac{\sin g_1 p}{\sin g_2 p} = \lambda \tag{15}$$

teilt, nach § 35, (8):

$$x : y : z = a_1 - \lambda a_2 : b_1 - \lambda b_2 : c_1 - \lambda c_2$$

und daher nach (7) die Gleichung des Strahles p:

$$(a_1 - \lambda a_2)u + (b_1 - \lambda b_2)v + (c_1 - \lambda c_2)w = 0.$$

Sind also:

$$(16) \quad N_1 = a_1 u + b_1 v + c_1 w = 0, \quad N_2 = a_2 u + b_2 v + c_2 w = 0$$

die Gleichungen der beiden (gerichteten) Grundstrahlen g_1, g_2 eines Strahlbüschels im Bündel in der Normalform (vgl. § 49, **9**), *so ist die Gleichung desjenigen Strahles p, der den Winkel der beiden Strahlen im Sinusverhältnis λ teilt:*

$$(17) \qquad N_1 - \lambda N_2 = 0.$$

Sind nur die homogenen Koordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 der ungerichteten Strahlen g_1 und g_2 gegeben, so sind die Richtungskosinus mit unbestimmten Vorzeichen ε_1 und ε_2 nach § 33, **8** bestimmt. Es folgt daher:

Sind die Grundstrahlen in der allgemeineren Form:

$$(18) \qquad \begin{cases} U_1 = x_1 u + y_1 v + z_1 w = 0 \\ U_2 = x_2 u + y_2 v + z_2 w = 0 \end{cases}$$

gegeben, so ist die Gleichung desjenigen Strahles p, der den Winkel beider Strahlen im Sinusverhältnis λ teilt:

$$(19) \qquad U_1 - \mu U_2 = 0,$$

wo:

$$(20) \qquad \mu = \frac{\varepsilon_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}{\varepsilon_2 \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \cdot \lambda.$$

Man kann jetzt die *äußere Winkelfläche* der beiden ungerichteten Strahlen (vgl. § 4, **1**), in der λ positiv ist, dadurch bestimmen, daß *der in einer gegebenen Ebene u_0, v_0, w_0 liegende Strahl des Büschels* (19) *ihr angehören soll.*

Der Parameter μ dieses Strahles in (19) ist $\mu = U_1^0 : U_2^0$; damit für diesen Wert von μ in (20) λ positiv sei, können wir:

$$(21) \qquad \varepsilon_1 = -\operatorname{sign.} U_1^0, \quad \varepsilon_2 = -\operatorname{sign.} U_2^0$$

setzen (vgl. § 42, (17)).

Zugleich folgt aus (19) wie in § 47, **12**:

Sind x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 die Koordinaten der beiden Grundstrahlen eines Strahlbüschels im Bündel, so sind die Koordinaten des laufenden Strahles des Büschels in der Form darstellbar:

$$(22) \qquad \varrho x = x_1 - \mu x_2, \quad \varrho y = y_1 - \mu y_2, \quad \varrho z = z_1 - \mu z_2.$$

16. Gleichung und Parameterdarstellung des Ebenenbüschels im Bündel. Sind a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 die Stellungskosinus (Rich-

tungskosinus der Normale) zweier gerichteten Ebenen Γ_1 und Γ_2 im Bündel, so ist für die Stellungskosinus der Ebene Π, die den Winkel jener im Sinusverhältnis (Fig. 272):

(23) $$\frac{\sin \Gamma_1 \Pi}{\sin \Gamma_2 \Pi} = \lambda$$

teilt (vgl. § 42, 5), nach § 35, (8):

$$u : v : w = a_1 - \lambda a_2 : b_1 - \lambda b_2 : c_1 - \lambda c_2.$$

Es folgen daher wie in § 49, **15** die Sätze:

Sind:

(24) $$\begin{cases} N_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0, \\ N_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \end{cases}$$

Fig. 272.

die Gleichungen der beiden (gerichteten) Grundebenen Γ_1, Γ_2 eines Ebenenbüschels im Bündel in der Normalform (vgl. § 49, 9), *so ist die Gleichung derjenigen Ebene Π, die den Winkel der beiden Ebenen im Sinusverhältnis λ teilt:*

(25) $$N_1 - \lambda N_2 = 0.$$

Sind die Grundebenen in der allgemeinen Form:

(26) $$\begin{cases} X_1 = u_1 x + v_1 y + w_1 z = 0 \\ X_2 = u_2 x + v_2 y + w_2 z = 0 \end{cases}$$

gegeben, so ist die Gleichung derjenigen Ebene Π, die den Winkel beider Ebenen im Sinusverhältnis λ teilt:

(27) $$X_1 - \mu X_2 = 0,$$

wo:

(28) $$\mu = \frac{\varepsilon_1 \sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}}{\varepsilon_2 \sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}} \cdot \lambda.$$

Dabei ist:

(29) $$\varepsilon_1 = -\operatorname{sign.} X_1^0, \quad \varepsilon_2 = -\operatorname{sign.} X_2^0,$$

falls der den gegebenen Strahl x_0, y_0, z_0 enthaltende Winkelraum zwischen den Grundebenen als äußerer gilt (vgl. § 42, **7**).

Sind u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 die Koordinaten der Grundebenen eines Ebenenbüschels im Bündel, so sind die Koordinaten der laufenden Ebene des Büschels in der Form darstellbar (vgl. § 47, **12**):

(30) $$\varrho u = u_1 - \mu u_2, \quad \varrho v = v_1 - \mu v_2, \quad \varrho w = w_1 - \mu w_2.$$

§ 50. Die Transformation der homogenen gemeinen Koordinaten.

1. Transformation der Punkt- und Ebenenkoordinaten im Raume. Die Formeln für den Übergang von einem rechtwinkligen Koordinatensystem $Oxyz$ zu einem andern $O'x'y'z'$ (§ 45, (20), (21), (23) und (24)) nehmen bei homogener Schreibweise (vgl. § 47, **1**) die Form (Fig. 273) an:

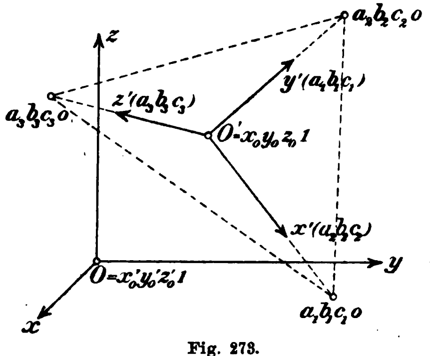


Fig. 273.

$$(1)\quad \begin{cases} \varrho x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' + x_0 t', \\ \varrho y = b_1 x' + b_2 y' + b_3 z' + y_0 t', \\ \varrho z = c_1 x' + c_2 y' + c_3 z' + z_0 t', \\ \varrho t = \qquad\qquad\qquad\qquad t', \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \varrho u = a_1 u' + a_2 v' + a_3 w', \\ \varrho v = b_1 u' + b_2 v' + b_3 w', \\ \varrho w = c_1 u' + c_2 v' + c_3 w', \\ \varrho s = x_0' u' + y_0' v' + z_0' w' + s', \end{cases}$$

und umgekehrt:

$$(3)\quad \begin{cases} \sigma x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z + x_0' t, \\ \sigma y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z + y_0' t, \\ \sigma z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z + z_0' t, \\ \sigma t' = \qquad\qquad\qquad\qquad t, \end{cases} \qquad (4)\quad \begin{cases} \sigma u' = a_1 u + b_1 v + c_1 w, \\ \sigma v' = a_2 u + b_2 v + c_2 w, \\ \sigma w' = a_3 u + b_3 v + c_3 w, \\ \sigma s' = x_0 u + y_0 v + z_0 w + s, \end{cases}$$

wo ϱ und σ Proportionalitätsfaktoren bedeuten.

Die neuen Koordinaten des Punktes und der Ebene sind daher, von einem gemeinsamen Faktor abgesehen, homogene lineare Funktionen der alten und umgekehrt.

Die rechten Seiten der Gleichungen (3) und (4) geben, gleich 0 gesetzt, die Gleichungen der Seitenebenen und Ecken des neuen Koordinatentetraeders (vgl. § 45, (22); § 47, **3**; **10**) in bezug auf das alte.

2. Transformation der Linienkoordinaten im Raume. Sind x_1, y_1, z_1, t_1; x_1', y_1', z_1', t_1' und x_2, y_2, z_2, t_2; x_2', y_2', z_2', t_2' die Koordinaten zweier Punkte in bezug auf die beiden Systeme $Oxyz$, $O'x'y'z'$, so sind die Strahlenkoordinaten der Verbindungslinie dieser Punkte in bezug auf beide Systeme nach § 48, (3'):

$$(1')\quad \begin{cases} p_{23} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad p_{31} = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \quad p_{12} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \\ p_{14} = \begin{vmatrix} x_1 & t_1 \\ x_2 & t_2 \end{vmatrix}, \quad p_{24} = \begin{vmatrix} y_1 & t_1 \\ y_2 & t_2 \end{vmatrix}, \quad p_{34} = \begin{vmatrix} z_1 & t_1 \\ z_2 & t_2 \end{vmatrix}, \end{cases}$$

$$(3') \quad \begin{cases} p'_{23} = \begin{vmatrix} y_1' & z_1' \\ y_2' & z_2' \end{vmatrix}, & p'_{31} = \begin{vmatrix} z_1' & x_1' \\ z_2' & x_2' \end{vmatrix}, & p'_{12} = \begin{vmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{vmatrix}, \\ p'_{14} = \begin{vmatrix} x_1' & t_1' \\ x_2' & t_2' \end{vmatrix}, & p'_{24} = \begin{vmatrix} y_1' & t_1' \\ y_2' & t_2' \end{vmatrix}, & p'_{34} = \begin{vmatrix} z_1' & t_1' \\ z_2' & t_2' \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Setzt man nun die Werte (1), mit den Indizes 1 und 2 gebildet, in (1′) ein, so ergibt sich mit Benutzung von (3′):

$$p_{23} = (b_2 c_3 - b_3 c_2) p'_{23} + (b_3 c_1 - b_1 c_3) p'_{31} + (b_1 c_2 - b_2 c_1) p'_{12} + \\ (b_1 z_0 - c_1 y_0) p'_{14} + (b_2 z_0 - c_2 y_0) p'_{24} + (b_3 z_0 - c_3 y_0) p'_{34}$$

. . .

$$p_{14} = a_1 p'_{14} + a_2 p'_{24} + a_3 p'_{34}$$

. . .

und mit Benutzung von § 37, (12) schließlich:

Zwischen den Strahlenkoordinaten p_{kl} und p'_{kl} einer Geraden in bezug auf zwei rechtwinklige Koordinatensysteme (Fig. 273) *bestehen die Gleichungen:*[116])

$$(5) \quad \begin{cases} \varrho p_{23} = a_1 p'_{23} + a_2 p'_{31} + a_3 p'_{12} + (b_1 z_0 - c_1 y_0) p'_{14} + (b_2 z_0 - c_2 y_0) p'_{24} \\ \qquad + (b_3 z_0 - c_3 y_0) p'_{34}, \\ \varrho p_{31} = b_1 p'_{23} + b_2 p'_{31} + b_3 p'_{12} + (c_1 x_0 - a_1 z_0) p'_{14} + (c_2 x_0 - a_2 z_0) p'_{24} \\ \qquad + (c_3 x_0 - a_3 z_0) p'_{34}, \\ \varrho p_{12} = c_1 p'_{23} + c_2 p'_{31} + c_3 p'_{12} + (a_1 y_0 - b_1 x_0) p'_{14} + (a_2 y_0 - b_2 x_0) p'_{24} \\ \qquad + (a_3 y_0 - b_3 x_0) p'_{34}, \\ \varrho p_{14} = a_1 p'_{14} + a_2 p'_{24} + a_3 p'_{34}, \\ \varrho p_{24} = b_1 p'_{14} + b_2 p'_{24} + b_3 p'_{34}, \\ \varrho p_{34} = c_1 p'_{14} + c_2 p'_{24} + c_3 p'_{34}. \end{cases}$$

Die alten Koordinaten des Strahles sind bis auf einen gemeinsamen Faktor ϱ homogene lineare Funktionen der neuen, und ebenso umgekehrt.

3. Transformation der Ebenen und Strahlenkoordinaten im Bündel. Lassen wir (Fig. 273) den Punkt O' und O zusammenfallen, setzen also $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, so können wir $Oxyz$ und $Ox'y'z'$ als zwei verschiedene Koordinatensysteme im Bündel des Punktes O ansehen. Gleichzeitig werden mit $s = 0$; $s' = 0$ nach § 49, 5 u, v, w und u', v', w' Koordinaten der Ebene im Bündel und werden mit $p_{23} = 0$, $p_{31} = 0$, $p_{12} = 0$; $p'_{23} = 0$, $p'_{31} = 0$, $p'_{12} = 0$ nach § 49, 6 $p_{14} : p_{24} : p_{34} = x : y : z$ und $p'_{14} : p'_{24} : p'_{34} = x' : y' : z'$ Koordinaten des Strahles im Bündel. Alsdann folgt aus (2) und (5):

Zwischen den Ebenenkoordinaten u, v, w und u', v', w'; bezüglich Strahlenkoordinaten x, y, z und x', y', z' in bezug auf zwei Koordinaten-

systeme $Oxyz$ und $Ox'y'z'$ im Bündel (Fig. 274) *bestehen die Beziehungen:*

$$(6)\quad \begin{cases} \varrho u = a_1 u' + a_2 v' + a_3 w', \\ \varrho v = b_1 u' + b_2 v' + b_3 w', \\ \varrho w = c_1 u' + c_2 v' + c_3 w', \end{cases} \qquad (7)\quad \begin{cases} \varrho x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 z', \\ \varrho y = b_1 x' + b_2 y' + b_3 z', \\ \varrho z = c_1 x' + c_2 y' + c_3 z', \end{cases}$$

Die Formeln (7) sind mit $\varrho = 1$ und $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$; $x' = \alpha'$, $y' = \beta'$, $z' = \gamma'$ zugleich die Transformationsformeln der Richtungskosinus α, β, γ; α', β', γ' eines Strahles, da für diese als Punktkoordinaten des Punktes vom Radiusvektor 1 (vgl. § 33, (16)) die Formeln § 37, **4** gelten.

4. Parameterdarstellung des Punktfeldes im Raume. In den Transformationsformeln § 50, **1**—**3** sind zugleich die teils früher schon angegebenen, teils neu hinzukommenden Parameterdarstellungen von Gebilden niederer Stufe im Raume enthalten.

Mit $z' = 0$ ergibt sich aus (1) mit Rücksicht auf § 49, **2**:

Ist eine Ebene durch einen Punkt $O' = x_0, y_0, z_0$ und zwei von ihm ausgehende rechtwinklige Achsen $x' = a_1, b_1, c_1$ und $y' = a_2, b_2, c_2$

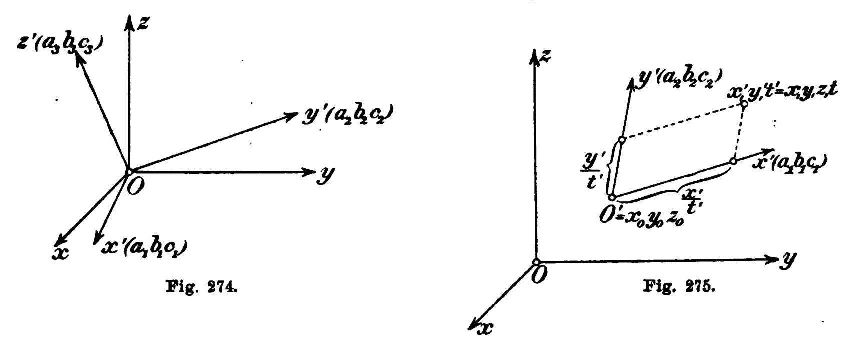


Fig. 274. Fig. 275.

(Fig. 275) *gegeben, so stellen sich die Koordinaten x, y, z, t des laufenden Punktes der Ebene in bezug auf das räumliche System $Oxyz$ mittels der Formeln:*[107])

$$(8)\quad \begin{cases} \varrho x = a_1 x' + a_2 y' + x_0 t', \\ \varrho y = b_1 x' + b_2 y' + y_0 t', \\ \varrho z = c_1 x' + c_2 y' + z_0 t', \\ \varrho t = \qquad\qquad\quad\; t' \end{cases}$$

durch die Koordinaten x', y', t' desselben Punktes in bezug auf das ebene System $O'x'y'$ dar. Es sind wieder die Formeln § 40, (19), zugleich ein Sonderfall von § 53, (3').

Für die Punkte x, y, z, t der unendlich fernen Ebene sind nach

§ 49, 2 schon die neben $t = 0$ nicht verschwindenden Raumkoordinaten x, y, z zugleich unabhängige Parameter.

5. Parameterdarstellung des Strahlfeldes im Raume. Mit $p'_{23} = 0$, $p'_{31} = 0$, $p'_{34} = 0$, $p'_{24} = u'$, $p'_{41} = v'$, $p'_{12} = s'$ ergibt sich nach § 49, 3 aus den Transformationsformeln (5):

Ist eine Ebene durch einen Punkt $O' = x_0, y_0, z_0$ und zwei von ihm ausgehende rechtwinklige Achsen $x' = a_1, b_1, c_1$ und *$y' = a_2, b_2, c_2$* (Fig. 276) *gegeben, so stellen sich die Koordinaten p_{kl} des laufenden Strahles der Ebene in bezug auf das räumliche System $Oxyz$ mittels der Formeln:*[108])

$$(9)\quad \begin{cases} \varrho p_{23} = (b_2 z_0 - c_2 y_0)u' - (b_1 z_0 - c_1 y_0)v' + (b_1 c_2 - b_2 c_1)s', & \varrho p_{14} = a_2 u' - a_1 v', \\ \varrho p_{31} = (c_2 x_0 - a_2 z_0)u' - (c_1 x_0 - a_1 z_0)v' + (c_1 a_2 - c_2 a_1)s', & \varrho p_{24} = b_2 u' - b_1 v', \\ \varrho p_{12} = (a_2 y_0 - b_2 x_0)u' - (a_1 y_0 - b_1 x_0)v' + (a_1 b_2 - a_2 b_1)s', & \varrho p_{34} = c_2 u' - c_1 v', \end{cases}$$

durch die Linienkoordinaten u', v', s' desselben Strahles in bezug auf das ebene System $O'x'y'$ dar.

Die Formeln sind ein Sonderfall von § 53, (7').

Für die Geraden p_{kl} der unendlich fernen Ebene sind nach § 49, 4 schon die Strahlenkoordinaten $p_{23} = u$, $p_{31} = v$, $p_{12} = w$ zugleich unabhängige Parameter.

6. Parameterdarstellung eines Ebenenbündels. Mit $s' = 0$ erhält man aus (2) eine Parameterdarstellung der durch O' gehenden

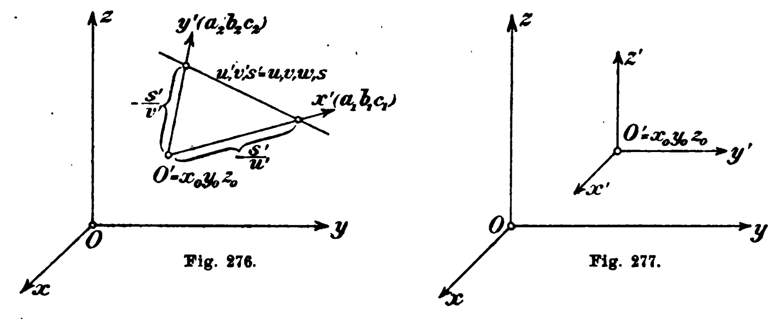


Fig. 276. Fig. 277.

Ebenen. Man kann dabei zur Vereinfachung das System $O'x'y'z'$ mit $Oxyz$ parallel nehmen, da es sich nur um die willkürliche Lage des Bündelzentrums O' handelt (Fig. 277).

Ist ein Punkt O' als Mittelpunkt eines Ebenenbündels durch seine Koordinaten x_0, y_0, z_0 gegeben, so lassen sich die Koordinaten u, v, w, s der laufenden Ebene des Bündels in bezug auf das räumliche System $Oxyz$ mittels der Formeln:

$$(10)\qquad \varrho u = u', \quad \varrho v = v', \quad \varrho w = w', \quad \varrho s = -x_0 u' - y_0 v' - z_0 w'$$

durch die Koordinaten u', v', w' derselben Ebene in bezug auf ein mit $Oxyz$ paralleles Dreiflach $O'x'y'z'$ im Bündel (vgl. § 49, **5**) *darstellen.*

Es sind wieder die Formeln § 45, (19), zugleich ein Sonderfall von § 53, (3).

7. Parameterdarstellung eines Strahlbündels. Mit $p'_{23} = 0$, $p'_{31} = 0$, $p'_{12} = 0$, $p'_{14} = x'$, $p'_{24} = y'$, $p'_{34} = z'$ ergibt sich nach § 49, **6** aus den Formeln (5) im Anschluß an Fig. 277:

Ist ein Punkt O' als Mittelpunkt eines Strahlbündels durch seine Koordinaten x_0, y_0, z_0 gegeben, so lassen sich die Koordinaten p_{kl} des laufenden Strahles des Bündels in bezug auf das räumliche System $Oxyz$ mittels der Formeln:

$$(11)\qquad \begin{cases} \varrho p_{23} = y' z_0 - z' y_0, & \varrho p_{14} = x', \\ \varrho p_{31} = z' x_0 - x' z_0, & \varrho p_{24} = y', \\ \varrho p_{12} = x' y_0 - y' x_0, & \varrho p_{34} = z', \end{cases}$$

durch die Koordinaten x', y', z' derselben Geraden in bezug auf ein mit $Oxyz$ paralleles Dreikant $O'x'y'z'$ im Bündel (vgl. § 49, **6**) *darstellen.*

Die Formeln sind ein Sonderfall von § 53, (7). Sind α, β, γ die Richtungskosinus der Geraden, so hat man $x' : y' : z' = \alpha : \beta : \gamma$, und erkennt in (11) wiederum die Formeln § 48, (18).

8. Parameterdarstellung des Ebenenbündels mit unendlich fernem Mittelpunkt. Mit $w' = 0$ ergeben sich aus (2) die zur z'-Achse parallelen Ebenen. Man kann zur Vereinfachung $O' = O$ nehmen und findet (Fig. 278):

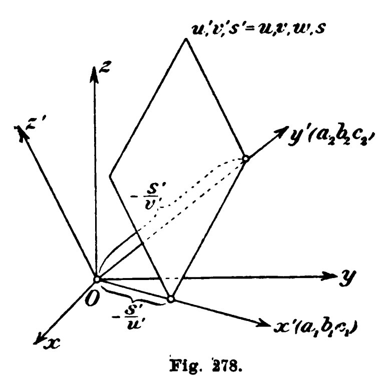


Fig. 278.

Ist ein Ebenenbündel mit unendlich fernem Zentrum durch zwei rechtwinklige Achsen $Ox' = a_1$, b_1, c_1 und $Oy' = a_2$, b_2, c_2 gegeben, deren Ebene zu dem Bündel senkrecht steht, so stellen sich die Koordinaten u, v, w, s der laufenden Ebene des Bündels in bezug auf das räumliche System $Oxyz$ mittels der Formeln:

$$(12)\qquad \varrho u = a_1 u' + a_2 v', \quad \varrho v = b_1 u' + b_2 v', \quad \varrho w = c_1 u' + c_2 v', \quad \varrho s = s'$$

durch die Koordinaten u', v', s' derselben Ebene in bezug auf das Achsensystem $O'x'y'$ im Bündel (vgl. § 49, **10**) *dar.*

9. Parameterdarstellung des Parallelstrahlenbündels. Mit $p'_{14} = 0$, $p'_{24} = 0$, $p'_{12} = 0$, $p'_{31} = x'$, $p'_{23} = -y'$, $p'_{34} = t'$, (vgl. § 49, **11**) folgt unter der Vereinfachung $O' = O$ aus (5):

Die Koordinaten p_{kl} des laufenden Strahles eines Parallelstrahlbündels von der Richtung $z' = a_3, b_3, c_3$ in bezug auf das räumliche System $Oxyz$ stellen sich mittels der Formeln:

$$(13)\quad \begin{cases} \varrho p_{23} = a_2 x' - a_1 y', & \varrho p_{14} = a_3 t', \\ \varrho p_{31} = b_2 x' - b_1 y', & \varrho p_{24} = b_3 t', \\ \varrho p_{12} = c_2 x' - c_1 y', & \varrho p_{34} = c_3 t', \end{cases}$$

durch die Koordinaten x', y', t' desselben Strahles in bezug auf zwei zu z' senkrechte Achsen $Ox' = a_1, b_1, c_1$ und $Oy' = a_2, b_2, c_2$ (vgl. § 49, **11**) *dar* (Fig. 279).

10. Parameterdarstellung der Punktreihe. Mit $y' = 0$, $z' = 0$ ergibt sich aus (1):

Ist eine Punktreihe durch einen Punkt $O' = x_0, y_0, z_0$ und die Richtungskosinus a_1, b_1, c_1 gegeben, so stellen sich die Koordinaten x, y, z, t

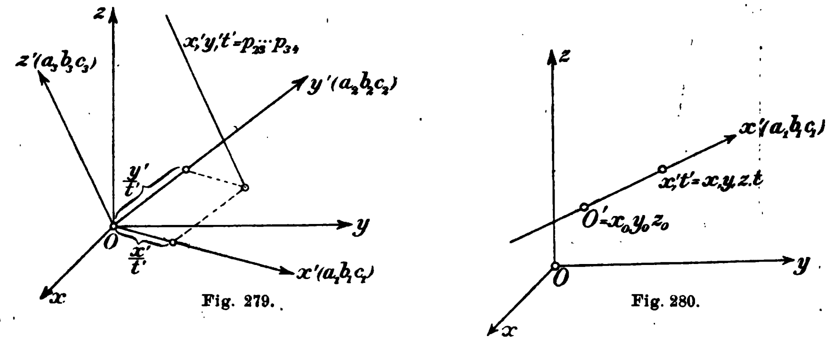


Fig. 279. Fig. 280.

des laufenden Punktes der Reihe in bezug auf das räumliche System $Oxyz$ mittels der Formeln:

$$(14)\quad \varrho x = a_1 x' + x_0 t', \quad \varrho y = b_1 x' + y_0 t', \quad \varrho z = c_1 x' + z_0 t', \quad \varrho t = t'$$

durch die Koordinaten x', t' des Punktes auf der Geraden (vgl. § 49, **2**) *dar* (Fig. 280).

Es sind die homogen geschriebenen Formeln § 43, (2).

Für die *unendlich ferne Punktreihe* der $x'y'$-Ebene mit der Vereinfachung $O' = O$ (Fig. 274) und mit $z' = 0$, $t' = 0$ ergibt sich aus (1) ebenso die Parameterdarstellung:

$$(15)\quad \varrho x = a_1 x' + a_2 y', \quad \varrho y = b_1 x' + b_2 y', \quad \varrho z = c_1 x' + c_2 y', \quad \varrho t = 0,$$

wo x', y' homogene gemeine Koordinaten auf der unendlich fernen Geraden sind (vgl. § 23, **1**).

11. Parameterdarstellung des Ebenenbüschels. Mit $w' = 0$, $s' = 0$ ergibt sich aus (2):

Ist die Achse z' eines Ebenenbüschels als Normale der Ebene zweier rechtwinkligen Achsen $x' = a_1, b_1, c_1$ und $y' = a_2, b_2, c_2$ im Punkte $O' = x_0, y_0, z_0$ gegeben, so stellen sich die Koordinaten u, v, w, s der laufenden Ebene des Büschels in bezug auf das räumliche System $Oxyz$ mittels der Formeln:

$$(16) \qquad \begin{cases} \varrho u = a_1 u' + a_2 v', \\ \varrho v = b_1 u' + b_2 v', \\ \varrho w = c_1 u' + c_2 v', \\ \varrho s = x_0' u' + y_0' v' \end{cases}$$

durch die homogenen Koordinaten u', v' derselben Ebene im Ebenenbüschel (vgl. § 49, **13**) *dar* (Fig. 281).

Es ist der Satz § 47, (26) mit rechtwinkligen Grundebenen.

Für ein *Parallelebenenbüschel,* dessen Ebenen der $y'z'$-Ebene par-

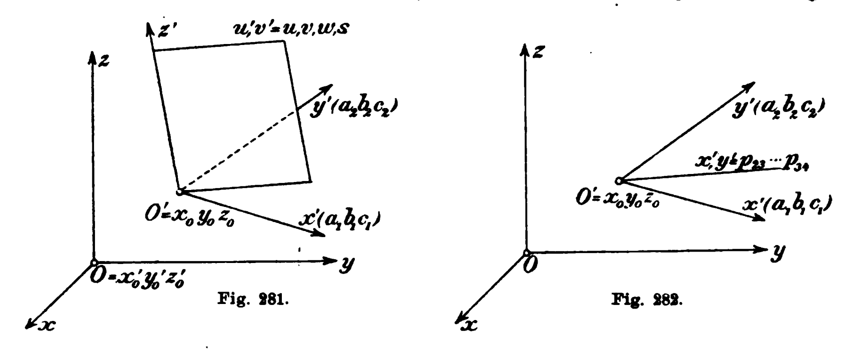


Fig. 281. Fig. 282.

allel sind, ergibt sich mit $v' = 0$, $w' = 0$ und mit $O' = 0$ (Fig. 274) die Parameterdarstellung

$$(17) \qquad \varrho u = a_1 t', \quad \varrho v = b_1 t', \quad \varrho w = c_1 t', \quad \varrho s = -x',$$

wo $x', t' = -s', u'$ die Koordinaten der Ebene im Parallelebenenbüschel sind (vgl. § 49, **13**).

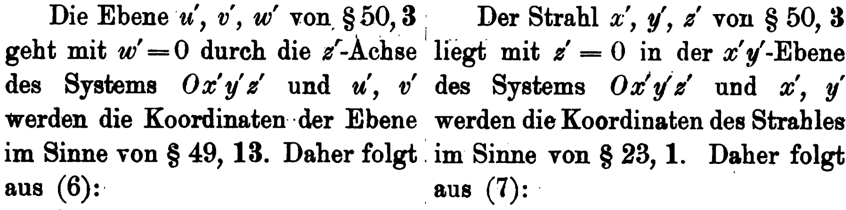
12. Parameterdarstellung des Strahlbüschels im Raume. Mit $p_{23}' = 0$, $p_{31}' = 0$, $p_{12}' = 0$, $p_{34}' = 0$, $p_{14}' = x'$, $p_{24}' = y'$ (vgl. § 49, **14**) folgt aus (5) (Fig. 282):

Ist der Mittelpunkt O' eines Strahlbüschels durch seine Koordinaten x_0, y_0, z_0 und die Ebene des Büschels durch zwei rechtwinklige von O' ausgehende Achsen $x' = a_1, b_1, c_1$ und $y' = a_2, b_2, c_2$ gegeben, so stellen sich die Strahlenkoordinaten des laufenden Strahles des Büschels in bezug auf das räumliche System $Oxyz$ mittels der Formeln:

$$(18) \qquad \begin{cases} \varrho p_{23} = (b_1 z_0 - c_1 y_0) x' + (b_2 z_0 - c_2 y_0) y', & \varrho p_{14} = a_1 x' + a_2 y', \\ \varrho p_{31} = (c_1 x_0 - a_1 z_0) x' + (c_2 x_0 - a_2 z_0) y', & \varrho p_{24} = b_1 x' + b_2 y', \\ \varrho p_{12} = (a_1 y_0 - b_1 x_0) x' + (a_2 y_0 - b_2 x_0) y', & \varrho p_{34} = c_1 x' + c_2 y', \end{cases}$$

durch die Koordinaten x', y' desselben Strahles in bezug auf das ebene System $O'x'y'$ dar (vgl. § 23, **1**). Die Formeln sind ein Sonderfall von § 52, (33').

13. Parameterdarstellung des Ebenenbüschels und Strahlbüschels im Bündel.



Die Ebene u', v', w' von § 50, **3** geht mit $w' = 0$ durch die z'-Achse des Systems $Ox'y'z'$ und u', v' werden die Koordinaten der Ebene im Sinne von § 49, **13**. Daher folgt aus (6):

Sind die Grundebenen eines Ebenenbüschels im Bündel als $y'z'$- und $z'x'$-Ebene des Achsensystems $Ox'y'z'$ (Fig. 283a) *gegeben, so stellen*

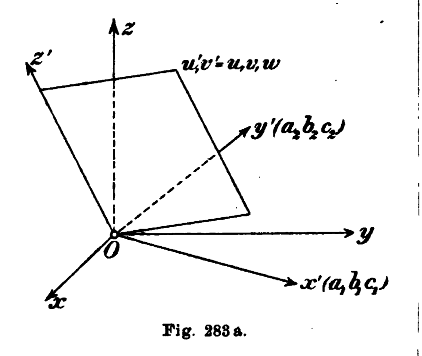


Fig. 283a.

sich die Koordinaten u, v, w der laufenden Ebene des Büschels in bezug auf das Dreiflach $Oxyz$ im Bündel mittels der Formeln:

$$(19)\quad \begin{cases} \varrho u = a_1 u' + a_2 v', \\ \varrho v = b_1 u' + b_2 v', \\ \varrho w = c_1 u' + c_2 v' \end{cases}$$

durch die Koordinaten u', v' derselben Ebene im Büschel (§ 49, **13**) *dar.*

Der Strahl x', y', z' von § 50, **3** liegt mit $z' = 0$ in der $x'y'$-Ebene des Systems $Ox'y'z'$ und x', y' werden die Koordinaten des Strahles im Sinne von § 23, **1**. Daher folgt aus (7):

Sind die Grundstrahlen eines Strahlbüschels im Bündel als x'- und y'-Achse des Achsensystems $Ox'y'z'$ (Fig. 283b) *gegeben, so*

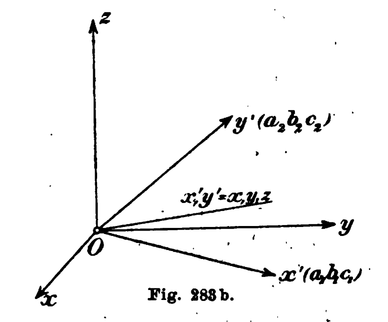


Fig. 283b.

stellen sich die Koordinaten x, y, z des laufenden Strahles des Bündels in bezug auf das Dreikant $Oxyz$ im Bündel mittels der Formeln:

$$(19')\quad \begin{cases} \varrho x = a_1 x' + a_2 y', \\ \varrho y = b_1 x' + b_2 y', \\ \varrho z = c_1 x' + c_2 y', \end{cases}$$

durch die Koordinaten x', y' desselben Strahles im Büschel (§ 23, **1**) *dar.*

V. Kapitel.

Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen.

§ 51. Die Identitätensätze.

1. Identität zwischen den Gleichungen von zwei Ebenen oder Punkten. In § 40, 4 wurden die Bedingungen für den Zusammenfall von zwei Ebenen angegeben. Wir wiederholen sie in homogenen Koordinaten mit anderer Bezeichnung und mit Hinzufügung des dualen Satzes (vgl. § 24, **1**):

Die beiden Ebenen:

$$(1)\quad \begin{cases} X_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t = 0, \\ X_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t = 0 \end{cases}$$

fallen immer dann und nur dann zusammen (haben ∞^2 Punkte gemein), wenn eine Identität von der Form besteht:

$$(2)\quad \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = 0.$$

Die beiden Punkte:

$$(1')\quad \begin{cases} U_1 = a_1' u + b_1' v + c_1' w + d_1' s = 0, \\ U_2 = a_2' u + b_2' v + c_2' w + d_2' s = 0 \end{cases}$$

fallen immer dann und nur dann zusammen (haben ∞^2 Ebenen gemein), wenn eine Identität von der Form besteht:

$$(2')\quad \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 = 0.$$

In dieser verschwindet keiner der beiden Faktoren λ_1, λ_2, wenn nicht alle Koeffizienten der einen der beiden Gleichungen (1) verschwinden.

2. Unterdeterminanten aus den Koeffizienten der Gleichungen zweier Ebenen oder Punkte. Da die Identität (2) mit den vier Gleichungen:

$$(3)\quad \begin{cases} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = 0, & \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = 0, \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = 0, & \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 = 0 \end{cases}$$

gleichbedeutend ist, so folgt:

Die beiden Ebenen (1) fallen immer dann und nur dann zusammen, wenn:

$$(4)\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die beiden Punkte (1′) fallen immer dann und nur dann zusammen, wenn:

$$(4')\quad \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' & d_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' & d_2' \end{vmatrix} = 0.$$

Das Verschwinden der Matrix bedeutet dabei das Verschwinden aller ihrer zweireihigen Unterdeterminanten (Anm. 1, III, (24)):

$$(5)\begin{cases} q_{23}=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, & q_{31}=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \\ q_{12}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, & q_{14}=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}, \\ q_{24}=\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}, & q_{34}=\begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Wenn die Unterdeterminanten q_{kl} *nicht alle verschwinden, haben die Ebenen* (1) *eine Gerade* (∞^1 *Punkte) gemein, und die* q_{kl} *sind deren Achsenkoordinaten* (vgl. § 48, (3)).

$$(5')\begin{cases} p_{23}=\begin{vmatrix} b_1' & c_1' \\ b_2' & c_2' \end{vmatrix}, & p_{31}=\begin{vmatrix} c_1' & a_1' \\ c_2' & a_2' \end{vmatrix}, \\ p_{12}=\begin{vmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2' & b_2' \end{vmatrix}, & p_{14}=\begin{vmatrix} a_1' & d_1' \\ a_2' & d_2' \end{vmatrix}, \\ p_{24}=\begin{vmatrix} b_1' & d_1' \\ b_2' & d_2' \end{vmatrix}, & p_{34}=\begin{vmatrix} c_1' & d_1' \\ c_2' & d_2' \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Wenn die Unterdeterminanten p_{kl} *nicht alle verschwinden, haben die Punkte* (1′) *eine Gerade* (∞^1 *Ebenen) gemein, und die* p_{kl} *sind deren Strahlenkoordinaten* (vgl. § 48, (3′)).

3. Identität zwischen den Gleichungen von drei Ebenen oder drei Punkten. Nach § 42, 9 wird jede durch die Schnittlinie der beiden Ebenen $X_1 = 0$ und $X_2 = 0$ gehende dritte Ebene durch eine Gleichung von der Form $X_1 - \mu X_2 = 0$ dargestellt, wie auch umgekehrt jede durch eine solche Gleichung dargestellte dritte Ebene durch die besagte Schnittlinie geht. Bezeichnet man also die Gleichung der dritten Ebene kurz mit $X_3 = 0$, so muß nach (2):

$$\lambda_1(X_1 - \mu X_2) + \lambda_3 X_3 = 0$$

sein. Wegen der mit $-\lambda_1\mu = \lambda_2$ sich ergebenden Symmetrie der Gleichung schließen wir:[81])

Die drei Ebenen:

$$(6)\begin{cases} X_1 = a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = 0, \\ X_2 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = 0, \\ X_3 = a_3x + b_3y + c_3z + d_3t = 0 \end{cases}$$

haben immer dann und nur dann eine Gerade (∞^1 *Punkte) gemein, wenn eine Identität von der Form besteht:*

$$(7)\quad \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0.$$

Die drei Punkte:

$$(6')\begin{cases} U_1 = a_1'u + b_1'v + c_1'w + d_1't = 0, \\ U_2 = a_2'u + b_2'v + c_2'w + d_2't = 0, \\ U_3 = a_3'u + b_3'v + c_3'w + d_3't = 0 \end{cases}$$

liegen immer dann und nur dann in einer Geraden (haben ∞^1 *Ebenen gemein), wenn eine Identität von der Form besteht:*

$$(7')\quad \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0.$$

In dieser verschwindet nach § 51, 1 keiner der Faktoren λ_1, λ_2, λ_3, wenn nicht zwei von den drei Ebenen (6) (Punkten (6′)) zusammenfallen.

4. Unterdeterminanten aus den Koeffizienten der Gleichungen dreier Ebenen oder Punkte. Da die Identität (7) mit den vier Gleichungen:

$$(8)\qquad \begin{cases} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0, & \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = 0, \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 = 0, & \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3 = 0, \end{cases}$$

gleichbedeutend ist, so folgt:

Die drei Ebenen (6) *haben immer dann und nur dann eine Gerade gemein, wenn:*

$$(9)\qquad \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{Vmatrix} = 0.$$

Die drei Punkte (6′) *liegen immer dann und nur dann in einer Geraden, wenn:*

$$(9')\qquad \begin{Vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' & d_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' & d_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' & d_3' \end{Vmatrix} = 0.$$

Das Verschwinden der Matrix bedeutet dabei das Verschwinden aller ihrer *dreireihigen Unterdeterminanten* (Anm. 1, III, (25)), die wir in der folgenden Weise bezeichnen (vgl. § 51, 5 zu (14)):

$$(10)\qquad \begin{cases} A_4 = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}, \\ B_4 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}, \\ C_4 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}, \\ D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

$$(10')\qquad \begin{cases} A_4' = -\begin{vmatrix} b_1' & c_1' & d_1' \\ b_2' & c_2' & d_2' \\ b_3' & c_3' & d_3' \end{vmatrix}, \\ B_4' = \begin{vmatrix} a_1' & c_1' & d_1' \\ a_2' & c_2' & d_2' \\ a_3' & c_3' & d_3' \end{vmatrix}, \\ C_4' = -\begin{vmatrix} a_1' & b_1' & d_1' \\ a_2' & b_2' & d_2' \\ a_3' & b_3' & d_3' \end{vmatrix}, \\ D_4' = \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Die Achsenkoordinaten q_{kl} *der gemeinsamen Geraden der drei Ebenen* (6) *sind die zweireihigen Unterdeterminanten der Matrix* (9);

Die Strahlenkoordinaten p_{kl} *der gemeinsamen Geraden der drei Punkte* (6′) *sind die zweireihigen Unterdeterminanten der Matrix* (9′);

und zwar die aus der ersten und zweiten Zeile gebildeten Unterdeterminanten (5); (5′) oder die aus zwei andern Zeilen gebildeten, die jenen proportional sind (Anm. 1, II, (7); III, (22)).

Wenn die dreireihigen Unterdeterminanten (10) *nicht alle verschwinden, haben die drei Ebenen* (6) *einen bestimmten Schnittpunkt mit den Koordinaten* (Anm. 2, III, (14)):

$$(11)\qquad x:y:z:t = A_4 : B_4 : C_4 : D_4.$$

Wenn die dreireihigen Unterdeterminanten (10′) *nicht alle verschwinden, haben die drei Punkte* (6′) *eine bestimmte Verbindungsebene mit den Koordinaten:*

$$(11')\qquad u:v:w:s = A_4' : B_4' : C_4' : D_4'.$$

Die jetzt nicht mehr proportionalen zweireihigen Unterdeterminanten der drei Zeilenkombinationen der Matrix (9) (oder (9')) sind *die Achsenkoordinaten der drei vom Punkte* (11) *ausgehenden Schnittlinien* der drei Ebenen (6) (oder *die Strahlenkoordinaten der drei in der Ebene* (11') *liegenden Verbindungslinien* der drei Punkte (6')).

5. Die Determinante aus den Koeffizienten der Gleichungen von vier Ebenen oder Punkten. Aus § 47, 8 folgen die beiden Sätze:

Die vier Ebenen:

$$(12)\quad \begin{cases} X_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t = 0, \\ X_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t = 0, \\ X_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 t = 0, \\ X_4 = a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 t = 0, \end{cases}$$

gehen immer dann und nur dann durch einen Punkt, wenn die Determinante der Koeffizienten:

$$(13)\quad D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

verschwindet.

Die Koordinaten des Schnittpunktes sind (Anm. 2, III, (12)):

$$(14)\quad \begin{cases} x : y : z : t = A_1 : B_1 : C_1 : D_1, \\ \qquad\qquad\; = A_2 : B_2 : C_2 : D_2, \\ \qquad\qquad\; = A_3 : B_3 : C_3 : D_3, \\ \qquad\qquad\; = A_4 : B_4 : C_4 : D_4. \end{cases}$$

Die vier Punkte:

$$(12')\quad \begin{cases} U_1 = a_1' u + b_1' v + c_1' w + d_1' s = 0, \\ U_2 = a_2' u + b_2' v + c_2' w + d_2' s = 0, \\ U_3 = a_3' u + b_3' v + c_3' w + d_3' s = 0, \\ U_4 = a_4' u + b_4' v + c_4' w + d_4' s = 0 \end{cases}$$

liegen immer dann und nur dann in einer Ebene, wenn die Determinante der Koeffizienten:

$$(13')\quad D' = \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' & d_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' & d_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' & d_3' \\ a_4' & b_4' & c_4' & d_4' \end{vmatrix}$$

verschwindet.

Die Koordinaten der Verbindungsebene sind:

$$(14')\quad \begin{cases} u : v : w : s = A_1' : B_1' : C_1' : D_1', \\ \qquad\qquad\;\; = A_2' : B_2' : C_2' : D_2', \\ \qquad\qquad\;\; = A_3' : B_3' : C_3' : D_3', \\ \qquad\qquad\;\; = A_4' : B_4' : C_4' : D_4', \end{cases}$$

wo *die großen Buchstaben die* bei verschwindendem D reihenweise proportionalen *Unterdeterminanten der gleichnamigen Elemente der Determinante D, bezüglich D', bedeuten* (Anm. 1, III, (21)).

6. Identität zwischen den Gleichungen von vier Ebenen oder vier Punkten. Wenn $D = 0$ ist, können andererseits aus den Gleichungen (Anm. 2, III, (11)).

$$(15)\quad \begin{cases} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 = 0, & \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 = 0, \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 + \lambda_4 c_4 = 0, & \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3 + \lambda_4 d_4 = 0, \end{cases}$$

vier nicht sämtlich verschwindende Größen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ bestimmt werden. Daher folgt aus § 51, 5 weiter:[81])

Die vier Ebenen (12) *gehen immer dann und nur dann durch einen Punkt, wenn eine Identität von der Form besteht:*

(16) $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 = 0.$

Die vier Punkte (12') *liegen immer dann und nur dann in einer Ebene, wenn eine Identität von der Form besteht:*

(16') $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 + \lambda_4 U_4 = 0.$

In dieser verschwindet nach § 51, 3 keiner der Faktoren λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, wenn nicht drei von den vier Ebenen eine Gerade gemein haben. Bei gegebenen Koeffizienten mit verschwindender Determinante D haben die λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 in (16) die Werte (Anm. 2, III, (14)):

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4 = A_1 : A_2 : A_3 : A_4 = B_1 : B_2 : B_3 : B_4$$
$$= C_1 : C_2 : C_3 : C_4 = D_1 : D_2 : D_3 : D_4.$$

7. Das Tetraeder aus vier Ebenen oder vier Punkten. Wenn die Determinante D in (13) nicht verschwindet, so bestimmen die vier Ebenen (12) ein Tetraeder. Die alsdann nicht mehr proportionalen Unterdeterminanten (14) bestimmen nach (11) die Koordinaten der vier Ecken des Tetraeders, nämlich:

$$(17) \quad \begin{cases} x_1 : y_1 : z_1 : t_1 = A_1 : B_1 : C_1 : D_1, \\ x_2 : y_2 : z_2 : t_2 = A_2 : B_2 : C_2 : D_2, \\ x_3 : y_3 : z_3 : t_3 = A_3 : B_3 : C_3 : D_3, \\ x_4 : y_4 : z_4 : t_4 = A_4 : B_4 : C_4 : D_4. \end{cases}$$

Daher ist das von den vier Ebenen (12) *bestimmte Tetraeder identisch mit dem von den vier Punkten* (12') *bestimmten Tetraeder, wenn in der Bezeichnung von* § 51, 5 zu (14) *für* $i = 1, 2, 3, 4$:

$$(18) \qquad a_i' = A_i, \quad b_i' = B_i, \quad c_i' = C_i, \quad d_i' = D_i$$

und damit (Anm. 1, III, (8); (7)):

$$(18') \quad A_i' = D^2 a_i, \quad B_i' = D^2 b_i, \quad C_i' = D^2 c_i, \quad D_i' = D^2 d_i; \quad D' = D^3.$$

Die zweireihigen Unterdeterminanten der sechs Zeilenkombinationen der Determinanten D und D' sind die Achsenkoordinaten und Strahlenkoordinaten der sechs Kanten des Tetraeders. Beispielsweise hat die Schnittkante der Seitenflächen $X_1 = 0$ und $X_2 = 0$ und die mit ihr identische Verbindungslinie der Ecken $U_3 = 0$ und $U_4 = 0$ nach (5); (5') die folgenden Achsenkoordinaten q_{hi} und Strahlenkoordinaten p_{hi}:

$$(19) \quad \begin{cases} q_{23} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad q_{31} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad q_{12} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \\ q_{14} = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}, \quad q_{24} = \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}, \quad q_{34} = \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}, \end{cases}$$

$$(19') \quad \begin{cases} p_{23} = \begin{vmatrix} B_3 & C_3 \\ B_4 & C_4 \end{vmatrix}, & p_{31} = \begin{vmatrix} C_3 & A_3 \\ C_4 & A_4 \end{vmatrix}, & p_{12} = \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_4 & B_4 \end{vmatrix}, \\ p_{14} = \begin{vmatrix} A_3 & D_3 \\ A_4 & D_4 \end{vmatrix}, & p_{24} = \begin{vmatrix} B_3 & D_3 \\ B_4 & D_4 \end{vmatrix}, & p_{34} = \begin{vmatrix} C_3 & D_3 \\ C_4 & D_4 \end{vmatrix}, \end{cases}$$

worauf (Anm. 1, III, (9)) in der Tat (§ 48, (10)):

$$(20) \qquad q_{23} : q_{31} : q_{12} : q_{14} : q_{24} : q_{34} = p_{14} : p_{24} : p_{34} : p_{23} : p_{31} : p_{12}.$$

8. Identität zwischen den Gleichungen von fünf Ebenen und fünf Punkten. Zwischen den linken Seiten der Gleichungen von fünf Ebenen oder fünf Punkten besteht immer eine Identität von der Form:

$$(21) \qquad \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 + \lambda_5 X_5 = 0.$$

$$(21') \qquad \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 + \lambda_4 U_4 + \lambda_5 U_5 = 0.$$

Denn eine solche ist gleichbedeutend mit den vier Gleichungen:

$$(22) \qquad \begin{cases} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 + \lambda_5 a_5 = 0, \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 + \lambda_5 b_5 = 0, \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 + \lambda_4 c_4 + \lambda_5 c_5 = 0, \\ \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3 + \lambda_4 d_4 + \lambda_5 d_5 = 0, \end{cases}$$

denen durch fünf nicht sämtlich verschwindende Größen genügt werden kann. Es ist keine dieser Größen Null, wenn keine vier von den fünf Ebenen durch einen Punkt gehen.

9. Unendlich ferne Schnittlinie von zwei oder drei Ebenen. Die Schnittlinie der beiden getrennten Ebenen (1) ist unendlich fern, wenn entweder beide parallel sind ($a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$) oder die eine von ihnen die unendlich ferne Ebene ist ($a_2 = 0,\ b_2 = 0,\ c_2 = 0$). In der Tat ist dann in (5): $q_{23} = 0,\ q_{31} = 0,\ q_{12} = 0$ (vgl. § 49, (3)). Die Verbindungslinie der beiden Punkte (1′) ist unendlich fern, wenn beide Punkte unendlich fern sind ($d_1' = 0,\ d_2' = 0$). In der Tat ist dann in (5′): $p_{14} = 0,\ p_{24} = 0,\ p_{34} = 0$.

Wenn die drei Ebenen (6) unter der Bedingung (7) oder (9) eine gemeinsame Schnittlinie haben, so kann diese unendlich fern werden, wenn die drei Ebenen parallel sind ($a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2 = a_3 : b_3 : c_3$) oder zwei parallel sind und die dritte die unendlich ferne Ebene ist ($a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2,\ a_3 = 0,\ b_3 = 0,\ c_3 = 0$).

10. Unendlich ferner Schnittpunkt von drei oder vier Ebenen. Wenn die drei Ebenen (6) einen bestimmten Schnittpunkt (11) haben, so wird dieser für $D_4 = 0$ unendlich fern. Dies tritt ein, wenn die Ebenen ein dreiseitiges Prisma bilden oder wenn zwei parallel und die dritte eine ihnen nicht parallele endliche Ebene ist oder eine die

unendlich ferne Ebene ist und die beiden andern endlich und nicht parallel sind.

Vier Ebenen mit unendlich fernem gemeinsamen Punkt bilden ein vierseitiges Prisma oder eine ist unendlich fern und drei bilden ein dreiseitiges Prisma (vgl. § 24, **9**).

§ 52. Perspektive Lage von Ebenenbüschel, Punktreihe und Strahlbüschel.

1. Begriff der perspektiven Beziehung von Ebenenbüschel und Punktreihe. Ein Ebenenbüschel und eine Gerade g, die nicht durch die Achse q des ersteren hindurchgeht, werden durch ihre gegenseitige Lage *perspektiv aufeinander bezogen* (vgl. § 5, **1**), indem jede Ebene $A, B, \Gamma, \ldots, \Pi$ des Büschels die Gerade in einem bestimmten Punkte $A, B, C, \ldots, P$ schneidet, und umgekehrt jeder Punkt der

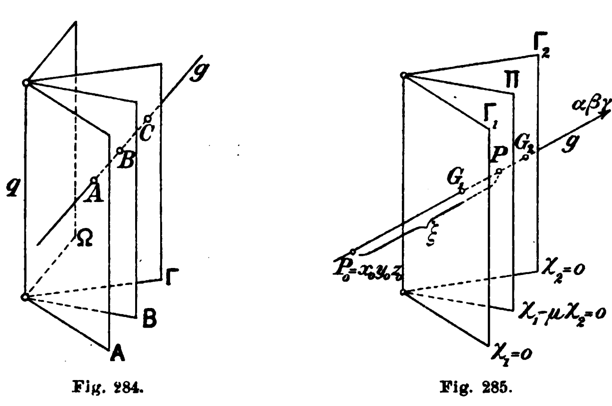


Fig. 284. Fig. 285.

Geraden mit der Achse q eine Ebene des Büschels bestimmt. Die Beziehung zwischen den Ebenen Π und den Punkten P ist *wechselseitig eindeutig; Π und P heißen entsprechende* Elemente (Fig. 284).

Der zu der Geraden g parallelen Ebene Ω des Büschels entspricht der unendlich ferne Punkt der Geraden.

2. Gleichung der zu einem Ebenenbüschel perspektiven Punktreihe. Es seien:

$$(1) \qquad \begin{cases} X_1 = A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ X_2 = A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \end{cases}$$

die Grundebenen Γ_1 und Γ_2 eines Ebenenbüschels:

$$(2) \qquad X_1 - \mu X_2 = 0.$$

Hier hat der Parameter μ der laufenden Ebene Π nach § 42, (16) die Bedeutung:

(3) $\mu = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\lambda, \quad \varkappa_i = \varepsilon_i\sqrt{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2}, \quad \varepsilon_i = -\operatorname{sign.} D_i, \quad i = 1, 2,$

und ist:

$$(4) \qquad \lambda = \frac{\sin \Gamma_1 \Pi}{\sin \Gamma_2 \Pi}.$$

Es sei ferner (Fig. 285) nach § 43, 1:

$$(5) \qquad x = x_0 + \alpha\xi, \quad y = y_0 + \beta\xi, \quad z = z_0 + \gamma\xi$$

eine Gerade g mit dem Anfangspunkt $P_0 = x_0, y_0, z_0$, den Richtungskosinus α, β, γ und dem Parameter ξ.

Setzt man die Werte (5) in die Gleichung (2) ein, so ergibt sich für den Parameter ξ des Schnittpunktes P der Geraden (5) mit der laufenden Ebene (2) die Gleichung:

$$(6) \quad \{X_1^0 + (A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma)\xi\} - \mu\{X_2^0 + (A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma)\xi\} = 0.$$

Für die Parameter der Schnittpunkte G_1 und G_2 mit den Grundebenen (1) ist insbesondere:

$$(7) \quad X_1^0 + (A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma)\xi = 0, \quad X_2^0 + (A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma)\xi = 0.$$

Die Gleichung (6) stellt aber nach § 9, (4) in laufendem Parameter μ eine Punktreihe mit den Grundpunkten (7) dar, welche hier das Ebenenbüschel (2) auf der Geraden (5) ausschneidet.

3. Beziehung der einfachen Teilungsverhältnisse. Für die Punktreihe (6) hat der Parameter μ des laufenden Punktes P nach § 9, (5) die Bedeutung:

$$(8) \qquad \mu = \frac{A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma}{A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma}\cdot\lambda', \quad \lambda' = \frac{G_1P}{G_2P}.$$

Setzt man hier den Wert (3) von μ ein, so folgt mit Rücksicht auf § 41, (5) und § 35, (1):

$$\lambda = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\,\frac{A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma}{A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma}\cdot\lambda' = \frac{\cos n_1 g}{\cos n_2 g}\cdot\lambda',$$

wenn n_1 und n_2 die positiven Normalen der Ebenen (1) sind.

Zwischen dem einfachen Teilungsverhältnis des laufenden Punktes P der Punktreihe in bezug auf die beiden Grundpunkte G_1 und G_2 und dem der entsprechenden Ebene Π in bezug auf die beiden Grundebenen Γ_1 und Γ_2 besteht daher die Beziehung:

$$(9) \qquad \frac{\sin \Gamma_1 \Pi}{\sin \Gamma_2 \Pi} = \frac{\cos n_1 g}{\cos n_2 g}\cdot\frac{G_1P}{G_2P}.$$

4. Beziehung der Doppelverhältnisse. Sind nun Π, Γ_0 irgend zwei Ebenen des Büschels und P, G_0 die entsprechenden Punkte, so

ist nach (9), da der Faktor $\cos n_1 g : \cos n_2 g$ nur von der Lage der Geraden g gegen die beiden Grundebenen abhängt:

$$\frac{\sin \Gamma_1 \Pi}{\sin \Gamma_2 \Pi} : \frac{\sin \Gamma_1 \Gamma_0}{\sin \Gamma_2 \Gamma_0} = \frac{G_1 P}{G_2 P} : \frac{G_1 G_0}{G_2 G_0},$$

oder mit der in § 4, (6) für die Doppelverhältnisse eingeführten Abkürzung:

$$(\Gamma_1 \Gamma_2 \Pi \Gamma_0) = (G_1 G_2 P G_0). \tag{10}$$

Da diese Gleichung bei festgehaltenen Γ_1, Γ_2, Γ_0 und G_1, G_2, G_0 identisch in Π und P gilt, so folgt nach § 6, **10** allgemein für vier Ebenen und Punkte:[25])

$$(\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4) = (P_1 P_2 P_3 P_4). \tag{11}$$

Liegen ein Ebenenbüschel und eine Punktreihe perspektiv, so ist das Doppelverhältnis von vier Ebenen Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 des Büschels stets gleich dem der vier entsprechenden Punkte P_1, P_2, P_3, P_4.

5. Andere Darstellung der zu einem Büschel perspektiven Punktreihe.[86]) Sind:

$$\begin{cases} X_1 = u_1 x + v_1 y + w_1 z + s_1 t, \\ X_2 = u_2 x + v_2 y + w_2 z + s_2 t, \end{cases} \tag{12}$$

die Gleichungen der Grundebenen eines Büschels, so ist nach § 47, **11**:

$$X_1 - \mu X_2 = 0 \tag{13}$$

die Gleichung der laufenden Ebene des Büschels.

Ist nun eine Gerade, die nicht durch die Achse des Büschels (13) geht, durch die beiden Gleichungen (§ 48, **1**):

$$\begin{cases} u_3 x + v_3 y + w_3 z + s_3 t = 0, \\ u_4 x + v_4 y + w_4 z + s_4 t = 0 \end{cases} \tag{14}$$

gegeben, so sind nach § 47, (15') die Gleichungen ihrer Schnittpunkte mit den Ebenen (12) in laufenden Ebenenkoordinaten u, v, w, s:

$$U_1 = \begin{vmatrix} u & v & w & s \\ u_1 & v_1 & w_1 & s_1 \\ u_3 & v_3 & w_3 & s_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 & s_4 \end{vmatrix} = 0, \quad U_2 = \begin{vmatrix} u & v & w & s \\ u_2 & v_2 & w_2 & s_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & s_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 & s_4 \end{vmatrix} = 0 \tag{15}$$

und ihres Schnittpunktes mit (13):

$$\begin{vmatrix} u & v & w & s \\ u_1 - \mu u_2 & v_1 - \mu v_2 & w_1 - \mu w_2 & s_1 - \mu s_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & s_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 & s_4 \end{vmatrix} = 0$$

oder mit den Abkürzungen (15):

$$U_1 - \mu U_2 = 0. \tag{16}$$

Eine zu dem Büschel (13) *perspektive Punktreihe hat somit die Gleichung* (16)*; eine Ebene des Büschels und ein Punkt der Reihe, die einander entsprechen, haben in beiden Gleichungen denselben Parameter* μ.

Daher besteht nach § 42, (27) und § 46, (13) auch zwischen den Doppelverhältnissen entsprechender Elemente die Gleichheit (11).

6. Zwei Punktreihen in perspektiver Lage zu einem Ebenenbüschel. Liegen zwei Punktreihen zu demselben Ebenenbüschel perspektiv, so werden sie selbst perspektiv aufeinander bezogen, indem entsprechende Punkte beider Punktreihen in derselben Ebene des Büschels liegen. Aus (11) folgt dann:

Liegen zwei Punktreihen zu demselben Ebenenbüschel perspektiv, so ist das Doppelverhältnis von vier Punkten P_i *der einen stets gleich dem der vier entsprechenden Punkte* P_i' *der andern* (vgl. § 5, 9):

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = (P_1' P_2' P_3' P_4'). \tag{17}$$

Sind die beiden Punktreihen parallel, so sind nach (9) schon die einfachen Teilungsverhältnisse entsprechender Punkte gleich:

$$\frac{P_1 P}{P_2 P} = \frac{P_1' P'}{P_2' P'}. \tag{18}$$

7. Zwei Ebenenbüschel in perspektiver Lage zu einer Punktreihe. Liegen zwei Ebenenbüschel zu derselben Punktreihe perspektiv, so werden sie selbst perspektiv aufeinander bezogen, indem entsprechende Ebenen durch denselben Punkt der Reihe gehen. Aus (11) folgt:

Liegen zwei Ebenenbüschel zu derselben Punktreihe perspektiv, so ist das Doppelverhältnis von vier Ebenen Π_i *des einen stets gleich dem der vier entsprechenden Ebenen* Π_i' *des andern:*

$$(\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4) = (\Pi_1' \Pi_2' \Pi_3' \Pi_4'). \tag{19}$$

Fig. 286.

8. Begriff der perspektiven Beziehung von Ebenenbüschel und Strahlbüschel. Ein Ebenenbüschel wird von einer beliebigen, nicht durch seine Achse gehenden Ebene in einem Strahlbüschel geschnitten, dessen Scheitelpunkt S auf der Achse q des Ebenenbüschels liegt. Beide Büschel sind *perspektiv aufeinander bezogen*, indem jede Ebene $A, B, \ldots, \Pi$ des ersteren einen Strahl $a, b, \ldots, p$ des letzteren bestimmt und umgekehrt (Fig. 286).

Die Beziehung zwischen den Ebenen Π und den Strahlen p ist *umkehrbar eindeutig.*

9. Gleichung des zu einem Ebenenbüschel perspektiven Strahlbüschels. Es sei nach § 40, (19):

$$(20)\qquad x = x_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta, \quad y = y_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \eta, \quad z = z_0 + \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta$$

die Parameterdarstellung einer Ebene, in der ein ebenes Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt $P_0 = x_0, y_0, z_0$ und den Achsen $\xi = \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\eta = \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ angenommen ist. Setzt man die Werte (20) in die Gleichung (2) ein, so ergibt sich für den Durchschnitt der Ebene (20) mit dem Ebenenbüschel (2) die Gleichung (vgl. (6)):

$$(21)\qquad \Xi_1 - \mu \Xi_2 = 0,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(22)\qquad \begin{cases} \Xi_1 = X_1{}^0 + (A_1\alpha_1 + B_1\beta_1 + C_1\gamma_1)\xi + (A_1\alpha_2 + B_1\beta_2 + C_1\gamma_2)\eta, \\ \Xi_2 = X_2{}^0 + (A_2\alpha_1 + B_2\beta_1 + C_2\gamma_1)\xi + (A_2\alpha_2 + B_2\beta_2 + C_2\gamma_2)\eta. \end{cases}$$

Die Gleichung (21) stellt aber nach § 18, (7) ein Strahlbüschel mit den Grundstrahlen $\Xi_1 = 0$ und $\Xi_2 = 0$ und dem Parameter μ dar. Jeder Strahl des Strahlbüschels hat denselben Parameter μ wie die entsprechende Ebene des Ebenenbüschels (2). Daher sind nach § 18, (25) und § 42, (27) auch die Doppelverhältnisse entsprechender Elemente gleich:

Liegen ein Ebenenbüschel und ein Strahlbüschel perspektiv, so ist das Doppelverhältnis von vier Ebenen Π_i des ersteren gleich dem Doppelverhältnis der vier entsprechenden Strahlen p_i des letzteren:

$$(23)\qquad (\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4) = (p_1 p_2 p_3 p_4).$$

10. Zweite Darstellung des zu einem Ebenenbüschel perspektiven Strahlbüschels.[83]) Die Ebenen eines Ebenenbüschels und die Strahlen eines perspektiven Strahlbüschels (Fig. 286) können wir als Bestandteile eines *Bündels* ansehen.

Seien nun:

$$(24)\qquad X_1 = u_1 x + v_1 y + w_1 z = 0, \quad X_2 = u_2 x + v_2 y + w_2 z = 0$$

die Gleichungen der Grundebenen eines Ebenenbüschels im Bündel, so ist nach § 49, (27):

$$(25)\qquad X_1 - \mu X_2 = 0$$

die Gleichung der laufenden Ebene des Büschels.

Ist nun eine beliebige nicht dem Büschel angehörige Ebene des Bündels:

$$(26)\qquad u_0 x + v_0 y + w_0 z = 0,$$

so sind die Schnittlinien derselben mit den Ebenen (24) in laufenden Ebenenkoordinaten u, v, w im Bündel nach § 49, (8'):

$$(27)\qquad U_1 = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_0 & v_0 & w_0 \end{vmatrix} = 0, \qquad U_2 = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_0 & v_0 & w_0 \end{vmatrix} = 0,$$

und ist die Schnittlinie der Ebene (26) mit der Ebene (25):

$$(28)\qquad \begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 - \mu u_2 & v_1 - \mu v_2 & w_1 - \mu w_2 \\ u_0 & v_0 & w_0 \end{vmatrix} = U_1 - \mu U_2 = 0.$$

Ein zu dem Ebenenbüschel (25) *perspektiver Strahlbüschel hat somit die Gleichung* (28); *eine Ebene und ein Strahl, die einander entsprechen, haben denselben Parameter* μ.

Daher sind nach § 49, (20) und (28) auch die Doppelverhältnisse entsprechender Elemente gleich, so daß wieder der Satz (23) folgt.

11. Gleichungen eines Strahlbüschels im Raume.

Sind (Fig. 287a):

$$(29)\qquad \begin{cases} X_1 = u_1 x + v_1 y + w_1 z + s_1 t = 0, \\ X_2 = u_2 x + v_2 y + w_2 z + s_2 t = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen der Grundebenen Γ_1 und Γ_2 eines Ebenenbüschels,

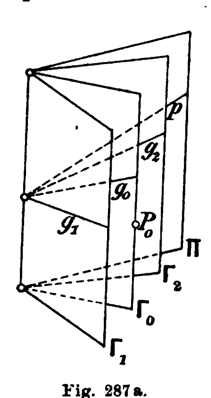
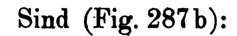


Fig. 287a.

und ist $P_0 = x_0, y_0, z_0, t_0$ ein zur Bestimmung der Einheitsebene Γ_0 gegebener Punkt, so ist nach § 47, (23) die Gleichung des Büschels:



Sind (Fig. 287b):

$$(29')\qquad \begin{cases} U_1 = x_1 u + y_1 v + z_1 w + t_1 s = 0, \\ U_2 = x_2 u + y_2 v + z_2 w + t_2 s = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen der Grundpunkte G_1 und G_2 einer Punktreihe, und

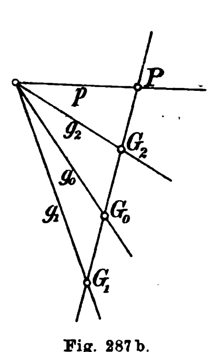


Fig. 287b.

ist $\Pi_0 = u_0, v_0, w_0, s_0$ eine zur Bestimmung des Einheitspunktes G_0 gegebene Ebene, so ist nach § 47, (23') die Gleichung der Punktreihe:

$$\frac{X_1}{X_1^0} - \mu \frac{X_2}{X_2^0} = 0,$$

wo der Parameter μ der laufenden Ebene Π das Doppelverhältnis:

$$\mu = (\Gamma_1 \Gamma_2 \Pi \Gamma_0)$$

bedeutet. Dies ist aber nach (23) zugleich das Doppelverhältnis der vier Strahlen g_1, g_2, p, g_0, in denen eine beliebige Ebene:

(30) $X = ux + vy + wz + st = 0$

die Ebenen $\Gamma_1, \Gamma_2, \Pi, \Gamma_0$ des Ebenenbüschels schneidet.

Daher stellen die beiden Gleichungen:

(31) $\frac{X_1}{X_1^0} - \mu \frac{X_2}{X_2^0} = 0, \quad X = 0$

in laufenden Punktkoordinaten x, y, z, t den Strahlbüschel im Raume dar, und zwar bedeutet der Parameter μ das Doppelverhältnis des laufenden Strahles p zu den beiden Grundstrahlen g_1, g_2 und dem Einheitsstrahl g_0:

(32) $\mu = (g_1 g_2 p g_0)$.

$$\frac{U_1}{U_1^0} - \mu \frac{U_2}{U_2^0} = 0,$$

wo der Parameter μ des laufenden Punktes P das Doppelverhältnis:

$$\mu = (G_1 G_2 P G_0)$$

bedeutet. Dies ist aber nach § 5, (3) zugleich das Doppelverhältnis der vier Strahlen g_1, g_2, p, g_0, die einen beliebigen Punkt:

(30') $U = xu + yv + zw + ts = 0$

mit den Punkten G_1, G_2, P, G_0 der Punktreihe verbinden.

Daher stellen die beiden Gleichungen:

(31') $\frac{U_1}{U_1^0} - \mu \frac{U_2}{U_2^0} = 0, \quad U = 0$

in laufenden Ebenenkoordinaten u, v, w, s den Strahlbüschel im Raume dar, und bedeutet der Parameter μ das Doppelverhältnis des laufenden Strahles p zu den beiden Grundstrahlen g_1, g_2 und dem Einheitsstrahl g_0:

(32') $\mu = (g_1 g_2 p g_0)$.

12. Parameterdarstellung der Koordinaten der Strahlen eines Strahlbüschels. Sind $q_{kl}^{(1)}$ und $q_{kl}^{(2)}$ die Achsenkoordinaten der Grundstrahlen $X_1 = 0$, $X = 0$ und $X_2 = 0$, $X = 0$ des Strahlbüschels:

$$X_1 - \mu X_2 = 0, \quad X = 0,$$

wo wir gegenüber (31) den Faktor $X_1^0 : X_2^0$ in μ aufnehmen (vgl. § 47, (25)), so sind die Achsenkoordinaten q_{kl} des laufenden Strahles p nach § 48, 5 die Unterdeterminanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} u_1 - \mu u_2 & v_1 - \mu v_2 & w_1 - \mu w_2 & s_1 - \mu s_2 \\ u & v & w & s \end{vmatrix},$$

also:

$$q_{23} = \begin{vmatrix} v_1 - \mu v_2 & w_1 - \mu w_2 \\ v & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v & w \end{vmatrix} - \mu \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v & w \end{vmatrix}, \quad \text{usw.}$$

Da aber $X_1 = 0$, $X = 0$ und $X_2 = 0$, $X = 0$ die Grundstrahlen des Büschels sind, so folgt:

Sind $q_{kl}^{(1)}$ und $q_{kl}^{(2)}$ die Achsenkoordinaten der Grundstrahlen eines Strahlbüschels im Raume, so sind:

$$(33)\qquad q_{kl} = q_{kl}^{(1)} - \mu q_{kl}^{(2)}$$

die Achsenkoordinaten des laufenden Strahles.

Sind $p_{kl}^{(1)}$ und $p_{kl}^{(2)}$ die Strahlenkoordinaten der Grundstrahlen eines Strahlbüschels im Raume, so sind:

$$(33')\qquad p_{kl} = p_{kl}^{(1)} - \mu p_{kl}^{(2)}$$

die Strahlenkoordinaten des laufenden Strahles.

Hier bedeutet μ das multiplizierte Teilungsverhältnis des laufenden Strahles gegen die beiden Grundstrahlen.[80])

Die Formeln (33′) geben, wenn die Grundstrahlen die Verbindungslinien des Punktes $x_0, y_0, z_0, 1$ mit den Punkten $a_1, b_1, c_1, 0$ und $a_2, b_2, c_2, 0$ sind, also ihre Strahlenkoordinaten $p_{kl}^{(1)}$ und $p_{kl}^{(2)}$ die Werte:

$$b_1 z_0 - c_1 y_0,\quad c_1 x_0 - a_1 z_0,\quad a_1 y_0 - b_1 x_0,\quad a_1,\ b_1,\ c_1$$
$$b_2 z_0 - c_2 y_0,\quad c_2 x_0 - a_2 z_0,\quad a_2 y_0 - b_2 x_0,\quad a_2,\ b_2,\ c_2$$

haben, und $-\mu = y' : x'$ gesetzt wird, die Formeln § 50, (18).

§ 53. Gleichungen und perspektive Lage von Bündeln und Feldern.

1. Gleichungen des Ebenenbündels und Punktfeldes im Raume.

Drei Ebenen $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, durch die der Mittelpunkt eines Ebenenbündels gegeben ist, heißen die *Grundebenen* des Bündels. Ihre Gleichungen seien in laufenden Punktkoordinaten x, y, z, t:

$$(1)\quad \begin{cases} X_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t = 0, \\ X_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t = 0, \\ X_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 t = 0. \end{cases}$$

Drei Punkte G_1, G_2, G_3, durch die die Ebene eines Punktfeldes gegeben ist, heißen die *Grundpunkte* des Feldes. Ihre Gleichungen seien in laufenden Ebenenkoordinaten u, v, w, s:

$$(1')\quad \begin{cases} U_1 = A_1 u + B_1 v + C_1 w + D_1 s = 0, \\ U_2 = A_2 u + B_2 v + C_2 w + D_2 s = 0, \\ U_3 = A_3 u + B_3 v + C_3 w + D_3 s = 0. \end{cases}$$

Dann folgt unmittelbar aus § 51, 6:

Die Gleichung:[106])

$$(2)\quad \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3 = 0$$

stellt bei wechselnden Werten der Parameter μ_1, μ_2, μ_3 die einzelnen Ebenen des Ebenenbündels in laufenden Punktkoordinaten x, y, z, t dar.

Die Gleichung:

$$(2')\quad \mu_1 U_1 + \mu_2 U_2 + \mu_3 U_3 = 0$$

stellt bei wechselnden Werten der Parameter μ_1, μ_2, μ_3 die einzelnen Punkte des Punktfeldes in laufenden Ebenenkoordinaten u, v, w, s dar.

Von den Parametern kommen nur die Verhältnisse $\mu_1 : \mu_2 : \mu_3$ in Betracht (vgl. § 47, (25) und (25′)).

2. Parameterdarstellung der Elemente des Ebenenbündels und Punktfeldes. Derselbe Satz kann nach § 47, **3** auch so ausgesprochen werden, wobei wir u_i, v_i, w_i, s_i; x_i, y_i, z_i, t_i für a_i, b_i, c_i, d_i; A_i, B_i, C_i, D_i schreiben:

Sind u_i, v_i, w_i, s_i $(i = 1, 2, 3)$ *die Koordinaten der drei Grundebenen eines Bündels, so sind die Koordinaten der laufenden Ebene in der Form darstellbar:*[107])

$$(3)\begin{cases} u = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3, \\ v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3, \\ w = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \mu_3 w_3, \\ s = \mu_1 s_1 + \mu_2 s_2 + \mu_3 s_3, \end{cases}$$

Sind x_i, y_i, z_i, t_i $(i = 1, 2, 3)$ *die Koordinaten der drei Grundpunkte eines Punktfeldes, so sind die Koordinaten des laufenden Punktes in der Form darstellbar:*

$$(3')\begin{cases} x = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3, \\ y = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3, \\ z = \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3, \\ t = \mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \mu_3 t_3, \end{cases}$$

(vgl. § 47, (26) und (26')). Die Formeln (3) enthalten, wenn die Grundebenen $u, v, w, s = 1, 0, 0, -x_0$; $0, 1, 0, -y_0$; $0, 0, 1, -z_0$ sind, den Sonderfall § 50, (10); die Formeln (3'), wenn die Grundpunkte $x, y, z, t = a_1, b_1, c_1, 0$; $a_2, b_2, c_2, 0$; $x_0, y_0, z_0, 1$ sind, den Sonderfall § 50 (8).

3. Gleichungen des Strahlbündels und Strahlfeldes.

Der durch die drei Grundebenen (1) bestimmte Punkt ist zugleich der Träger eines Strahlbündels. Die Schnittlinien:

$$\gamma_1 = \Gamma_2 \times \Gamma_3, \quad \gamma_2 = \Gamma_3 \times \Gamma_1, \quad \gamma_3 = \Gamma_1 \times \Gamma_2$$

der drei Ebenen (1) sollen als *Grundstrahlen* des Strahlbündels bezeichnet werden.

Die durch die drei Grundpunkte (1') bestimmte Ebene ist zugleich Trägerin eines Strahlfeldes. Die Verbindungslinien:

$$g_1 = G_2 G_3, \quad g_2 = G_3 G_1, \quad g_3 = G_1 G_2$$

der drei Punkte (1') sollen als *Grundstrahlen* des Strahlfeldes bezeichnet werden.

Ein gegebener Strahl q des Strahlbündels bestimmt zwei Ebenen (vgl. § 51, (7)):

$$(4) \qquad \nu_1 X_3 - \nu_3 X_1 = 0, \quad \nu_2 X_1 - \nu_1 X_2 = 0,$$

die ihn mit den Kanten γ_2 oder $X_3 = 0$, $X_1 = 0$ und γ_3 oder $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ verbinden; ist nämlich x_0, y_0, z_0, t_0 ein Punkt des Strahles q, so hat man die Verhältnisse der Parameter ν_1, ν_2, ν_3 der Gleichungen (4) aus:

$$\nu_3 : \nu_1 = X_3^0 : X_1^0, \quad \nu_1 : \nu_2 = X_1^0 : X_2^0$$

zu ermitteln. Umgekehrt bestimmen zwei Ebenen (4) mit gegebenen

Werten von $\nu_1 : \nu_2 : \nu_3$ einen Strahl q des Bündels als ihren Durchschnitt (vgl. § 43, (5)). Wir nehmen noch eine dritte Ebene:

(5) $$\nu_3 X_2 - \nu_2 X_3 = 0$$

hinzu, die nach § 51, (7) durch die Schnittlinie der Ebenen (4) geht, da identisch:

$$\nu_1(\nu_3 X_2 - \nu_2 X_3) + \nu_2(\nu_1 X_3 - \nu_3 X_1) + \nu_3(\nu_2 X_1 - \nu_1 X_2) = 0.$$

Es geschieht dies nicht bloß der Symmetrie wegen, sondern auch zur notwendigen Ergänzung der Gleichungen (4) im Falle $\nu_1 = 0$. Mit Hinzufügung des dualen Satzes können wir also sagen:

Die Gleichungen:

(6) $X_1 : X_2 : X_3 = \nu_1 : \nu_2 : \nu_3$

stellen bei wechselnden Werten der Parameter ν_1, ν_2, ν_3 die einzelnen Strahlen des Strahlbündels in laufenden Punktkoordinaten x, y, z, t dar.

Die Gleichungen:

(6′) $U_1 : U_2 : U_3 = \nu_1 : \nu_2 : \nu_3$

stellen bei wechselnden Werten der Parameter ν_1, ν_2, ν_3 die einzelnen Strahlen des Strahlfeldes in laufenden Ebenenkoordinaten u, v, w, s dar.

4. Die Parameterdarstellung der Elemente des Strahlbündels oder Strahlfeldes. Die Achsenkoordinaten der Grundstrahlen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ des Strahlbündels sind nach § 51, (5):

$$q_{23}^{(1)} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \ldots \quad q_{23}^{(2)} = \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}, \ldots \quad q_{23}^{(3)} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \ldots,$$

die des Strahles (4) ebenso:

$$q_{23} = \begin{vmatrix} \nu_1 b_3 - \nu_3 b_1 & \nu_1 c_3 - \nu_3 c_1 \\ \nu_2 b_1 - \nu_1 b_2 & \nu_2 c_1 - \nu_1 c_2 \end{vmatrix} = \nu_1(\nu_1 q_{23}^{(1)} + \nu_2 q_{23}^{(2)} + \nu_3 q_{23}^{(3)}), .$$

In gleicher Weise folgt allgemein:[108])

Sind $q_{kl}^{(1)}, q_{kl}^{(2)}, q_{kl}^{(3)}$ die Achsenkoordinaten der drei Grundstrahlen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, eines Strahlbündels, so sind die Achsenkoordinaten des laufenden Strahles des Bündels:

(7) $q_{kl} = \nu_1 q_{kl}^{(1)} + \nu_2 q_{kl}^{(2)} + \nu_3 q_{kl}^{(3)}$.

Sind $p_{kl}^{(1)}, p_{kl}^{(2)}, p_{kl}^{(3)}$ die Strahlenkoordinaten der drei Grundstrahlen g_1, g_2, g_3 eines Strahlfeldes, so sind die Strahlenkoordinaten des laufenden Strahles des Feldes:

(7′) $p_{kl} = \nu_1 p_{kl}^{(1)} + \nu_2 p_{kl}^{(2)} + \nu_3 p_{kl}^{(3)}$.

Die Formeln (7) geben, wenn die drei Grundstrahlen die Schnittlinien der drei Ebenen $u, v, w, s = 1, 0, 0, -x_0;\ 0, 1, 0, -y_0;\ 0, 0, 1, -z_0$ sind, also ihre Achsenkoordinaten $q_{kl}^{(1)}, q_{kl}^{(2)}, q_{kl}^{(3)}$ die Werte:

$$1, 0, 0, 0, -z_0, y_0; \quad 0, 1, 0, z_0, 0, -x_0; \quad 0, 0, 1, -y_0, x_0, 0$$

haben, und $\nu_1 = x'$, $\nu_2 = y'$, $\nu_3 = z'$ gesetzt wird, die Formeln § 50, (11.

Die Formeln (7') geben, wenn die drei Grundstrahlen die Verbindungslinien der drei Punkte $x, y, z, t = a_1, b_1, c_1, 0; a_2, b_2, c_2, 0; x_0, y_0, z_0, 1$ sind, also ihre Strahlenkoordinaten $p_{kl}^{(1)}, p_{kl}^{(2)}, p_k^{(3)}$ die Werte:

$$\begin{array}{llllll} b_2 z_0 - c_2 y_0, & c_2 x_0 - a_2 z_0, & a_2 y_0 - b_2 x_0, & a_2, & b_2, & c_2, \\ b_1 z_0 - c_1 y_0, & c_1 x_0 - a_1 z_0, & a_1 y_0 - b_1 x_0, & a_1, & b_1, & c_1, \\ b_1 c_2 - b_2 c_1, & c_1 a_2 - c_2 a_1, & a_1 b_2 - a_2 b_1, & 0, & 0, & 0 \end{array}$$

haben, und $\nu_1 = u'$, $\nu_2 = -v'$, $\nu_3 = s'$ gesetzt wird, die Formeln § 50, (9).

5. Begriff der perspektiven Lage von Bündel und Feld. Wird ein Bündel von Ebenen und Strahlen von einer nicht durch seinen Mittelpunkt gehenden Ebene geschnitten, so wird das von der Ebene getragene Feld von Strahlen und Punkten „*perspektiv*" auf das Bündel bezogen und umgekehrt (vgl. § 5, **1**; § 52, **1**).

Jeder Ebene des Bündels entspricht der mit ihr vereinigt liegende Strahl des Feldes, jedem Strahl des Bündels der mit ihm vereinigt liegende Punkt des Feldes und umgekehrt.

6. Analytischer Ausdruck der perspektiven Beziehung. Das Bündel mit dem Scheitel S und den Grundebenen $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ werde von einer beliebigen Ebene Σ, die nicht durch S geht und die Gleichung:

$$X_4 = a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 t = 0 \tag{8}$$

hat, geschnitten (Fig. 288).

Verstehen wir unter A_i, B_i, C_i, D_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, wie in § 51, 5, die Unterdeterminanten der Determinante D der Koeffizienten in (1) und (8), so haben die drei Punkte G_1, G_2, G_3, in denen die Kanten $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ (Fig. 288) die Ebene Σ treffen, nach § 51, 7 gerade die Gleichungen (1').

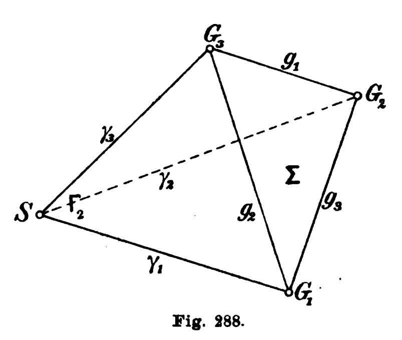


Fig. 288.

Die drei Grundpunkte G_1, G_2, G_3 des Feldes Σ liegen also mit den drei Grundstrahlen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ des Bündels und daher auch die drei Grundstrahlen g_1, g_2, g_3, des Feldes mit den drei Grundebenen $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ des Bündels vereinigt.

Die Koordinaten u, v, w, s einer durch ihre Parameter μ_1, μ_2, μ_3 gegebenen Ebene (2) des Bündels sind wie in (3):

$$(9)\qquad \begin{cases} u = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3, \\ v = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3, \\ w = \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 + \mu_3 c_3, \\ s = \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 + \mu_3 d_3. \end{cases}$$

Durch Addition der mit A_1, B_1, C_1, D_1 oder A_2, B_2, C_2, D_2 oder A_3, A_3, C_3, D_3 multiplizierten Gleichungen (9) folgt nun mit Rücksicht auf (1′) (Anm. 1, III, (17)):

$$U_1 = D\mu_1, \quad U_2 = D\mu_2, \quad U_3 = D\mu_3.$$

Die Koordinaten der Ebene μ_1, μ_2, μ_3 des Bündels genügen also den Gleichungen:

$$U_1 : U_2 : U_3 = \mu_1 : \mu_2 : \mu_3;$$

die Ebene geht daher immer dann und nur dann durch den Strahl (6′), wenn:

$$(10)\qquad \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = \nu_1 : \nu_2 : \nu_3.$$

Ebenso gilt die duale Betrachtung, also:

Sind die Ebenen und Strahlen eines Bündels bezüglich durch die Gleichungen:

$$(11)\quad \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3 = 0, \qquad (12)\quad X_1 : X_2 : X_3 = \nu_1 : \nu_2 : \nu_3$$

in Punktkoordinaten x, y, z, t gegeben, so sind die Strahlen und Punkte eines perspektiven Feldes entsprechend durch die Gleichungen:

$$(13)\quad U_1 : U_2 : U_3 = \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 \qquad (14)\quad \nu_1 U_1 + \nu_2 U_2 + \nu_3 U_3 = 0$$

in Ebenenkoordinaten u, v, w, s dargestellt.

Zu gleichen Werten der Parameter $\mu_1 : \mu_2 : \mu_3$ gehören entsprechende Ebenen des Bündels und Strahlen des Feldes, zu gleichen Werten der Parameter $\nu_1 : \nu_2 : \nu_3$ entsprechende Strahlen des Bündels und Punkte des Feldes (vgl. § 52, (13) und (16); (25) und (28)).

Bei vereinigter Lage des Koordinatendreiecks der *unendlich fernen Ebene* in § 49, 2; 4 und des Koordinatendreikants des *Bündels* in § 49, 5; 6 haben auch dort *perspektiv entsprechende Elemente* der unendlich fernen Ebene und des Bündels gleiche und gleichbezeichnete Parameter (Koordinaten) x, y, z für Punkte und Strahlen und u, v, w für Strahlen und Ebenen.[26])

§ 54. Die Transversalensätze für die räumliche Ecke.

1. Analytische Bestimmung der Ecke. Die Richtungskosinus der drei gerichteten Kanten e_1, e_2, e_3, einer Ecke (eines Dreiflachs oder Dreikants), deren Scheitel der Anfangspunkt O des rechtwinkligen

Koordinatensystems $Oxyz$ ist, seien in bezug auf dieses a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 (Fig. 289).

Die Gleichungen der Kanten sind dann nach § 49, **9** in laufenden Ebenenkoordinaten u, v, w im Bündel, und zwar in der Normalform:

$$(1)\qquad \begin{cases} U_1 = a_1 u + b_1 v + c_1 w = 0, \\ U_2 = a_2 u + b_2 v + c_2 w = 0, \\ U_3 = a_3 u + b_3 v + c_3 w = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen der Seitenflächen $\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2, \mathsf{E}_3$, der Ecke sind dann nach § 49, (8) in laufenden Strahlenkoordinaten x, y, z im Bündel:

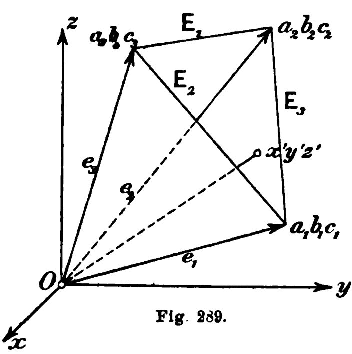


Fig. 289.

$$(2)\qquad \begin{cases} X_1 = A_1 x + B_1 y + C_1 z = 0, \\ X_2 = A_2 x + B_2 y + C_2 z = 0, \\ X_3 = A_3 x + B_3 y + C_3 z = 0, \end{cases}$$

wo unter $A_1, B_1, \ldots, C_3$ die Unterdeterminante der nicht verschwindenden Determinante der Koeffizienten $a_1, b_1, \ldots, c_3$ zu verstehen sind (§ 47, (17)).

Um die inneren und äußeren Winkelräume zwischen den Seitenflächen (2) zu bestimmen, geben wir einen *im Inneren der räumlichen Ecke* liegenden Strahl x', y', z' (Fig. 289). Die diesen Strahl enthaltenden Winkelräume zwischen zwei Ebenen (2) sollen als *äußere* im Sinne von § 49, **16** gelten (vgl. § 25, **1**).

Danach setzen wir zur Abkürzung (vgl. § 49, (28); (29)) mit $i = 1, 2, 3$:

$$(3)\qquad K_i = \varepsilon_i \sqrt{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2}, \quad \varepsilon_i = -\operatorname{sign.}(A_i x' + B_i y' + C_i z').$$

2. Transversalebenen und Teilstrahlen. Die Gleichungen dreier Transversalebenen $\mathsf{T}_1, \mathsf{T}_2, \mathsf{T}_3$ (Fig. 290a), welche die Winkel der Ebenen $\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2, \mathsf{E}_3$ in den Sinusverhältnissen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ teilen, so daß:

$$(4)\qquad \frac{\sin \mathsf{E}_2\mathsf{T}_1}{\sin \mathsf{E}_3\mathsf{T}_1} = \lambda_1, \quad \frac{\sin \mathsf{E}_3\mathsf{T}_2}{\sin \mathsf{E}_1\mathsf{T}_2} = \lambda_2, \quad \frac{\sin \mathsf{E}_1\mathsf{T}_3}{\sin \mathsf{E}_2\mathsf{T}_3} = \lambda_3,$$

lauten nach § 49, (27); (28) in laufenden Strahlenkoordinaten x, y, z:

$$(5)\qquad X_2 - \mu_1 X_3 = 0, \quad X_3 - \mu_2 X_1 = 0, \quad X_1 - \mu_3 X_2 = 0.$$

Hierin ist:

$$(6)\qquad \mu_1 = \frac{K_2}{K_3}\lambda_1, \quad \mu_2 = \frac{K_3}{K_1}\lambda_2, \quad \mu_3 = \frac{K_1}{K_2}\lambda_3.$$

Die Gleichungen dreier Teilstrahlen t_1, t_2, t_3, (Fig. 290b), welche

die Winkel der gerichteten Kanten e_1, e_2, e_3 in den Sinusverhältnissen λ_1, λ_2, λ_3 teilen, so daß:

$$(7) \qquad \frac{\sin e_2 t_1}{\sin e_3 t_1} = \lambda_1, \quad \frac{\sin e_3 t_2}{\sin e_1 t_2} = \lambda_2, \quad \frac{\sin e_1 t_3}{\sin e_2 t_3} = \lambda_3,$$

sind nach § 49, (17) in laufenden Ebenenkoordinaten u, v, w, im Bündel:

$$(8) \qquad U_2 - \lambda_1 U_3 = 0, \quad U_3 - \lambda_2 U_1 = 0, \quad U_1 - \lambda_3 U_2 = 0.$$

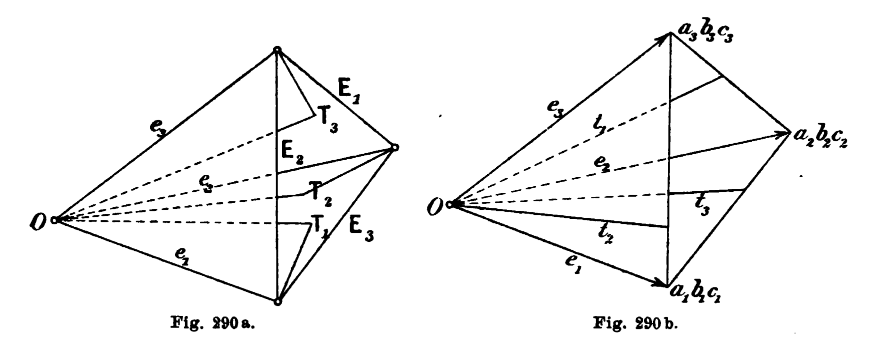


Fig. 290 a. Fig. 290 b.

3. Bedingungen für drei Transversalebenen durch einen Strahl und drei Teilstrahlen in einer Ebene. Wenn die drei Transversalebenen (5) alle durch einen Strahl $p_0 = x_0, y_0, z_0$ gehen, so haben die Parameter μ_1, μ_2, μ_3 die Werte:

$$(9) \qquad \mu_1 = X_2^0 : X_3^0, \quad \mu_2 = X_3^0 : X_1^0, \quad \mu_3 = X_1^0 : X_2^0,$$

wo X_1^0, X_2^0, X_3^0 die für den Strahl p_0 gebildeten Ausdrücke X_1, X_2, X_3 sind. Daher ist (vgl. (6)):

$$(10) \qquad \mu_1 \mu_2 \mu_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1.$$

Ist umgekehrt bei gegebenen μ_1, μ_2, μ_3 die Bedingung (10) erfüllt, so kann man (vgl. § 25, 4) μ_1, μ_2, μ_3 durch drei Konstanten X_1^0, X_2^0, X_3^0 in der Form (9) darstellen; gleichzeitig gibt es stets einen bestimmten Strahl x_0, y_0, z_0, der den Gleichungen:

$$(11) \qquad A_i x_0 + B_i y_0 + C_i z_0 = \varrho X_i^0$$

mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ genügt und daher auch den mit den Parametern (9) gebildeten Gleichungen (5). Die drei Ebenen (5) gehen daher alle durch diesen Strahl.

In entsprechender Weise ergibt sich der *duale* Satz, wobei die Normalform der Gleichungen (1) *nicht* mehr wesentlich ist. Denn haben diese nicht die Normalform, so treten in (8) für die drei Parameter λ_1, λ_2, λ_3 drei neue Parameter μ_1, μ_2, μ_3 ein, die sich, wie in (6), von λ_1, λ_2, λ_3 nur um konstante Faktoren von der Form $K_2' : K_3'$,

$K_3' : K_1'$, $K_1' : K_2'$ unterscheiden (vgl. § 49, (20)), also auf das Produkt, wie in (10), ohne Einfluß sind.

4. Die Transversalensätze. Wir sprechen daher das gefundene Resultat also aus (vgl. § 25, 5):

I. *Die drei Transversalebenen:*

(12) $$\begin{cases} X_2 - \mu_1 X_3 = 0, \quad X_3 - \mu_2 X_1 = 0, \\ X_1 - \mu_3 X_2 = 0 \end{cases}$$

des Dreiflachs $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$ *gehen immer dann und nur dann durch einen Strahl, wenn:*

(13) $$\mu_1 \mu_2 \mu_3 = 1.$$

II. *Die drei Transversalebenen* (12) *gehen immer dann und nur dann durch einen Strahl* p_0, *wenn die Parameter* μ_1, μ_2, μ_3 *von den Verhältnissen dreier Konstanten* X_1^0, X_2^0, X_3^0 *in der Weise:*

(14) $$\begin{cases} \mu_1 = \dfrac{X_2^0}{X_3^0}, \quad \mu_2 = \dfrac{X_3^0}{X_1^0}, \\ \mu_3 = \dfrac{X_1^0}{X_2^0} \end{cases}$$

abhängen. Zwischen diesen Konstanten und den Koordinaten x_0, y_0, z_0 *des Strahles* p_0 *bestehen die Beziehungen* ($i = 1, 2, 3$):

(15) $$A_i x_0 + B_i y_0 + C_i z_0 = \varrho X_i^0.$$

I.′ *Die drei Teilstrahlen:*

(12′) $$\begin{cases} U_2 - \mu_1 U_3 = 0, \quad U_3 - \mu_2 U_1 = 0, \\ U_1 - \mu_3 U_2 = 0 \end{cases}$$

des Dreikants $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ *liegen immer dann und nur dann in einer Ebene, wenn:*

(13′) $$\mu_1 \mu_2 \mu_3 = 1.$$

II′. *Die drei Teilstrahlen* (12′) *liegen immer dann und nur dann in einer Ebene* Π_0, *wenn die Parameter* μ_1, μ_2, μ_3 *von den Verhältnissen dreier Konstanten* U_1^0, U_2^0, U_3^0 *in der Weise:*

(14′) $$\begin{cases} \mu_1 = \dfrac{U_2^0}{U_3^0}, \quad \mu_2 = \dfrac{U_3^0}{U_1^0}, \\ \mu_3 = \dfrac{U_1^0}{U_2^0} \end{cases}$$

abhängen. Zwischen diesen Konstanten und den Koordinaten u_0, v_0, w_0, *der Ebene* Π_0 *bestehen die Beziehungen* ($i = 1, 2, 3$):

(15′) $$a_i u_0 + b_i v_0 + c_i w_0 = \varrho U_i^0.$$

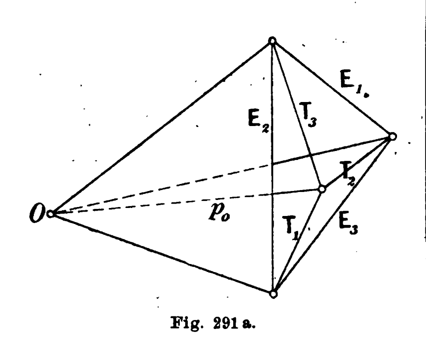


Fig. 291 a.

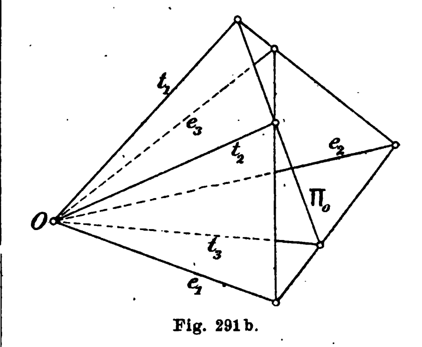


Fig. 291 b.

Endlich unabhängig vom Koordinatensystem:[84])

III. *Drei Transversalebenen* $\mathsf{T}_1, \mathsf{T}_2, \mathsf{T}_3$ *der Ecke* $\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2, \mathsf{E}_3$ (Fig. 291a) *gehen immer dann und nur dann durch einen Strahl* p_0, *wenn:*

$$(16)\quad \frac{\sin \mathsf{E}_2 \mathsf{T}_1}{\sin \mathsf{E}_3 \mathsf{T}_1} \cdot \frac{\sin \mathsf{E}_3 \mathsf{T}_2}{\sin \mathsf{E}_1 \mathsf{T}_2} \cdot \frac{\sin \mathsf{E}_1 \mathsf{T}_3}{\sin \mathsf{E}_2 \mathsf{T}_3} = 1.$$

III'. *Drei Teilstrahlen* t_1, t_2, t_3 *der Ecke* e_1, e_2, e_3 (Fig. 291b) *liegen immer dann und nur dann in einer Ebene* Π_0, *wenn:*

$$(16')\quad \frac{\sin e_2 t_1}{\sin e_3 t_1} \cdot \frac{\sin e_3 t_2}{\sin e_1 t_2} \cdot \frac{\sin e_1 t_3}{\sin e_2 t_3} = 1.$$

5. Die Halbierungsebenen und Halbierungslinien der Winkel der Flächen und Kanten. Die Halbierungsebenen der inneren *Flächenwinkel* der räumlichen Ecke, der äußeren Halbierungsebenen im Sinne von § 54, **1**, entsprechen den Werten $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$, die der äußeren Flächenwinkel der Ecke den Werten $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -1$ in (4) (vgl. § 25, **6**). Daher folgt aus (16):

Die Halbierungsebenen der drei inneren Flächenwinkel, ferner die Halbierungsebenen zweier äußeren und des dritten inneren Flächenwinkels schneiden sich jedesmal in einer Geraden.

Die inneren Halbierungslinien der *Kantenwinkel* entsprechen nach § 35, **4** den Werten $\lambda_1' = -1$, $\lambda_2' = -1$, $\lambda_3' = -1$, die äußeren den Werten $\lambda_1' = 1$, $\lambda_2' = 1$, $\lambda_3' = 1$ des Teilungsverhältnisses in (7). Daher folgt aus (16'):

Die Halbierungslinien der drei äußeren Kantenwinkel, ferner die Halbierungslinien zweier äußeren und des dritten inneren Kantenwinkels liegen jedesmal in einer Ebene.

6. Übergang auf das sphärische Dreieck. Wenn um den Scheitel O der Ecke eine Kugel beschrieben wird (Fig. 292), so wird diese von den Seitenflächen der Ecke in größten Kreisen $\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2, \mathsf{E}_3$ und von den Kanten der Ecke in je zwei diametralen Punkten e_1, e_1'; e_2, e_2'; e_3, e_3' geschnitten. Den Transversalebenen $\mathsf{T}_1, \mathsf{T}_2, \mathsf{T}_3$ entsprechen größte „Transversalkreise", die bezüglich durch die Punkte e_1 und e_1', e_2 und e_2', e_3 und e_3' gehen; den Teilstrahlen t_1, t_2, t_3 entsprechen je zwei diametrale Teilpunkte t_1, t_1'; t_2, t_2'; t_3, t_3'.

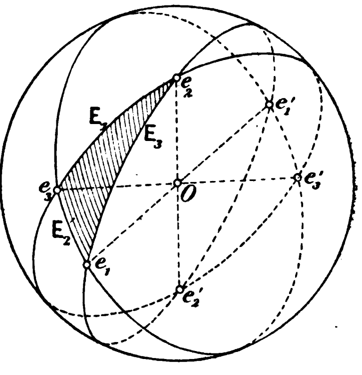


Fig. 292.

Unter der Bedingung (16) gehen die Transversalkreise $\mathsf{T}_1, \mathsf{T}_2, \mathsf{T}_3$ je alle drei durch zwei diametrale Punkte; unter der Bedingung (16') liegen die Teilpunktpaare t_1, t_1'; t_2, t_2'; t_3, t_3' alle auf einem größten Kreise.

Insbesondere *gehen nach* § 54, **5** *die drei größten Kreise, welche*

die drei inneren oder zwei äußere und den dritten inneren Winkel eines sphärischen Dreiecks halbieren, jedesmal durch zwei diametrale Punkte.

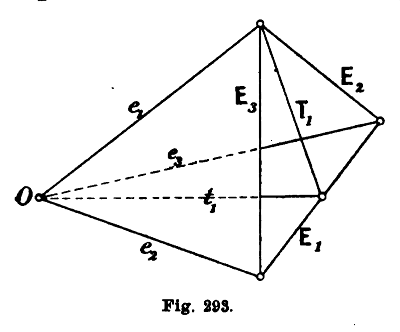


Fig. 293.

Nennen wir ferner Außenseite (Komplement) einer Seite $e_2 e_3$ des sphärischen Dreiecks $e_1 e_2 e_3$ den Bogen $e_2 e_3'$ oder $e_3 e_2'$ (Fig. 292), der die Seite zu einem Halbkreis ergänzt, so folgt aus § 54, 5:

Die Halbierungspunkte dreier Außenseiten eines sphärischen Dreiecks sowie die Halbierungspunkte zweier Seiten und der dritten Außenseite liegen jedesmal in einem größten Kreise.

7. Übergang von den Transversalebenen auf die Teilstrahlen. Die durch die Kante e_1 gehende Transversalebene:

$$X_2 + \mu_1 X_3 = 0$$

(T_1 in Fig. 293) schneidet die Gegenfläche:

$$X_1 = 0$$

in einem Strahle t_1, der nach § 49, (8′) die Gleichung hat:

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ A_2 + \mu_1 A_3 & B_2 + \mu_1 B_3 & C_2 + \mu_1 C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix} = 0$$

oder (Anm. 1, II, (5)) mit Benutzung der Abkürzungen (1):

$$U_3 - \mu_1 U_2 = 0.$$

In gleicher Weise folgt allgemein:

Die Transversalebenen:

$$(17)\quad \begin{cases} X_2 + \mu_1 X_3 = 0, \ X_3 + \mu_2 X_1 = 0, \\ X_1 + \mu_3 X_2 = 0 \end{cases}$$

schneiden die Gegenflächen in den Strahlen:

$$(18)\quad \begin{cases} U_2 - \frac{1}{\mu_1} U_3 = 0, \\ U_3 - \frac{1}{\mu_2} U_1 = 0, \\ U_1 - \frac{1}{\mu_3} U_2 = 0. \end{cases}$$

Die Teilstrahlen:

$$(17')\quad \begin{cases} U_2 + \mu_1 U_3 = 0, \ U_3 + \mu_2 U_1 = 0, \\ U_1 + \mu_3 U_2 = 0 \end{cases}$$

werden mit den Gegenkanten durch die Ebenen verbunden:

$$(18')\quad \begin{cases} X_2 - \frac{1}{\mu_1} X_3 = 0, \\ X_3 - \frac{1}{\mu_2} X_1 = 0, \\ X_1 - \frac{1}{\mu_3} X_2 = 0. \end{cases}$$

8. Zweite Form der Transversalensätze.

Die drei Ebenen (18′) gehen

Die drei Strahlen (18) liegen

nach § 54, **4** II durch einen Strahl p_0, wenn:

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\mu_1} = \dfrac{X_2^0}{X_3^0}, & \dfrac{1}{\mu_2} = \dfrac{X_3^0}{X_1^0}, \\ \dfrac{1}{\mu_3} = \dfrac{X_1^0}{X_2^0}. \end{cases}$$

nach § 54, **4** II' in einer Ebene, wenn:

$$(19')\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\mu_1} = \dfrac{U_2^0}{U_3^0}, & \dfrac{1}{\mu_2} = \dfrac{U_3^0}{U_1^0}, \\ \dfrac{1}{\mu_3} = \dfrac{U_1^0}{U_2^0}. \end{cases}$$

Wir erhalten daher die Sätze:

IV. *Die Verbindungsebenen der Teilstrahlen:*

$$(20)\quad \begin{cases} U_2 + \mu_1 U_3 = 0, \; U_3 + \mu_2 U_1 = 0, \\ U_1 + \mu_3 U_2 = 0 \end{cases}$$

mit den Gegenkanten gehen alle durch einen Strahl, wenn die Parameter μ_1, μ_2, μ_3 *von drei Konstanten* X_1^0, X_2^0, X_3^0 *in der Weise* (19) *abhängen.*

Die Koordinaten x_0, y_0, z_0 des gemeinsamen Strahles p_0 stehen mit diesen Konstanten in der Beziehung:

$$(21)\quad \begin{cases} A_i x_0 + B_i y_0 + C_i z_0 = \varrho X_i^0, \\ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Nach (19) ist $\mu_1 \mu_2 \mu_3 = 1$, während die negativen Parameter von (20), wie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ in § 54, **2** die Bedeutung (7) haben. Daher folgt wie in § 54, **3**:

V. *Die Verbindungsebenen* $\mathsf{T}_1, \mathsf{T}_2, \mathsf{T}_3$ *dreier Teilstrahlen* t_1, t_2, t_3 *der Ecke mit den Gegenkanten* e_1, e_2, e_3 *gehen durch einen Strahl immer dann und nur dann, wenn:*

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin e_2 t_1}{\sin e_3 t_1} \cdot \dfrac{\sin e_3 t_2}{\sin e_1 t_2} \cdot \\ \dfrac{\sin e_1 t_3}{\sin e_2 t_3} = -1. \end{cases}$$

IV'. *Die Schnittlinien der Transversalebenen:*

$$(20')\quad \begin{cases} X_2 + \mu_1 X_3 = 0, \; X_3 + \mu_2 X_1 = 0, \\ X_1 + \mu_3 X_2 = 0 \end{cases}$$

mit den Gegenflächen liegen alle in einer Ebene, wenn die Parameter μ_1, μ_2, μ_3 *von drei Konstanten* U_1^0, U_2^0, U_3^0 *in der Weise* (19') *abhängen.*

Die Koordinaten u_0, v_0, w_0 der gemeinsamen Ebene stehen mit den Konstanten in der Beziehung:

$$(21')\quad \begin{cases} a_i u_0 + b_i v_0 + c_i w_0 = \varrho U_i^0, \\ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Nach (19') ist $\mu_1 \mu_2 \mu_3 = 1$, während die negativen Parameter von (20'), wie in § 54, **2**, die Bedeutung (6); (4) haben. Daher folgt wie in § 54, **3**:

V'. *Die Schnittlinien* t_1, t_2, t_3 *dreier Transversalebenen* T_1, T_2, T_3 *der Ecke mit den Gegenflächen* $\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2, \mathsf{E}_3$ *liegen in einer Ebene immer dann und nur dann, wenn:*

$$(22')\quad \begin{cases} \dfrac{\sin \mathsf{E}_2 \mathsf{T}_1}{\sin \mathsf{E}_3 \mathsf{T}_1} \cdot \dfrac{\sin \mathsf{E}_3 \mathsf{T}_2}{\sin \mathsf{E}_1 \mathsf{T}_2} \cdot \\ \dfrac{\sin \mathsf{E}_1 \mathsf{T}_3}{\sin \mathsf{E}_2 \mathsf{T}_3} = -1. \end{cases}$$

9. Harmonikalebene und Harmonikalstrahl.

Sei $p_0 = x_0, y_0, z_0$, ein gegebener Strahl. Sind dann:

Sei $\Pi_0 = u_0, v_0, w_0$ eine gegebene Ebene. Sind dann:

$$(23)\ \begin{cases} X_2 - \mu_1 X_3 = 0, \ X_3 - \mu_2 X_1 = 0, \\ X_1 - \mu_3 X_2 = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen seiner Verbindungsebenen T_1, T_2, T_3 mit den Kanten der Ecke, so ist nach § 54, 4, II:

$$(24)\ \begin{cases} \mu_1 = \frac{X_2^0}{X_3^0}, \quad \mu_2 = \frac{X_3^0}{X_1^0}, \\ \mu_3 = \frac{X_1^0}{X_2^0}, \end{cases}$$

wo:

$$(25)\ X_i^0 = A_i x_0 + B_i y_0 + C_i z_0.$$

Die vierten harmonischen Ebenen T_1', T_2', T_3' durch die Kanten e_1, e_2, e_3 bezüglich zu E_2, E_3, T_1, zu E_3, E_1, T_2, zu E_1, E_2, T_3 sind nach § 49, (28) (vgl. § 42, (29)):

$$(26)\ \begin{cases} X_2 + \mu_1 X_3 = 0, \ X_3 + \mu_2 X_1 = 0, \\ X_1 + \mu_3 X_2 = 0. \end{cases}$$

Damit die Schnittlinien t_1', t_2', t_3' dieser drei Ebenen T_1', T_2', T_3' mit den Gegenflächen E_1, E_2, E_3 in einer Ebene $\Pi_0 = u_0, u_0, w_0$ liegen, müssen nach § 54, 4, IV′ die Parameter μ_1, μ_2, μ_3 von drei Konstanten U_1^0, U_2^0, U_3^0 in der Weise abhängen:

$$(27)\ \begin{cases} \mu_1 = \frac{U_3^0}{U_2^0}, \quad \mu_2 = \frac{U_1^0}{U_3^0}, \\ \mu_3 = \frac{U_2^0}{U_1^0} \end{cases}$$

und zugleich für die Ebene u_0, v_0, w_0 die Gleichungen (21′) bestehen.

Das erstere ist nach (24) der Fall; man hat nur:

$$(28)\ \begin{cases} U_1^0 = \frac{1}{X_1^0}, \quad U_2^0 = \frac{1}{X_2^0}, \\ U_3^0 = \frac{1}{X_3^0} \end{cases}$$

$$(23')\ \begin{cases} U_2 - \mu_1 U_3 = 0, \ U_3 - \mu_2 U_1 = 0, \\ U_1 - \mu_3 U_2 = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen ihrer Schnittlinien t_1, t_2, t_3 mit den Seitenflächen der Ecke, so ist nach § 54, 4, II′:

$$(24')\ \begin{cases} \mu_1 = \frac{U_2^0}{U_3^0}, \quad \mu_2 = \frac{U_3^0}{U_1^0}, \\ \mu_3 = \frac{U_1^0}{U_2^0}, \end{cases}$$

wo:

$$(25')\ U_i^0 = a_i u_0 + b_i v_0 + c_i w_0.$$

Die vierten harmonischen Strahlen t_1', t_2', t_3' in den Seitenflächen E_1, E_2, E_3 bezüglich zu e_2, e_3, t_1, zu e_3, e_1, t_2, zu e_1, e_2, t_3 sind nach § 49, (20):

$$(26')\ \begin{cases} U_2 + \mu_1 U_3 = 0, \ U_3 + \mu_2 U_1 = 0, \\ U_1 + \mu_3 U_2 = 0. \end{cases}$$

Damit die Verbindungsebenen T_1', T_2', T_3' diesen drei Strahlen t_1', t_2', t_3' mit den Gegenkanten e_1, e_2, e_3 durch einen Strahl $p_0 = x_0, y_0, z_0$ gehen, müssen nach § 54, 4, IV die Parameter μ_1, μ_2, μ_3 von drei Konstanten X_1^0, X_2^0, X_3^0 in der Weise abhängen:

$$(27')\ \begin{cases} \mu_1 = \frac{X_3^0}{X_2^0}, \quad \mu_2 = \frac{X_1^0}{X_3^0}, \\ \mu_3 = \frac{X_2^0}{X_1^0} \end{cases}$$

und zugleich für den Punkt x_0, y_0, z_0 die Gleichungen (21) bestehen.

Das erstere ist nach (24′) der Fall; man hat nur:

$$(28')\ \begin{cases} X_1^0 = \frac{1}{U_1^0}, \quad X_2^0 = \frac{1}{U_2^0}, \\ X_3^0 = \frac{1}{U_3^0} \end{cases}$$

zu nehmen. Setzt man aber diese Werte der Konstanten U_i^0 in die Gleichungen (21′) ein, so erhält man:

$$(29)\quad a_i u_0 + b_i v_0 + c_i w_0 = \varrho\,\frac{1}{X_i^0}$$

zu nehmen. Setzt man aber diese Werte der Konstanten X_i^0 in die Gleichungen (21) ein, so erhält man:

$$(29')\quad A_i x_0 + B_i y_0 + C_i z_0 = \varrho\,\frac{1}{U_i^0}$$

und durch Auflösen mit einem Proportionalitätsfaktor σ:

$$(30')\quad \begin{cases} \sigma u_0 = \dfrac{A_1}{X_1^0} + \dfrac{A_2}{X_2^0} + \dfrac{A_3}{X_3^0}, \\ \sigma v_0 = \dfrac{B_1}{X_1^0} + \dfrac{B_2}{X_2^0} + \dfrac{B_3}{X_3^0}, \\ \sigma w_0 = \dfrac{C_1}{X_1^0} + \dfrac{C_2}{X_2^0} + \dfrac{C_3}{X_3^0}. \end{cases}$$

$$(30)\quad \begin{cases} \sigma x_0 = \dfrac{a_1}{U_1^0} + \dfrac{a_2}{U_2^0} + \dfrac{a_3}{U_3^0}, \\ \sigma y_0 = \dfrac{b_1}{U_1^0} + \dfrac{b_2}{U_2^0} + \dfrac{b_3}{U_3^0}, \\ \sigma z_0 = \dfrac{c_1}{U_1^0} + \dfrac{c_2}{U_2^0} + \dfrac{c_3}{U_3^0}. \end{cases}$$

Verbindet man einen gegebenen Strahl p_0 mit den drei Kanten e_1, e_2, e_3 der Ecke durch die Ebenen T_1, T_2, T_3 und konstruiert an jeder Kante die vierte harmonische Ebene T_1', T_2', T_3', so schneiden diese die Gegenflächen in drei Strahlen t_1', t_2', t_3', die in einer Ebene liegen.

Schneidet man eine gegebene Ebene Π_0 mit den drei Seitenflächen E_1, E_2, E_3 einer Ecke in den Strahlen t_1, t_2, t_3 und konstruiert in jeder Seitenfläche den vierten harmonischen Strahl t_1', t_2', t_3', so gehen die Verbindungsebenen T_1', T_2', T_3' dieser Strahlen mit den Gegenkanten durch einen Strahl p_0.

Diese mittels (30) durch $p_0 = x_0, y_0, z_0$ bestimmte Ebene Π_0 heißt die *Harmonikalebene des Strahles* p_0.

Dieser mittels (30′) durch $\Pi_0 = u_0, v_0, w_0$ bestimmte Strahl p_0 heißt der *Harmonikalstrahl der Ebene* Π_0.

10. Die Reziprozität von Harmonikalebene und Harmonikalstrahl. Da die beiden Gleichungssysteme (29) und (29′) mit Rücksicht auf (25) und (25′) miteinander identisch sind, und je den Strahl $p_0 = x_0, y_0, z_0$ und die Ebene u_0, v_0, w_0 wechselseitig eindeutig durcheinander ausdrücken, so folgt, daß die Harmonikalebene Π_0 eines beliebigen Strahles p_0 diesen als Harmonikalstrahl und der Harmonikalstrahl p_0 einer beliebigen Ebene Π_0 diese als Harmonikalebene hat.

Je ein Strahl und eine Ebene des Bündels entsprechen sich als Harmonikalstrahl und Harmonikalebene in bezug auf eine Ecke wechselseitig eindeutig (vgl. § 26, 2).

Zwischen den Koordinaten x_0, y_0, z_0 und u_0, v_0, w_0 beider bestehen nach (29) und (29′) die Gleichungen:

$$(31)\qquad X_1^0 : X_2^0 : X_3^0 = \frac{1}{U_1^0} : \frac{1}{U_2^0} : \frac{1}{U_3^0}.$$

Auch ergibt sich durch Addition der mit x, y, z multiplizierten

Gleichungen (30) und durch Addition der mit u, v, w multiplizierten Gleichungen (30') bezüglich:

Die Gleichung der Harmonikalebene des Strahles x_0, y_0, z_0 lautet in laufenden Strahlenkoordinaten x, y, z im Bündel:

$$(32)\quad \frac{X_1}{X_1^0} + \frac{X_2}{X_2^0} + \frac{X_3}{X_3^0} = 0.$$

Die Gleichung des Harmonikalstrahles der Ebene u_0, v_0, w_0 lautet in laufenden Ebenenkoordinaten u, v, w im Bündel:

$$(32')\quad \frac{U_1}{U_1^0} + \frac{U_2}{U_2^0} + \frac{U_3}{U_3^0} = 0.$$

§ 55. Transversalebenen des Tetraeders.

1. Gleichungen der Seitenflächen und Ecken des Tetraeders. Die Gleichungen der vier Ebenen E_1, E_2, E_3, E_4 und der Ecken E_1, E_2, E_3, E_4 eines Tetraeders seien in laufenden Punktkoordinaten x, y, z, t und laufenden Ebenenkoordinaten u, v, w, s bezüglich (vgl. § 51, 7):

$$(1)\begin{cases} X_1 = a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = 0,\\ X_2 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = 0,\\ X_3 = a_3x + b_3y + c_3z + d_3t = 0,\\ X_4 = a_4x + b_4y + c_4z + d_4t = 0.\end{cases}$$

$$(1')\begin{cases} U_1 = A_1u + B_1v + C_1w + D_1s = 0,\\ U_2 = A_2u + B_2v + C_2w + D_2s = 0,\\ U_3 = A_3u + B_3v + C_3w + D_3s = 0,\\ U_4 = A_4u + B_4v + C_4w + D_4s = 0.\end{cases}$$

Die Kanten des Tetraeders seien mit:

$$(2)\quad \mathsf{E}_h \times \mathsf{E}_i = \varepsilon_{hi},\quad E_hE_i = e_{hi},\quad hi = 23,\ 31,\ 12,\ 14,\ 24,\ 34$$

benannt; e_{hi} und ε_{hi} sind Gegenkanten; jede Kante ist doppelt bezeichnet $\varepsilon_{23} = e_{14}$, usw. Der Koordinatenanfangspunkt liege im Innern des Tetraeders, und nach ihm seien die Seitenflächen gerichtet (vgl. § 41, 1). Es sei ferner zur Abkürzung gesetzt:

$$(3)\qquad k_i = \varepsilon_i\sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2},\quad \varepsilon_i = -\operatorname{sign.} d_i,\ i = 1, 2, 3, 4.$$

2. Transversalebenen und Teilpunkte.

Sechs beliebige durch die sechs Kanten ε_{hi} gelegte Transversalebenen T_{hi} mögen die Winkel der gerichteten Ebenen E_h und E_i im Sinusverhältnis λ_{hi} teilen, so daß:

$$(4)\qquad \frac{\sin \mathsf{E}_h\mathsf{T}_{hi}}{\sin \mathsf{E}_i\mathsf{T}_{hi}} = \lambda_{hi}.$$

Die Gleichungen der sechs Transversalebenen lauten nach § 42, (15):

Sechs beliebige auf den sechs Kanten e_{hi} angenommene Teilpunkte T_{hi} mögen die Strecken der Punkte E_h und E_i im Streckenverhältnis λ_{hi} teilen, so daß:

$$(4')\qquad \frac{E_hT_{hi}}{E_iT_{hi}} = \lambda_{hi}.$$

Die Gleichungen der sechs Teilpunkte lauten nach § 46, (3):

$$(5)\begin{cases} X_2-\mu_{23}X_3=0,\ X_3-\mu_{31}X_1=0, \\ X_1-\mu_{12}X_2=0, \\ X_1-\mu_{14}X_4=0,\ X_2-\mu_{24}X_4=0, \\ X_3-\mu_{34}X_4=0, \end{cases}$$

wo:

$$(6)\qquad \mu_{hi}=\frac{k_h}{k_i}\lambda_{hi}.$$

$$(5')\begin{cases} U_2-\mu_{23}U_3=0,\ U_3-\mu_{31}U_1=0, \\ U_1-\mu_{12}U_2=0, \\ U_1-\mu_{14}U_4=0,\ U_2-\mu_{24}U_4=0, \\ U_3-\mu_{34}U_4=0, \end{cases}$$

wo:

$$(6')\qquad \mu_{hi}=\frac{D_h}{D_i}\lambda_{hi}.$$

3. Notwendige und hinreichende Bedingung für sechs Transversalebenen durch einen Punkt. Wenn die sechs Transversalebenen (5) alle durch einen Punkt $P_0 = x_0, y_0, z_0, t_0$ gehen, so muß:

$$X_h^0 - \mu_{hi}X_i^0 = 0$$

sein, wo X_h^0 und X_i^0 die für den Punkt P_0 gebildeten Ausdrücke X_h, X_i in (1) sind. Es hängen also die sechs Parameter der Gleichungen (5) in der Weise:

$$(7)\qquad \mu_{hi}=\frac{X_h^0}{X_i^0}$$

von den Verhältnissen der *vier durch P_0 bestimmten Konstanten* X_h^0 ab.

Wenn umgekehrt die Parameter der Gleichungen (5) von *vier beliebig gegebenen Konstanten* X_h^0 in der Weise (7) abhängen, so werden diese Gleichungen sämtlich durch einen Punkt P_0 erfüllt, dessen Koordinaten x_0, y_0, z_0, t_0 mit den gegebenen Konstanten in der Beziehung stehen:

$$(8)\qquad a_h x_0 + b_h y_0 + c_h z_0 + d_h t_0 = \varrho X_h^0,\quad h = 1, 2, 3, 4,$$

unter ϱ einen Proportionalitätsfaktor verstanden. Durch die Gleichungen (8) ist aber der Punkt P_0 immer eindeutig bestimmt (Anm. 2, III, 2), da wie in § 51, 7 die Determinante der Koeffizienten von Null verschieden ist.

4. Die Transversalensätze.[84]) Indem wir den dualen Satz hinzufügen, erhalten wir das Resultat (vgl. § 25, 5 II; II′):

I. *Die sechs Transversalebenen:*

$$(9)\qquad X_h - \mu_{hi}X_i = 0$$

durch die Kanten des Tetraeders $X_h = 0$ gehen immer dann und nur dann durch einen Punkt P_0, wenn die sechs Parameter μ_{hi} von den Verhältnissen von vier Konstanten X_h^0 in der Weise abhängen:

$$(10)\qquad \mu_{hi}=\frac{X_h^0}{X_i^0}.$$

I′. *Die sechs Teilpunkte:*

$$(9')\qquad U_h - \mu_{hi}U_i = 0$$

auf den Kanten des Tetraeders $U_h = 0$ liegen immer dann und nur dann in einer Ebene Π_0, wenn die sechs Parameter μ_{hi} von den Verhältnissen von vier Konstanten U_h^0 in der Weise abhängen:

$$(10')\qquad \mu_{hi}=\frac{U_h^0}{U_i^0}.$$

Die vier Konstanten stehen mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0, t_0 des Punktes P_0 in der Beziehung:

$$(11) \begin{cases} a_h x_0 + b_h y_0 + c_h z_0 + d_h t_0 \\ = \varrho X_h^0, \quad h = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Die vier Konstanten stehen mit den Koordinaten u_0, v_0, w_0, s_0 der Ebene Π_0 in der Beziehung:

$$(11') \begin{cases} A_h u_0 + B_h v_0 + C_h w_0 + D_h s_0 \\ = \varrho U_h^0, \quad h = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Setzen wir nun:

$$(12) \qquad X_h^0 = k_h p_h, \qquad\qquad (12') \qquad U_h^0 = D_h q_h,$$

so geht aus (10), (10′) mit Rücksicht auf (6), (6′) hervor:

$$(13) \qquad \lambda_{hi} = \frac{p_h}{p_i} \qquad\qquad (13') \qquad \lambda_{hi} = \frac{q_h}{q_i}.$$

Umgekehrt folgt aus (13) vermöge (12) und (6) wieder (10). Wir können daher die vorigen Sätze auch so aussprechen (vgl. § 25, 5, III; III′):

II. *Legt man durch die sechs Kanten ε_{hi} des Tetraeders der vier Ebenen E_h sechs Transversalebenen T_{hi}, so gehen diese immer dann und nur dann durch einen Punkt P_0, wenn die sechs Teilungsverhältnisse, nach denen sie die Flächenwinkel des Tetraeders teilen, von den Verhältnissen von vier Konstanten p_h in der Weise abhängen:*

$$(14) \qquad \lambda_{hi} = \frac{\sin \mathsf{E}_h \mathsf{T}_{hi}}{\sin \mathsf{E}_i \mathsf{T}_{hi}} = \frac{p_h}{p_i}.$$

II′. *Wählt man auf den sechs Kanten e_{hi} des Tetraeders der vier Punkte E_h sechs Teilpunkte T_{hi}, so liegen diese immer dann und nur dann auf einer Ebene Π_0, wenn die sechs Teilungsverhältnisse, nach denen sie die Kantenlängen teilen, von den Verhältnissen von vier Konstanten q_h in der Weise abhängen:*

$$(14') \qquad \lambda_{hi} = \frac{E_h T_{hi}}{E_i T_{hi}} = \frac{q_h}{q_i}.$$

Die Konstanten p_h oder q_h in (12), (12′) bedeuten nach § 41, (6) und § 45, (15) im wesentlichen die Abstände des Punktes P_0 von den Ebenen (1) oder der Ebene Π_0 von den Ecken (1′).

5. Halbierungsebenen der Flächenwinkel und Halbierungspunkte der Kanten. Für die Halbierungsebenen der inneren Flächenwinkel des Tetraeders (bei der in § 55, **1** über 0 gemachten Voraussetzung der „äußeren“ im Sinne von § 42, 5) ist $\lambda_{hi} = 1$, so daß die Bedingung (14) mit $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$, $p_4 = 1$ erfüllt ist:

Die Halbierungsebenen der sechs inneren Flächenwinkel des Tetraeders gehen alle durch einen Punkt.

Ebenso wird mit $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$, $p_4 = -1$: $\lambda_{23} = 1$, $\lambda_{31} = 1$, $\lambda_{12} = 1$, $\lambda_{14} = -1$, $\lambda_{24} = -1$, $\lambda_{34} = -1$, und folgt aus II:

Die Halbierungsebenen der drei inneren Winkel dreier Seitenflächen E_1, E_2, E_3 und die drei Halbierungsebenen der drei Außenwinkel an der vierten Seitenfläche E_4 gehen alle durch einen Punkt.

Der duale Satz hierzu lautet:

Die Ebene durch die Mittelpunkte dreier von einer Ecke E_4 ausgehenden Kanten ist der gegenüberliegenden Seitenfläche E_4 parallel (vgl. § 25, **6**).

6. Übergang von den Transversalebenen auf die Teilpunkte. Die durch die Kante ε_{23} gehende Transversalebene:

$$X_2 + \mu_{23} X_3 = 0$$

schneidet die Gegenkante:

$$X_1 = 0\,, \quad X_4 = 0$$

in einem Punkte, der nach § 47, (15′) die Gleichung hat:

$$\begin{vmatrix} u & v & w & s \\ a_2 + \mu_{23} a_3 & b_2 + \mu_{23} b_3 & c_2 + \mu_{23} c_3 & d_2 + \mu_{23} d_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

oder mit Benutzung der Abkürzungen (1′):

$$U_3 - \mu_{23} U_2 = 0.$$

Im gleicher Weise folgt allgemein:

Die Transversalebene:

(15) $\quad X_h + \mu_{hi} X_i = 0,$

$hi = 1, 2, 3, 4,$ *schneidet die Gegenkante in dem Punkte:*

(16) $\quad U_h - \dfrac{1}{\mu_{hi}} U_i = 0.$

Die Verbindungsebene des Teilpunktes:

(15′) $\quad U_h + \mu_{hi} U_i = 0,$

$hi = 1, 2, 3, 4,$ *mit der Gegenkante hat die Gleichung:*

(16′) $\quad X_h - \dfrac{1}{\mu_{hi}} X_i = 0.$

7. Zweite Form der Transversalebenensätze.

Die sechs Ebenen (16′) gehen nach § 55, 4 I durch einen Punkt, wenn:

$$\frac{1}{\mu_{hi}} = \frac{X_h^0}{X_i^0}.$$

Die sechs Punkte (16) liegen nach § 55, 4 I′ in einer Ebene, wenn:

$$\frac{1}{\mu_{hi}} = \frac{U_h^0}{U_i^0}.$$

Wir erhalten daher die Sätze (vgl. § 25, **12**):

III. *Die Verbindungsebenen der sechs Teilpunkte:*

(17) $\quad U_h + \mu_{hi} U_i = 0$

auf den Kanten e_{hi} mit den bezüglichen Gegenkanten ε_{hi} gehen alle durch einen Punkt, wenn die sechs

III′. *Die Schnittpunkte der sechs Transversalebenen:*

(17′) $\quad X_h + \mu_{hi} X_i = 0$

durch die Kanten ε_{hi} mit den bezüglichen Gegenkanten e_{hi} liegen alle in einer Ebene, wenn die sechs Para-

Parameter μ_{hi} von den Verhältnissen von vier Konstanten X_h^0 in der Weise abhängen:

(18) $$\mu_{hi} = \frac{X_i^0}{X_h^0}.$$

Die Koordinaten des gemeinsamen Punktes stehen wie in (11) mit den Konstanten in der Beziehung:

(19) $$\begin{cases} a_h x_0 + b_h y_0 + c_h z_0 + d_h t_0 \\ = \varrho X_h^0, \quad h = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

meter μ_{hi} von den Verhältnissen von vier Konstanten U_h^0 in der Weise abhängen:

(18') $$\mu_{hi} = \frac{U_i^0}{U_h^0}.$$

Die Koordinaten der gemeinsamen Ebenen stehen wie in (11') mit den Konstanten in der Beziehung:

(19') $$\begin{cases} A_h u_0 + B_h v_0 + C_h w_0 + D_h s_0 \\ = \varrho U_h^0, \quad h = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

8. Harmonikalebene eines Punktes und Harmonikalpunkt einer Ebene (vgl. § 26, **1**).

Sei $P_0 = x_0, y_0, z_0, t_0$ ein gegebener Punkt.

Sind dann:

(20) $$X_h - \mu_{hi} X_i = 0$$

die Gleichungen seiner Verbindungsebenen mit den sechs Kanten ε_{hi} des Tetraeders, so ist wie in § 55, **3**:

(21) $$\mu_{hi} = \frac{X_h^0}{X_i^0},$$

Sei $\Pi_0 = u_0, v_0, w_0, s_0$ eine gegebene Ebene.

Sind dann:

(20') $$U_h - \mu_{hi} U_i = 0$$

die Gleichungen ihrer Schnittpunkte mit den sechs Kanten e_{hi} des Tetraeders, so ist:

(21') $$\mu_{hi} = \frac{U_h^0}{U_i^0},$$

wo die Konstanten X_h^0 und U_h^0 die Werte haben ($h = 1, 2, 3, 4$):

(22) $X_h^0 = a_h x_0 + b_h y_0 + c_h z_0 + d_h t_0$.

(22') $U_h = A_h u_0 + B_h v_0 + C_h w_0 + D_h s_0$.

Die vierte harmonische Ebene zu den durch die Kante ε_{hi} gehenden drei:

$X_h = 0, \quad X_i = 0, \quad X_h - \mu_{hi} X_i = 0$

ist dann nach § 42, **11**:

(23) $$X_h + \mu_{hi} X_i = 0.$$

Damit die Schnittpunkte der sechs Ebenen (23) mit den Gegenkanten e_{hi} in einer Ebene $\Pi_0 = u_0, v_0, w_0, s_0$ liegen, müssen nach III' die Parameter μ_{hi} von vier Konstanten U_{hi} in der Weise (18') abhängen, und zugleich zwischen

Der vierte harmonische Punkt zu den auf der Kante e_{hi} liegenden drei:

$U_h = 0, \quad U_i = 0, \quad U_h - \mu_{hi} U_i = 0$

ist dann nach § 46, **5**:

(23') $$U_h + \mu_{hi} U_i = 0.$$

Damit die Verbindungsebenen der sechs Punkte (23') mit den Gegenkanten ε_{hi} durch einen Punkt $P_0 = x_0, y_0, z_0, t_0$ gehen, müssen nach III die Parameter μ_{hi} von vier Konstanten X_h^0 in der Weise (18) abhängen, und zugleich zwischen

diesen und den Koordinaten u_0, v_0, w_0, s_0 die Gleichungen (19′) bestehen.

Das erstere ist nach (21) der Fall; man hat nur:

$$U_h^0 = \frac{1}{X_h^0} \tag{24}$$

zu nehmen. Setzt man aber diese Werte der Konstanten U_h^0 in die Gleichungen (19′) ein, so erhält man:

$$A_h u_0 + B_h v_0 + C_h w_0 + D_h s_0 = \varrho \cdot \frac{1}{X_h^0} \tag{25}$$

diesen und den Koordinaten x_0, y_0, z_0, t_0, die Gleichungen (19) bestehen.

Das erstere ist nach (21′) der Fall; man hat nur:

$$X_h^0 = \frac{1}{U_h^0} \tag{24′}$$

zu nehmen. Setzt man aber diese Werte der Konstanten X_h^0 in die Gleichungen (19) ein, so erhält man:

$$a_h x_0 + b_h y_0 + c_h z_0 + d_h t_0 = \varrho \cdot \frac{1}{U_h^0} \tag{25′}$$

und durch Auflösung mit einem Proportionalfaktor σ (Anm. 2, III, 2; 1, III, (8)):

$$\tag{26} \begin{cases} \sigma u_0 = \dfrac{a_1}{X_1^0} + \dfrac{a_2}{X_2^0} + \dfrac{a_3}{X_3^0} + \dfrac{a_4}{X_4^0}, \\ \sigma v_0 = \dfrac{b_1}{X_1^0} + \dfrac{b_2}{X_2^0} + \dfrac{b_3}{X_3^0} + \dfrac{b_4}{X_4^0}, \\ \sigma w_0 = \dfrac{c_1}{X_1^0} + \dfrac{c_2}{X_2^0} + \dfrac{c_3}{X_3^0} + \dfrac{c_4}{X_4^0}, \\ \sigma t_0 = \dfrac{d_1}{X_1^0} + \dfrac{d_2}{X_2^0} + \dfrac{d_3}{X_3^0} + \dfrac{d_4}{X_4^0}. \end{cases}$$

$$\tag{26′} \begin{cases} \sigma x_0 = \dfrac{A_1}{U_1^0} + \dfrac{A_2}{U_2^0} + \dfrac{A_3}{U_3^0} + \dfrac{A_4}{U_4^0}, \\ \sigma y_0 = \dfrac{B_1}{U_1^0} + \dfrac{B_2}{U_2^0} + \dfrac{B_3}{U_3^0} + \dfrac{B_4}{U_4^0}, \\ \sigma z_0 = \dfrac{C_1}{U_1^0} + \dfrac{C_2}{U_2^0} + \dfrac{C_3}{U_3^0} + \dfrac{C_4}{U_4^0}, \\ \sigma t_0 = \dfrac{D_1}{U_1^0} + \dfrac{D_2}{U_2^0} + \dfrac{D_3}{U_3^0} + \dfrac{D_4}{U_4^0}. \end{cases}$$

Verbindet man einen gegebenen Punkt P_0 mit den sechs Kanten ε_{hi} durch die Ebenen T_{hi} und konstruiert in jeder Kante ε_{hi} zu E_h, E_i und T_{hi} die vierte harmonische Ebene T'_{hi}, so schneiden die Ebenen T'_{hi} die Gegenkanten e_{hi} in sechs Punkten, die in einer Ebene Π_0 liegen.

Diese Ebene, deren Koordinaten u_0, v_0, w_0, s_0 durch die Koordinaten x_0, y_0, z_0, t_0 des Punktes P_0 mittels

Schneidet man eine gegebene Ebene Π_0 mit den sechs Kanten e_{hi} in den Punkten T_{hi} und konstruiert auf jeder Kante e_{hi} zu E_h, E_i und T_{hi} den vierten harmonischen Punkt T'_{hi}, so gehen die Verbindungsebenen der Punkte T'_{hi} mit den Gegenkanten ε_{hi} durch einen Punkt P_0.

Dieser Punkt, dessen Koordinaten x_0, y_0, z_0, t_0 durch die Koordinaten u_0, v_0, w_0, s_0 der Ebene Π_0 mittels

(26) und (22) eindeutig bestimmt sind, heißt die *Harmonikalebene des Punktes* P_0.[86])

(26′) und (22′) eindeutig bestimmt sind, heißt der *Harmonikalpunkt der Ebene* Π_0.

9. Die Reziprozität von Harmonikalebene und Harmonikalpunkt. Da die beiden Gleichungssysteme (25) und (25′) mit Rücksicht auf (22) und (22′) miteinander identisch sind und den Punkt $P_0 = x_0, y_0, z_0, t_0$ und die Ebene $\Pi_0 = u_0, v_0, w_0, s_0$ wechselseitig eindeutig durcheinander ausdrücken, so folgt, daß die Harmonikalebene eines beliebigen Punktes diesen als Harmonikalpunkt und der Harmonikalpunkt einer beliebigen Ebene diese als Harmonikalebene hat.

Je ein Punkt und eine Ebene des Raumes entsprechen sich als Harmonikalpunkt und Harmonikalebene in bezug auf ein Tetraeder wechselseitig eindeutig.

Zwischen den Koordinaten x_0, y_0, z_0, t_0 und u_0, v_0, w_0, s_0 beider bestehen nach (25) und (25′) die Gleichungen:

$$U_1^0 : U_2^0 : U_3^0 : U_4^0 = \frac{1}{X_1^0} : \frac{1}{X_2^0} : \frac{1}{X_3^0} : \frac{1}{X_4^0}. \tag{27}$$

Auch ergibt sich durch Addition der mit x, y, z, t multiplizierten Gleichungen (26) und durch Addition der mit u, v, w, s multiplizierten Gleichungen (26′) nach § 47, 3 bezüglich (vgl. § 26, 2):

Die Gleichung der Harmonikalebene des Punktes x_0, y_0, z_0, t_0 lautet in laufenden Koordinaten x, y, z, t:

$$\frac{X_1}{X_1^0} + \frac{X_2}{X_2^0} + \frac{X_3}{X_3^0} + \frac{X_4}{X_4^0} = 0. \tag{28}$$

Die Gleichung des Harmonikalpunktes der Ebene u_0, v_0, w_0, s_0 lautet in laufenden Koordinaten u, v, w, s:

$$\frac{U_1}{U_1^0} + \frac{U_2}{U_2^0} + \frac{U_3}{U_3^0} + \frac{U_4}{U_4^0} = 0. \tag{28'}$$

VI. Kapitel.

Die Tetraederkoordinaten.

§ 56. Zweiflachs- und Dreiflachs-(Dreikants-)Koordinaten.

1. Zweiflachskoordinaten im Ebenenbüschel als multiplizierte Sinusverhältnisse. In Anschluß an § 7, 6; 7 benutzen wir zur Bestimmung der Ebene im Ebenenbüschel Zweiflachskoordinaten, die lediglich durch homogene Bezeichnung des bereits in § 42, 9; 10 benutzten Parameters μ entstehen (vgl. § 7, 5).

Als *Bestandteile des Koordinatensystems* sind zuerst zwei feste Ebenen E_1 und E_2, das Koordinatenzweiflach, und zwei Multiplikatoren

$\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ gegeben (Fig. 294). *Unter Zweiflachskoordinaten* u_1, u_2 *der Ebene* Π *verstehen wir dann zwei Zahlen, die sich verhalten, wie die mit* $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ *multiplizierten Sinus der Winkel der Ebene* Π *gegen die Ebenen* E_1 *und* E_2 *oder* E_2 *und* E_1 (vgl. § 8, 2):

(1) $$u_1 : u_2 = \varkappa_2 \sin E_2 \Pi : \varkappa_1 \sin E_1 \Pi.$$

Wie in § 42, 4 gilt hierbei als äußerer Winkelraum zwischen E_1 und E_2, in dem das Verhältnis:

(2) $$\lambda = \frac{\sin E_1 \Pi}{\sin E_2 \Pi}$$

positiv ist, derjenige, der den Koordinatenanfangspunkt O enthält.

2. Zweiflachskoordinaten im Ebenenbüschel als Doppelverhältnisse. Unabhängig von der Angabe von O ist die zweite Definition.

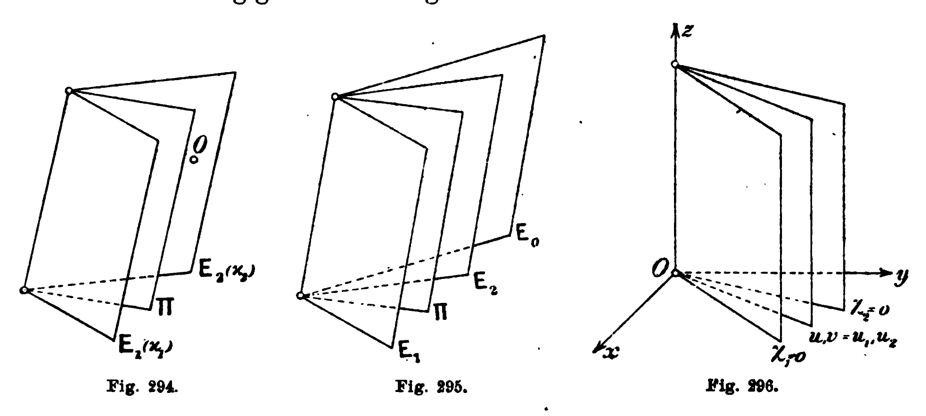


Fig. 294. Fig. 295. Fig. 296.

Als *Bestandteile des Koordinatensystems* sind zwei feste Ebenen E_1 und E_2, das Koordinatenzweiflach, und eine Einheitsebene E_0 im Büschel gegeben (Fig. 295). *Unter Zweiflachkoordinaten* u_1, u_2 *der Ebene* Π *verstehen wir dann zwei Zahlen* u_1, u_2, *deren Verhältnis gleich dem Doppelverhältnis:*[38])

(3) $$u_1 : u_2 = (E_1 E_2 E_0 \Pi) = \frac{\sin E_1 E_0}{\sin E_2 E_0} \cdot \frac{\sin E_2 \Pi}{\sin E_1 \Pi}$$

ist (§ 8, (4)).

3. Beziehung zwischen gemeinen und Zweiflachskoordinaten. Ist die z-Achse des Koordinatensystems $Oxyz$ die Achse des Ebenenbüschels, so haben die Gleichungen der Ebenen E_1 und E_2 die Form (§ 40, (14); (15); Fig. 296):

(4) $$X_1 = a_1 x + b_1 y = 0, \quad X_2 = a_2 x + b_2 y = 0.$$

Die Gleichung der Ebene Π des Büschels ist nach § 42, (15):

(5) $$X_1 - \mu X_2 = 0,$$

wo μ das multiplizierte Teilungsverhältnis, also mit Rücksicht auf (1) etwa:

$$\mu = -\frac{u_2}{u_1} \tag{6}$$

ist. Die Koordinaten der Ebene (5) im Raume sind nach § 47, 3:

$$u : v : w : s = a_1 - \mu a_2 : b_1 - \mu b_2 : 0 : 0; \tag{7}$$

also ist für die gemeinen Koordinaten u, v im Büschel (vgl. § 49, 13) mit der Bezeichnung (6) von μ und mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ, bezüglich σ:

$$\varrho u = a_1 u_1 + a_2 u_2, \quad \varrho v = b_1 u_1 + b_2 u_2 \tag{8}$$

und umgekehrt:

$$\sigma u_1 = b_2 u - a_2 v, \quad \sigma u_2 = -b_1 u + a_1 v. \tag{9}$$

Die Zweiflachskoordinaten der Ebene sind daher bis auf einen Proportionalitätsfaktor homogene lineare Funktionen der gemeinen Koordinaten im Büschel und umgekehrt (vgl. § 7, 8).

4. Dreiflachskoordinaten der Ebene und des Strahles im Bündel als Parameter der Gleichungen. Wie in § 53, (1) seien:

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t = 0, \\ X_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t = 0, \\ X_3 &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 t = 0 \end{aligned}\right. \tag{10}$$

die Gleichungen der drei Grundebenen E_1, E_2, E_3 eines Bündels. Sie bilden ein *Dreiflach* (*Dreikant*) mit den Kanten $\varepsilon_1 = \mathsf{E}_2 \times \mathsf{E}_3$, $\varepsilon_2 = \mathsf{E}_3 \times \mathsf{E}_1$, $\varepsilon_3 = \mathsf{E}_1 \times \mathsf{E}_2$. Es sind dann, wie § 53, (2); (6):

(11) $\mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3 = 0$ | (11′) $X_1 : X_2 : X_3 = \nu_1 : \nu_2 : \nu_3$

die Gleichungen der laufenden Ebene und des laufenden Strahles im Bündel.[105])

Wir verstehen nun unter Dreiflachskoordinaten u_1, u_2, u_3 der Ebene im Bündel drei Zahlen, die sich verhalten wie die Parameter in der Gleichung (11) *der Ebene, also:*

(12) $u_1 : u_2 : u_3 = \mu_1 : \mu_2 : \mu_3$.

Wir verstehen nun unter Dreiflachskoordinaten x_1, x_2, x_3 des Strahles im Bündel drei Zahlen, die sich verhalten wie die Parameter in den Gleichungen (11′) *des Strahles, also:*

(12′) $x_1 : x_2 : x_3 = \nu_1 : \nu_2 : \nu_3$.

5. Analytische Berechtigung der Dreiflachskoordinaten. Nehmen wir für den Augenblick das Zentrum des Bündels als Koordinatenanfang O des Systems $Oxyz$, auf das sich die Gleichungen (10) beziehen; setzen wir also $d_1 = 0$, $d_2 = 0$, $d_3 = 0$, so sind die drei ersten homogenen Koordinaten der Ebene (11) im Raume und damit nach

§ 49, 5 die homogenen gemeinen Koordinaten u, v, w der Ebene im Bündel wie § 53, (3) bis auf einen Faktor ϱ:

$$\text{(13)}\qquad \begin{cases} \varrho u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3, \\ \varrho v = b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3, \\ \varrho w = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3, \end{cases}$$

oder umgekehrt (Anm. 2, II, 2):

$$\text{(14)}\qquad \begin{cases} \sigma u_1 = A_1 u + B_1 v + C_1 w, \\ \sigma u_2 = A_2 u + B_2 v + C_2 w, \\ \sigma u_3 = A_3 u + B_3 v + C_3 w, \end{cases}$$

wenn $A_1, B_1 \ldots C_3$ die Unterdeterminanten der Determinante $| a_1 b_2 c_3 |$ sind.

Andererseits verhalten sich für einen durch den Koordinatenanfang O gehenden Strahl die gemeinen Koordinaten x, y, z des Strahles im Bündel (vgl. § 49, 6) wie die Koordinaten x, y, z irgend eines Punktes des Strahles. Daher geben die Gleichungen (11'), in der Form:

$$\text{(14')}\qquad \begin{cases} \sigma x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ \sigma x_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z, \\ \sigma x_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{cases}$$

geschrieben, direkt die Dreiflachskoordinaten durch die gemeinen Koordinaten des Strahles dargestellt. Umgekehrt folgt durch Auflösung:

$$\text{(13')}\qquad \begin{cases} \varrho x = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3, \\ \varrho y = B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3, \\ \varrho z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3. \end{cases}$$

Die Verhältnisse $u_1 : u_2 : u_3$ stehen daher zu den Verhältnissen $u : v : w$ und damit zu der Ebene des Bündels in umkehrbar eindeutiger Beziehung; *ebenso $x_1 : x_2 : x_3$ zu $x : y : z$ und dem Strahle des Bündels.*

6. Bedingung der vereinigten Lage von Ebene und Strahl. Der Strahl (11') liegt in der Ebene (11), wenn die Koordinaten x, y, z, t aller seiner Punkte der Gleichung (11) genügen, also:

$$\mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2 + \mu_3 \nu_3 = 0,$$

oder in der Bezeichnung (12) und (12'):

Die Bedingung der vereinigten Lage von Ebene u_1, u_2, u_3 und Strahl x_1, x_2, x_3 lautet:

$$\text{(15)}\qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

Es ist bei festen u_1, u_2, u_3 *die Gleichung der Ebene* in laufenden

Strahlenkoordinaten und bei festen x_1, x_2, x_3 *die Gleichung des Strahles* in laufenden Ebenenkoordinaten (vgl. § 29, 2).

Wie in § 49, 8; § 29, 7 folgt daher auch hier:

Die Gleichung des Schnittstrahles der beiden Ebenen $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}$ *und* $u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}$ *ist in laufenden Ebenenkoordinaten* u_1, u_2, u_3:

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & u_3^{(1)} \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & u_3^{(2)} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Koeffizienten der Gleichung sind die Koordinaten des Schnittstrahles.

Die Gleichung der Verbindungsebene der beiden Strahlen $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$ *und* $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}$ *ist in laufenden Strahlenkoordinaten* x_1, x_2, x_3:

$$(16')\qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Koeffizienten der Gleichung sind die Koordinaten der Verbindungsebene.

7. **Die Dreiflachskoordinaten als multiplizierte Teilungsverhältnisse.** Die durch die Gleichung (11) dargestellte Ebene Π schneidet

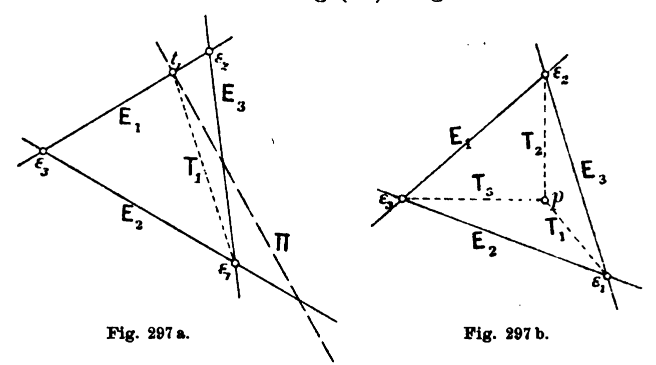


Fig. 297a. Fig. 297b.

die Seitenebene E_1 des Koordinatendreiflachs (in Fig. 297a im Durchschnitt dargestellt) in einer Geraden t_1, deren Gleichungen (vgl. 48, (1)) lauten:

$$X_1 = 0,\quad \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3 = 0.$$

Die zweite dieser Gleichungen stellt aber eine durch die Kante ε_1 gehende Ebene T_1 dar, die, wenn wir mit den Konstanten von (10) für $i = 1, 2, 3$:

$$(17)\qquad \varkappa_i = \varepsilon_i \sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2},\quad \varepsilon_i = -\operatorname{sign.} d_i$$

setzen, nach § 42, (16) den Winkel der Ebenen E_2 und E_3 in dem multiplizierten Sinusverhältnis:

$$(18)\qquad -\frac{\mu_3}{\mu_2} = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_3} \frac{\sin E_2 T_1}{\sin E_3 T_1}$$

teilt.

Der durch die Gleichungen (11′) dargestellte Strahl p wird mit der Kante ε_1 des Koordinatendreiflachs (in Fig. 297b im Durchschnitt dargestellt) durch eine Ebene T_1 verbunden, deren Gleichung lautet:

$$\nu_3 X_2 - \nu_2 X_3 = 0.$$

Diese Ebene teilt nach § 42, (16) den Winkel der Ebenen E_2 und E_3 in dem multiplizierten Sinusverhältnis:

(19) $$\frac{\nu_2}{\nu_3} = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_3} \frac{\sin \mathsf{E}_2 \mathsf{T}_1}{\sin \mathsf{E}_3 \mathsf{T}_1}.$$

Die Resultate (18) und (19) geben aber mit der Bezeichnung (12), (12′) die Sätze (Fig. 297a; 297b):

Die Verhältnisse der Dreiflachskoordinaten u_1, u_2, u_2 einer Ebene im Bündel sind die multiplizierten Teilungsverhältnisse, nach denen die von den Kanten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ des Dreiflachs nach den Schnittlinien t_1, t_2, t_3 der Ebene Π mit den Seitenflächen $\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2, \mathsf{E}_3$ gezogenen Ebenen $\mathsf{T}_1, \mathsf{T}_2, \mathsf{T}_3$ die Flächenwinkel teilen:

(20) $$\begin{cases} \dfrac{u_2}{u_3} = -\dfrac{\varkappa_3}{\varkappa_2} \dfrac{\sin \mathsf{E}_3 \mathsf{T}_1}{\sin \mathsf{E}_2 \mathsf{T}_1}, \\ \dfrac{u_3}{u_1} = -\dfrac{\varkappa_1}{\varkappa_3} \dfrac{\sin \mathsf{E}_1 \mathsf{T}_2}{\sin \mathsf{E}_3 \mathsf{T}_2}, \\ \dfrac{u_1}{u_2} = -\dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_1} \dfrac{\sin \mathsf{E}_2 \mathsf{T}_3}{\sin \mathsf{E}_1 \mathsf{T}_3}. \end{cases}$$

Hiernach sind bei gegebenen Verhältnissen von u_1, u_2, u_3 die Ebenen $\mathsf{T}_1, \mathsf{T}_2, \mathsf{T}_3$ und damit die Strahlen t_1, t_2, t_3 bestimmt. Schon zwei von diesen bestimmen im allgemeinen die Ebene Π, die dann nach § 54, (22′) auch durch den dritten geht.

Die Verhältnisse der Dreikantskoordinaten x_1, x_2, x_3 eines Strahles im Bündel sind die multiplizierten Teilungsverhältnisse, nach denen die Verbindungsebenen $\mathsf{T}_1, \mathsf{T}_2, \mathsf{T}_3$ des Strahles mit den Kanten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ die Flächenwinkel des Koordinatendreiflachs teilen:

(20) $$\begin{cases} \dfrac{x_2}{x_3} = \dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_3} \dfrac{\sin \mathsf{E}_2 \mathsf{T}_1}{\sin \mathsf{E}_3 \mathsf{T}_1}, \\ \dfrac{x_3}{x_1} = \dfrac{\varkappa_3}{\varkappa_1} \dfrac{\sin \mathsf{E}_3 \mathsf{T}_2}{\sin \mathsf{E}_1 \mathsf{T}_2}, \\ \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{\varkappa_1}{\varkappa_2} \dfrac{\sin \mathsf{E}_1 \mathsf{T}_3}{\sin \mathsf{E}_2 \mathsf{T}_3}. \end{cases}$$

Hiernach sind bei gegebenen Verhältnissen von x_1, x_2, x_3 die Ebenen $\mathsf{T}_1, \mathsf{T}_2, \mathsf{T}_3$ bestimmt. Schon zwei von diesen bestimmen im allgemeinen den Strahl p, durch den nach § 54, (16) auch die dritte geht.

8. Einführung von Einheitsstrahl und Einheitsebene im Bündel. Ist x_0, y_0, z_0, t_0 ein gegebener fester Punkt, so ist die Gleichung des durch ihn gehenden Strahles ε_0 nach (11′):

(21) $$X_1 : X_2 : X_3 = X_1^0 : X_2^0 : X_3^0$$

Der Strahl ε_0 wird daher durch die Ebenen

$$\frac{X_2}{X_2^0} - \frac{X_3}{X_3^0} = 0, \quad \frac{X_3}{X_3^0} - \frac{X_1}{X_1^0} = 0, \quad \frac{X_1}{X_1^0} - \frac{X_2}{X_2^0} = 0$$

mit den Kanten $E_2 \times E_3$, $E_3 \times E_1$, $E_1 \times E_2$ verbunden. Die vierten harmonischen Ebenen in jeder Kante sind dann nach § 42, **11** bezüglich:

$$\frac{X_2}{X_2^0} + \frac{X_3}{X_3^0} = 0, \quad \frac{X_3}{X_3^0} + \frac{X_1}{X_1^0} = 0, \quad \frac{X_1}{X_1^0} + \frac{X_2}{X_2^0} = 0$$

und schneiden die Gegenebenen $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$ in drei Strahlen, die alle der Gleichung:

$$\frac{X_1}{X_1^0} + \frac{X_2}{X_2^0} + \frac{X_3}{X_3^0} = 0 \tag{22}$$

genügen. Dies ist also in laufenden Punktkoordinaten x, y, z, t die Gleichung der in § 54, **9** definierten *Harmonikalebene* E_0 *des Strahles* ε_0.

Indem wir nun die Parameter μ_i und ν_i in (11) und (11′) durch neue Parameter μ_i' und ν_i' ersetzen, derart daß:

$$\mu_i = \frac{\mu_i'}{X_i^0}, \quad \nu_i = X_i^0 \nu_i', \tag{23}$$

bleibt die Bedingung (15) der vereinigten Lage ihrer Form nach erhalten:

$$\mu_1'\nu_1' + \mu_2'\nu_2' + \mu_3'\nu_3' = 0, \tag{24}$$

während *die Gleichungen* (11) *und* (11′) *des Ebenenbündels und Strahlbündels* werden:

$$\mu_1' \frac{X_1}{X_1^0} + \mu_2' \frac{X_2}{X_2^0} + \mu_3' \frac{X_3}{X_3^0} = 0, \tag{25}$$

$$\frac{X_1}{X_1^0} : \frac{X_2}{X_2^0} : \frac{X_3}{X_3^0} = \nu_1' : \nu_2' : \nu_3' \tag{25'}$$

(vgl. die Darstellung des Ebenenbüschels in § 47, (23)).

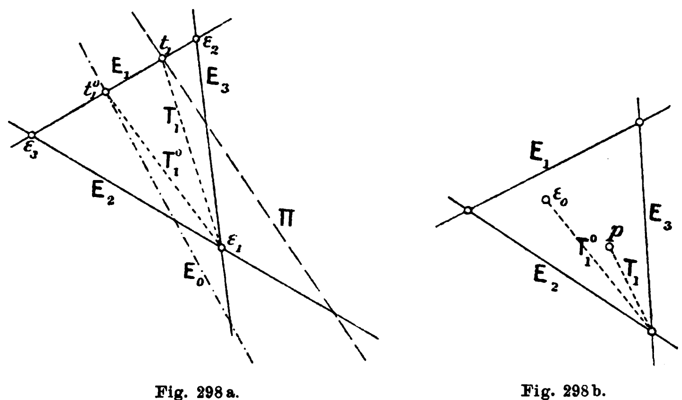


Fig. 298 a. Fig. 298 b.

Die „Einheitsebene“ E_0 *in* (22) *und der „Einheitsstrahl“* ε_0 *in* (21) *erhalten daher* (§ 28, (22)) *die Parameter* $\mu_1', \mu_2', \mu_3' = 1, 1, 1$ *und* $\nu_1', \nu_2', \nu_3' = 1, 1, 1$.

Nach (18) und (19) wird nun:

$$(26)\qquad \frac{\mu_2'}{\mu_3'} = \frac{X_2^0}{X_3^0}\,\frac{\mu_2}{\mu_3} = -\frac{X_2^0}{X_3^0}\,\frac{\varkappa_3}{\varkappa_2}\,\frac{\sin \mathsf{E}_3\mathsf{T}_1}{\sin \mathsf{E}_2\mathsf{T}_1},$$

$$(26')\qquad \frac{\nu_2'}{\nu_3'} = \frac{X_3^0}{X_2^0}\,\frac{\nu_2}{\nu_3} = \frac{X_3^0}{X_2^0}\,\frac{\varkappa_2}{\varkappa_3}\,\frac{\sin \mathsf{E}_2\mathsf{T}_1}{\sin \mathsf{E}_3\mathsf{T}_1}.$$

Wendet man diese Formeln auf E_0 und ε_0 an, indem man mit T_1^0 die Ebene bezeichnet, die die Schnittlinie t_1^0 der Ebene E_0 mit E_1 aus ε_1 projiziert (vgl. die Durchnittsfigur 298a), bezüglich die Verbindungsebene des Strahles ε_0 mit der Kante ε_1 (vgl. die Durchschnittsfigur 298b), so folgt, weil dann $\mu_i' = 1$, $\nu_i' = 1$ ist:

$$(27)\quad 1 = -\frac{X_2^0}{X_3^0}\,\frac{\varkappa_3}{\varkappa_2}\,\frac{\sin \mathsf{E}_3\mathsf{T}_1^0}{\sin \mathsf{E}_2\mathsf{T}_1^0} \qquad (27')\quad 1 = \frac{X_3^0}{X_2^0}\,\frac{\varkappa_2}{\varkappa_3}\,\frac{\sin \mathsf{E}_2\mathsf{T}_1^0}{\sin \mathsf{E}_3\mathsf{T}_1^0}$$

und durch Division der Formeln (26) und (27), (26′) und (27′):

$$(28)\quad \frac{\mu_2'}{\mu_3'} = (\mathsf{E}_3\mathsf{E}_2\mathsf{T}_1\mathsf{T}_1^0) \qquad (28')\quad \frac{\nu_1'}{\nu_3'} = (\mathsf{E}_2\mathsf{E}_3\mathsf{T}_1\mathsf{T}_1^0)$$

(vgl. § 47, (24)). Für (28) kann man nach § 52, 9 auch setzen (Fig. 298a):

$$(29)\qquad \frac{\mu_2'}{\mu_3'} = (\varepsilon_2\varepsilon_3 t_1 t_1^0).$$

9. Die Dreiflachskoordinaten als Doppelverhältnisse. Führt man jetzt an Stelle von (12) und (12′):

$$(30)\quad u_1 : u_2 : u_3 = \mu_1' : \mu_2' : \mu_3' \qquad (30')\quad x_1 : x_2 : x_3 = \nu_1' : \nu_2' : \nu_3'$$

als Dreiflachskoordinaten der Ebene und des Strahles im Bündel ein, so folgt (vgl. die Durchschnittsfiguren 299a und 299b):

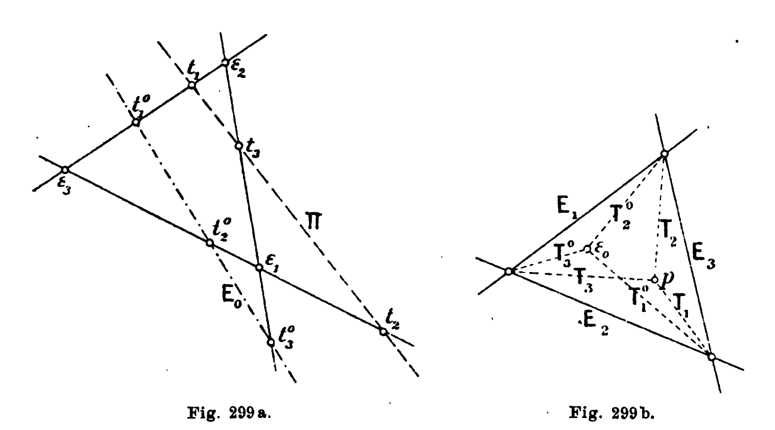


Fig. 299a. Fig. 299b.

Die Verhältnisse der Dreiflachskoordinaten u_1, u_2, u_3 einer Ebene Π | *Die Verhältnisse der Dreikantskoordinaten x_1, x_2, x_3 eines Strahles p*

im Bündel sind die Doppelverhältnisse, nach denen die Schnittlinien t_1, t_2, t_3 der Ebene Π und die Schnittlinien t_1^0, t_2^0, t_3^0 der Einheitsebene E_0 mit den Seitenflächen des Koordinatendreiflachs die bezüglichen Kantenwinkel teilen:

$$(31)\quad \begin{cases} \frac{u_2}{u_3} = (\varepsilon_2 \varepsilon_3 t_1 t_1^0), \\ \frac{u_3}{u_1} = (\varepsilon_3 \varepsilon_1 t_2 t_2^0), \\ \frac{u_1}{u_2} = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 t_3 t_3^0). \end{cases}$$

im Bündel sind die Doppelverhältnisse, nach denen die Verbindungsebenen $\mathsf{T}_1, \mathsf{T}_2, \mathsf{T}_3$ des Strahles und die Verbindungsebenen $\mathsf{T}_1^0, \mathsf{T}_2^0, \mathsf{T}_3^0$ des Einheitsstrahles ε_0 mit den Kanten des Koordinatendreikants die bezüglichen Flächenwinkel teilen:

$$(31')\quad \begin{cases} \frac{x_2}{x_3} = (\mathsf{E}_2 \mathsf{E}_3 \mathsf{T}_1 \mathsf{T}_1^0), \\ \frac{x_3}{x_1} = (\mathsf{E}_3 \mathsf{E}_1 \mathsf{T}_2 \mathsf{T}_2^0), \\ \frac{x_1}{x_2} = (\mathsf{E}_1 \mathsf{E}_2 \mathsf{T}_3 \mathsf{T}_3^0). \end{cases}$$

10. Perspektive Lage von Bündel und Ebene. Wir schneiden das Bündel mit einer nicht durch seinen Scheitel S gehenden Ebene E und führen in dieser ein Koordinatendreieck ein, dessen Ecken E_1, E_2, E_3 und Einheitspunkt E_0 (Fig. 300) von den Kanten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ und dem Einheitsstrahl ε_0, dessen Seiten e_1, e_2, e_3 und Einheitslinie e_0 folglich von den Seitenflächen $\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2, \mathsf{E}_3$ und der Einheitsebene E_0 ausgeschnitten werden. Aus der Konstruktion der Harmonikalebene E_0 des Strahles ε_0 in § 56, 8 folgt nämlich mit Rücksicht auf § 52, (23), daß auch e_0 die Harmonikale (vgl. § 26, 1) von E_0 wird.

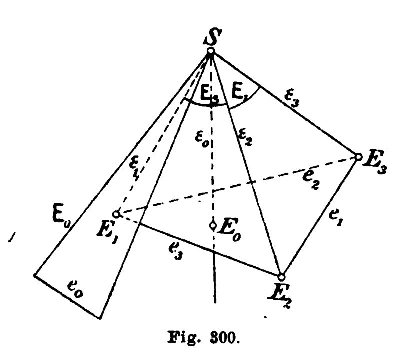


Fig. 300.

Der Ebene Π und dem Strahl p des Bündels entspricht als Spur in der Ebene E bezüglich eine Gerade g und ein Punkt P.

Sind nun T_1, T_1^0 die Schnittpunkte der Strahlen t_1, t_1^0 (Fig. 299a) mit der Seite e_1 (Fig. 300) und t_1, t_1^0 die Schnittlinien der Ebenen $\mathsf{T}_1, \mathsf{T}_1^0$ (Fig. 299b) mit der Ebene E (Fig. 300), so folgt nach § 5, (3) und § 52, (23) aus (31) und (31′):

$$(32)\quad \frac{u_2}{u_3} = (E_2 E_3 T_1 T_1^0) \qquad (32')\quad \frac{x_2}{x_3} = (e_2 e_3 t_1 t_1^0)$$

und daraus mit Rücksicht auf § 28, (35′); (35) (Fig. 300):

Liegen eine Ebene und ein Bündel perspektiv und führt man in beiden entsprechende Elemente E_1, E_2, E_3; E_0 und $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$; ε_0, bezüglich e_1, e_2, e_3; e_0 und $\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2, \mathsf{E}_3$; E_0 als Koordinatensysteme ein, so haben entsprechende Punkte der Ebene und Strahlen des Bündels, sowie

entsprechende Strahlen der Ebene und Ebenen des Bündels gleiche und gleich bezeichnete Dreiecks- und Dreiflachskoordinaten x_1, x_2, x_3, *sowie* u_1, u_2, u_3.[26])

Wie in § 28, **11** für die Ebene gilt daher auch für das Bündel der Satz:

Zwischen den Dreiflachskoordinaten eines Strahles und seiner Harmonikalebene in bezug auf das Koordinatendreiflach bestehen stets die Gleichungen:

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3}. \tag{33}$$

§ 57. Die Tetraederkoordinaten des Punktes und der Ebene.

1. Analytische Definition der Tetraederkoordinaten eines Punktes. Beim Übergang von einem rechtwinkligen Koordinatensystem $Oxyz$ zu einem beliebigen schiefwinkligen $\Omega\xi\eta\zeta$ (Fig. 301), dem allgemeinsten bisher betrachteten System, werden bei homogener Schreibweise (§ 47, 1) der Formeln § 37, (16) die neuen Koordinaten ξ, η, ζ, τ bis auf einen Proportionalitätsfaktor ϱ homogene lineare Funktionen der alten:

$$\begin{aligned}
\varrho\xi &= A_1x + B_1y + C_1z + D\xi_0 t,\\
\varrho\eta &= A_2x + B_2y + C_2z + D\eta_0 t,\\
\varrho\zeta &= A_3x + B_3y + C_3z + D\zeta_0 t,\\
\varrho\tau &= \qquad\qquad\qquad\quad Dt.
\end{aligned}$$

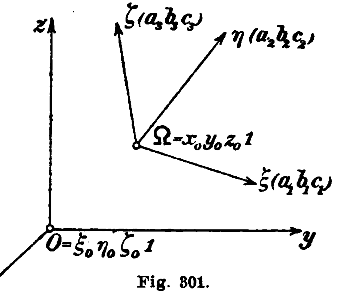


Fig. 301.

Die drei ersten Ebenen, die $\eta\zeta$-, $\zeta\xi$- und $\xi\eta$-Ebene des neuen Koordinatentetraeders (vgl. § 47, **10**) sind beliebige Ebenen, die vierte aber ist die unendlich ferne Ebene.

Wir definieren nun allgemeinere homogene Koordinaten, die wir schlechthin Tetraederkoordinaten[89]) nennen, in entsprechender Weise:

Unter Tetraederkoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 *eines Punktes verstehen wir vier Größen, die proportional sind vier beliebig gegebenen homogenen linearen Funktionen* X_1, X_2, X_3, X_4 *der homogenen gemeinen Koordinaten* x, y, z, t, *also:*

$$\left\{\begin{aligned}
\varrho x_1 &= X_1 = a_1x + b_1y + c_1z + d_1t,\\
\varrho x_2 &= X_2 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2t,\\
\varrho x_3 &= X_3 = a_3x + b_3y + c_3z + d_3t,\\
\varrho x_4 &= X_4 = a_4x + b_4y + c_4z + d_4t.
\end{aligned}\right. \tag{1}$$

Hier sind X_1, X_2, X_3, X_4 wie in § 51, (12) als Abkürzungen für die linearen Funktionen gebraucht.

Das durch die vier Ebenen:

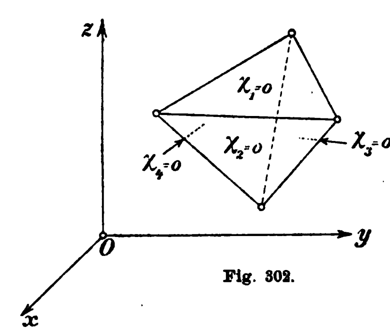


Fig. 302.

(2) $X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0, \quad X_4 = 0$

bestimmte Tetraeder (Fig. 302) nennen wir das *Koordinatentetraeder* des neuen Koordinatensystems.

Die Determinante:

(3) $$D = | a_1 \quad b_2 \quad c_3 \quad d_4 |$$

(vgl. § 51, (13) und § 51, 7) setzen wir von Null verschieden voraus, damit die vier Ebenen wirklich ein Tetraeder bilden (vgl. § 28, 1).

2. Analytische Berechtigung der Tetraederkoordinaten des Punktes. Bezeichnen wir die Unterdeterminanten dritten Grades der Determinante D wie in § 51, 5 mit $A_1, B_1, \ldots, D_4$, so folgt durch Auflösung der vier Gleichungen (1) mit einem Proportionalitätsfaktor σ (Anm. 2, III, 2):

(4) $$\begin{cases} \sigma x = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4, \\ \sigma y = B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3 + B_4 x_4, \\ \sigma z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 + C_4 x_4, \\ \sigma t = D_1 x_1 + D_2 x_2 + D_3 x_3 + D_4 x_4. \end{cases}$$

Die Verhältnisse $x : y : z : t$ und die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ bestimmen sich nach (1) und (4) wechselseitig eindeutig. Wie jene (vgl. § 31, 3) stehen also auch diese in wechselseitig eindeutiger Beziehung zu dem Punkte P.

Zu jedem gegebenen Punkte P gehören vier ihren Verhältnissen nach bestimmte Tetraederkoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4, und zu vier ihren Verhältnissen nach gegebenen Tetraederkoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 gehört ein bestimmter Punkt P.

3. Abhängigkeit der Tetraederkoordinaten der Ebene von denen des Punktes. Durch Multiplikation der Gleichungen (4) mit den auf das rechtwinklige System $Oxyz$ bezüglichen homogenen Koordinaten u, v, w, s einer Ebene und nachfolgender Addition ergibt sich:

$$\sigma(ux + vy + wz + st) = (A_1 u + B_1 v + C_1 w + D_1 s) x_1 + (A_2 u + B_2 v + \cdots) x_2 + \cdots$$

oder:

(5) $$ux + vy + wz + st = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4,$$

wo wir die Koeffizienten u_1, u_2, u_3, u_4 definieren durch:

$$(6)\quad \begin{cases} \sigma u_1 = U_1 = A_1 u + B_1 v + C_1 w + D_1 s, \\ \sigma u_2 = U_2 = A_2 u + B_2 v + C_2 w + D_2 s, \\ \sigma u_3 = U_3 = A_3 u + B_3 v + C_3 w + D_3 s, \\ \sigma u_4 = U_4 = A_4 u + B_4 v + C_4 w + D_4 s. \end{cases}$$

Infolge von (5) erhält nun *die Gleichung der Ebene* u, v, w, s, die nach § 47, (4) in laufenden Punktkoordinaten x, y, z, t lautet:

$$(7)\quad ux + vy + wz + st = 0,$$

in laufenden Tetraederkoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 *des Punktes* die Form:

$$(8)\quad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0.$$

Die Koeffizienten u_1, u_2, u_3, u_4 *dieser Gleichung nehmen wir als Tetraederkoordinaten der Ebene* (vgl. § 47, (3)).

Sie sind nach (6) *proportional vier homogenen linearen Funktionen* U_1, U_2, U_3, U_4 *der homogenen gemeinen Koordinaten* u, v, w, s.

Diese vier Funktionen sind, da ihre Koeffizienten die Unterdeterminanten der Determinante (3) sind, durch die gegebenen Formeln (1) schon mitbestimmt. Gleich Null gesetzt, geben sie nach § 51, 7 in:

$$(9)\quad U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0, \quad U_4 = 0$$

die *Gleichungen der Ecken des Koordinatentetraeders* (Fig. 302).

4. Analytische Berechtigung der Tetraederkoordinaten der Ebene. Durch Auflösen der vier Gleichungen (6) folgt mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ (Anm. 2, III, 2; 1, III, (8)):

$$(10)\quad \begin{cases} \varrho u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + a_4 u_4, \\ \varrho v = b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 + b_4 u_4, \\ \varrho w = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + c_4 u_4, \\ \varrho s = d_1 u_1 + d_2 u_2 + d_3 u_3 + d_4 u_4. \end{cases}$$

Daher gilt, wie in § 57, 2:

Zu jeder gegebenen Ebene Π *gehören vier ihren Verhältnissen nach bestimmte Tetraederkoordinaten* u_1, u_2, u_3, u_4, *und zu vier ihren Verhältnissen nach gegebenen Tetraederkoordinaten* u_1, u_2, u_3, u_4 *gehört eine bestimmte Ebene* Π.

5. Gegenseitige Abhängigkeit der Tetraederkoordinaten des Punktes und der Ebene. Die Definition (1) enthält, da sie wegen des unbestimmten ϱ nur von den Verhältnissen der sechszehn Koeffizienten a_1, b_1, ..., d_4 abhängt, *fünfzehn Konstanten.*

Die sechszehn Koeffizienten A_1, B_1, ..., D_4 in (6) sind als Unter-

determinanten von D durch die Koeffizienten $a_1, b_1, \ldots, d_4$ mitbestimmt. Umgekehrt sind aber auch diese ihren Verhältnissen nach durch jene bestimmt als Unterdeterminanten der Determinante der $A_1 \ldots D_4$ (§ 51, (18')).

Man kann daher ebensogut die sechszehn Koeffizienten von (6), *wie die sechszehn Koeffizienten von* (1) *als die ursprünglich gegebenen betrachten.*

In dieser Auffassung folgt durch Multiplikation der Gleichungen (10) mit x, y, z, t und Addition mit Hinblick auf (1) wiederum die Gleichung (5), und damit dual entsprechend wie in § 57, 3, daß *die Tetraederkoordinaten* x_1, x_2, x_3, x_4 *des Punktes zugleich die Koeffizienten seiner Gleichung:*

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4 = 0 \tag{11}$$

in laufenden Linienkoordinaten sind.

Die Tetraederkoordinaten des Punktes und der Ebene sind also wechselseitig derart voneinander abhängig, daß die Bedingung der vereinigten Lage von Punkt und Ebene in ihnen dieselbe bilineare Form (8) *oder* (11) *behält, wie in homogenen gemeinen Koordinaten* (vgl. § 47, (5)).

6. Das Koordinatentetraeder und die Multiplikatoren des neuen Koordinatensystems. Ist das neue *Koordinatensystem* der x_1, x_2, x_3, x_4 und u_1, u_2, u_3, u_4 *durch die vier Funktionen* X_1, X_2, X_3, X_4 in (1) mit ihren fünfzehn Konstantenverhältnissen *gegeben*, so ist *das Koordinatentetraeder* mit seinen Seitenflächen (2) und seinen Ecken (9) vollkommen bestimmt.

Ist dagegen das *Koordinatentetraeder gegeben*, so bestimmt es nur die vier *Gleichungen* (2) und damit zwölf Konstanten, die Verhältnisse $a_i : b_i : c_i : d_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, läßt aber jede der vier *Funktionen* X_1, X_2, X_3, X_4 noch um einen Faktor unbestimmt.

Will man bei fest angenommenen Koeffizienten $a_1, b_1, \ldots, d_4$ alle zu demselben Koordinatentetraeder (2) gehörigen Systeme von Tetraederkoordinaten umfassen, kann man die Definition (1) ersetzen durch:

$$\varrho x_1 = m_1 X_1, \quad \varrho x_2 = m_2 X_2, \quad \varrho x_3 = m_3 X_3, \quad \varrho x_4 = m_4 X_4, \tag{12}$$

wo m_1, m_2, m_3, m_4 vier „*Multiplikatoren*" sind, die ihren Verhältnissen nach *drei* völlig verfügbare *Konstanten* darstellen. Die Definition (12) ist *nicht allgemeiner* als (1); enthält sie doch, wie diese, die Verhältnisse von sechszehn Konstanten, nämlich $m_i a_i, m_i b_i, m_i c_i, m_i d_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$; aber es ist in der Form (12) der bei *festge-*

haltenem Koordinatentetraeder noch *veränderliche* Bestandteil des Koordinatensystems in Gestalt der *Multiplikatoren* m_i ausdrücklich kenntlich gemacht.

Neben (12) hat man alsdann an Stelle von (6):

$$\sigma u_1 = M_1 U_1, \quad \sigma u_2 = M_2 U_2, \quad \sigma u_3 = M_3 U_3, \quad \sigma u_4 = M_4 U_4, \tag{13}$$

wo die Multiplikatoren M_i von den Multiplikatoren m_i in (12) abhängig sind. Da nämlich die früheren, in (1) und (6) definierten Koordinaten x_i und u_i durch die jetzigen, in (12) und (13) definierten ausgedrückt, gleich $x_i : m_i$ und $u_i : M_i$ werden, so würde die Bedingung (11) der vereinigten Lage jetzt lauten:

$$\frac{u_1}{M_1} \cdot \frac{x_1}{m_1} + \frac{u_2}{M_2} \cdot \frac{x_2}{m_2} + \frac{u_3}{M_3} \cdot \frac{x_3}{m_3} + \frac{u_4}{M_4} \cdot \frac{x_4}{m_4} = 0.$$

Soll diese also auch in den neuen Koordinaten x_i, u_i die Form (11) behalten, so muß sein:

$$M_1 m_1 = M_2 m_2 = M_3 m_3 = M_4 m_4.$$

Ersetzt man die Definitionen (1) *und* (6) *durch* (12) *und* (13), *indem man bei gleichbleibendem Koordinatentetraeder die Multiplikatoren des Koordinatensystems ändert, so muß zwischen den Multiplikatoren M in* (13) *und* m_i *in* (12) *die Beziehung bestehen:*

$$M_1 : M_2 : M_3 : M_4 = \frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2} : \frac{1}{m_3} : \frac{1}{m_4}. \tag{14}$$

Dies erkennt man auch daraus, daß, wenn die Elemente a_i, b_i, c_i, d_i der Determinante (3) mit m_i multipliziert werden, die Unterdeterminannten A_i, B_i, C_i, D_i den Faktor $m_1 m_2 m_3 m_4 : m_i$ erhalten (Anm. 1, III, (2); IV, 5).

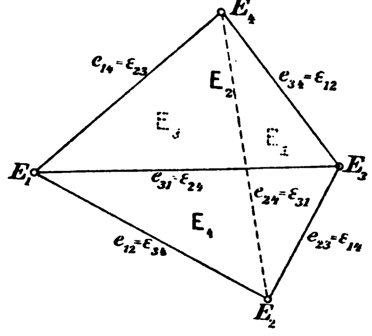


Fig. 303.

7. Die Bestandteile des Koordinatentetraeders. Wir bezeichnen die Ecken (9) des Koordinatentetraeders (Fig. 303) mit E_i und die Seitenflächen (2) mit E_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Der Ecke E_i *liegt die Seitenfläche* E_i *gegenüber* (Fig. 303). Wir bezeichnen ferner die sechs Kanten als Schnittlinien zweier Seitenflächen mit:

$$\varepsilon_{kl} = \mathsf{E}_k \times \mathsf{E}_l$$

und als Verbindungslinien zweier Eckpunkte mit:

$$e_{kl} = E_k E_l,$$

wo kl die Kombinationen durchläuft:

(15) $$kl = 23,\ 31,\ 12,\ 14,\ 24,\ 34.$$

Dabei ist:

$$\varepsilon_{kl} = e_{\overline{kl}},$$

wenn $\overline{kl}$ die zu kl „komplementäre“ Kombination der Reihe (15) ist, so daß kl und $\overline{kl}$ zusammen alle vier Zahlen 1, 2, 3, 4 umfassen (Fig. 303).

Je zwei Kanten e_{kl} und ε_{kl} sind Gegenkanten.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (2) und (9) der Seitenebenen und Eckpunkte in gemeinen Koordinaten folgt aus (1) und (6):

Für alle Punkte der Ebene E_i verschwindet die Tetraederkoordinate x_i.

Für alle Punkte der Kante ε_{kl} verschwinden x_k und x_l.

Für alle Ebenen durch die Ecke E_i verschwindet die Tetraederkoordinate u_i.

Für alle Ebenen durch die Kante e_{kl} verschwinden u_k und u_l.

Für die Ecke E_1 ist nur $x_1 \neq 0$ und kann wegen der Willkür des Faktors ϱ in (1) kurz $x_1 = 1$ gesetzt werden. So folgt allgemein:

Die Tetraederkoordinaten der vier Ecken des Koordinatentetraeders sind:

(16)

	x_1	x_1	x_3	x_4
E_1	1	0	0	0
E_2	0	1	0	0
E_3	0	0	1	0
E_4	0	0	0	1

Die Tetraederkoordinaten der vier Seitenflächen des Koordinatentetraeders sind:

(16′)

	u_1	u_2	u_3	u_4
E_1	1	0	0	0
E_2	0	1	0	0
E_3	0	0	1	0
E_4	0	0	0	1

(vgl. § 47, (19) und (20)).

8. Die Tetraederkoordinaten als multiplizierte Abstände. Um die analytisch in (1) und (6) eingeführten Tetraederkoordinaten geometrisch zu deuten, setzen wir zur Abkürzung:

(17) $$\varkappa_i = \varepsilon_i \sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2}, \quad \varepsilon_i = -\operatorname{sign.} d_i, \quad i = 1, 2, 2, 4.$$

Der senkrechte Abstand p_i des Punktes $P = x, y, z, t$, für den wir hierbei $t = 1$ nehmen, von der Ebene $X_i = 0$ ist dann nach § 41, (6):

(18) $$p_i = \frac{X_i}{\varkappa_i},$$

Der senkrechte Abstand q_i der Ebene $\Pi = u, v, w, s$, für die wir hierbei $s = 1$ nehmen, ist dann nach § 45, (15):

(18′) $$q_i = \frac{U_i}{-D_i\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}},$$

wobei zur Bestimmung der Vorzeichen von p_i und q_i die Ebenen E_i nach O gerichtet werden (vgl. § 41, **1**).

Die Definitionen (1) und (6) können daher folgendermaßen gedeutet werden (vgl. § 28, **8**; § 7, **6**):

Die Tetraederkoordinaten x_i eines Punktes P verhalten sich wie die mit den Konstanten $\varkappa_i$ multiplizierten Abstände p_i des Punktes von den Seitenflächen des Koordinatentetraeders:

$$(19) \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varkappa_1 p_1 : \varkappa_2 p_2 : \varkappa_3 p_3 : \varkappa_4 p_4.$$

Die Tetraederkoordinaten u_i einer Ebene Π verhalten sich wie die mit den Konstanten D_i multiplizierten Abstände q_i der Ebene von den Ecken des Koordinatentetraeders:

$$(19') \quad u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = D_1 q_1 : D_2 q_2 : D_3 q_3 : D_4 q_4.$$

Die Verhältnisse der vier Größen $\varkappa_i$, welche die Stelle der in § 57, **6** betrachteten *„Multiplikatoren"* vertreten, können *bei gegebenem Koordinatentetraeder* mit Rücksicht auf § 57, **6** noch beliebig angenommen werden.

9. Einführung von Einheitspunkt und Einheitsebene. Eine geometrische Deutung der Multiplikatoren des Koordinatensystems gewinnt man, indem man neben dem Koordinatentetraeder einen *„Einheitspunkt"* $E_0 = x_0, y_0, z_0, t_0$, bezüglich eine *„Einheitsebene"* $\mathsf{E}_0 = u_0, v_0, w_0, s_0$ als gegeben annimmt.

Legt man hierbei die zweite Definition (12) und (13) der Tetraederkoordinaten zugrunde und nimmt dabei:

$$(20) \qquad m_i = \frac{1}{X_i^0}, \qquad\qquad M_i = \frac{1}{U_i^0},$$

wo X_i^0 und U_i^0 durch Substitution der Koordinaten von E_0 und E_0 aus X_i und U_i entstehen, so *stellen sich die Tetraederkoordinaten durch die rechtwinkligen in der Form dar* (vgl. § 28, (21); § 7, (17)):

$$(21) \qquad \varrho x_i = \frac{X_i}{X_i^0}. \qquad\qquad (21') \qquad \sigma u_i = \frac{U_i}{U_i^0}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Der Punkt $E_0 = x_0, y_0, z_0, t_0$ und die Ebene $\mathsf{E}_0 = u_0, v_0, w_0, s_0$ selbst erhalten hiernach die Tetraederkoordinaten (vgl. § 57, (16); (16')):

(22)

	x_1	x_2	x_3	x_4
E_0	1	1	1	1

(22')

	u_1	u_2	u_3	u_4
E_0	1	1	1	1

worin auch die Erklärung der *Namen* Einheitspunkt und Einheitsebene liegt.

Da aber nach § 57, **6** die Multiplikatoren m_i und M_i der Beziehung (14) genügen müssen, so wird nach (20):

(23) $$U_1^0 : U_2^0 : U_3^0 : U_4^0 = \frac{1}{X_1^0} : \frac{1}{X_2^0} : \frac{1}{X_3^0} : \frac{1}{X_4^0}$$

und folgt mit Hinblick auf § 55, (27):

Einheitspunkt und Einheitsebene müssen als Harmonikalpunkt und Harmonikalebene zusammengehören.

Im Gegensatz zu den Gleichungen (1), die von den fünfzehn Verhältnissen der sechszehn Konstanten a_i, b_i, c_i, d_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ abhängen, enthalten die Gleichungen (21) nur die zwölf Verhältnisse $a_i : b_i : c_i : d_i$ (die Koordinaten der vier Ebenen (2)), daneben aber die drei Verhältnisse $x_0 : y_0 : z_0 : t_0$ (die Koordinaten des Punktes E_0), zusammen wieder fünfzehn Konstanten.

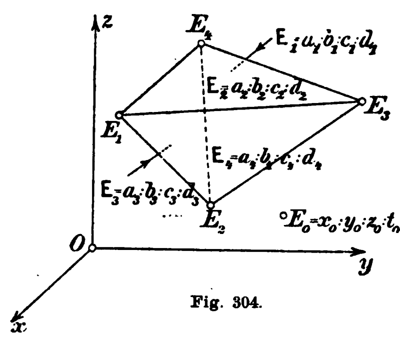


Fig. 304.

Das Koordinatensystem der Tetraederkoordinaten ist daher vollkommen bestimmt, wenn das Koordinatentetraeder und der Einheitspunkt gegeben ist (Fig. 304)

Die Beziehung zwischen Harmonikalebene u, v, w, s und Harmonikalpunkt x, y, z, t überhaupt ist nach § 55, (27):

$$U_1 : U_2 : U_3 : U_4 = \frac{1}{X_1} : \frac{1}{X_2} : \frac{1}{X_3} : \frac{1}{X_4}.$$

Drückt man diese nach (1) und (6) in Tetraederkoordinaten aus, so folgt:

Zwischen den Tetraederkoordinaten eines Punktes und seiner Harmonikalebene in bezug auf das Koordinatentetraeder bestehen stets die Gleichungen:[90])

(24) $$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3} : \frac{1}{x_4}$$

oder

$$u_1 x_1 = u_2 x_2 = u_3 x_3 = u_4 x_4;$$

und zwar nach (14) *unabhängig* davon, ob man die Definition (1), (6) oder (12), (13) der Tetraederkoordinaten gelten läßt (vgl. § 28, **11**).

10. Die Tetraederkoordinaten als Abstandsverhältnisse. Die Gleichungen (21) können mit Rücksicht auf (18) auch geschrieben werden:

$$\varrho x_i = \frac{p_i}{p_i^0}, \quad \sigma u_i = \frac{q_i}{q_i^0},$$

wo p_i^0 und q_i^0 die Abstände des Punktes E_0 von den Ebenen und der Ebene E_0 von den Ecken des Tetraeders sind und wie in § 57, 8

$t_0 = 1$ und $s_0 = 1$ genommen ist. Der Faktor:

$$\sqrt{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2} : \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

aus (18′) geht dabei in σ ein. Es folgt daher unabhängig von der Lage von O (vgl. § 57, 8):

Die Tetraederkoordinaten eines Punktes P verhalten sich wie die Abstände p_i des Punktes von den Seitenflächen des Tetraeders, dividiert durch die entsprechenden Abstände p_i^0 des Einheitspunktes von diesen:

Die Tetraederkoordinaten einer Ebene Π verhalten sich wie die Abstände q_i der Ebene von den Ecken des Tetraeders, dividiert durch die entsprechenden Abstände q_i^0 der Einheitsebene von diesen:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \frac{p_1}{p_1^0} : \frac{p_2}{p_2^0} : \frac{p_3}{p_3^0} : \frac{p_4}{p_4^0}, \tag{25}$$

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = \frac{q_1}{q_1^0} : \frac{q_2}{q_2^0} : \frac{q_3}{q_3^0} : \frac{q_4}{q_4^0}. \tag{25'}$$

11. Die Tetraederkoordinaten als multiplizierte Teilungsverhältnisse.

Legt man durch die Kante ε_{23}, in der sich die Seitenflächen E_2 und E_3 des Koordinatentetraeders schneiden, eine Ebene E_{23}, die den Winkel der beiden Seitenflächen in dem multiplizierten Sinusverhältnis:

$$\mu_{23} = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_3} \lambda_{23} = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_3} \frac{\sin \mathsf{E}_2 \mathsf{E}_{23}}{\sin \mathsf{E}_3 \mathsf{E}_{23}} \tag{26}$$

teilt, so ist die Gleichung dieser Ebene nach § 42, (15) in laufenden Koordinaten x, y, z, t:

$$X_2 - \mu_{23} X_3 = 0. \tag{27}$$

Geht die Ebene E_{23} durch einen gegebenen Punkt $P = x, y, z, t$, so ist durch diesen das Teilungsverhältnis bestimmt, nämlich:

$$\mu_{23} = \frac{X_2}{X_3}, \tag{28}$$

wo nunmehr in X_2 und X_3 unter x, y, z, t nicht wie in (27) die laufenden, sondern die Koordinaten

Nimmt man auf der Kante e_{23}, die die Eckpunkte E_2 und E_3 des Koordinatentetraeders verbindet, einen Punkt E_{23} an, der die Strecke der beiden Punkte in dem multiplizierten Streckenverhältnis:

$$\mu_{23} = \frac{D_2}{D_3} \lambda_{23} = \frac{D_2}{D_3} \cdot \frac{E_2 E_{23}}{E_3 E_{23}} \tag{26'}$$

teilt, so ist die Gleichung dieses Punktes nach § 46 (3) in laufenden Koordinaten u, v, w, s:

$$U_2 - \mu_{23} U_3 = 0. \tag{27'}$$

Liegt der Punkt E_{23} auf einer gegebenen Ebene $\Pi = u, v, w, s$, so ist durch diese das Teilungsverhältnis bestimmt, nämlich:

$$\mu_{23} = \frac{U_2}{U_3}, \tag{28'}$$

wo nunmehr in U_2 und U_3 unter u, v, w, s nicht wie in (27′) die laufenden, sondern die Koordinaten

des gegebenen Punktes P verstanden sind (Fig. 305a).

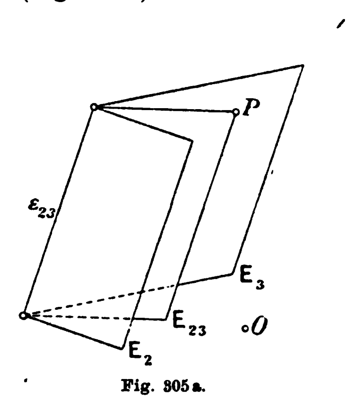


Fig. 305a.

der gegebenen Ebene Π verstanden sind (Fig. 305b).

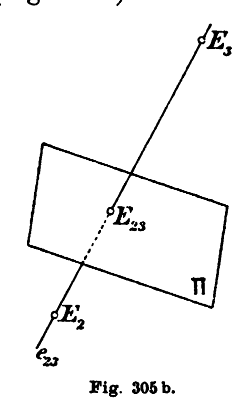


Fig. 305b.

Dann folgt aber aus (28) und (28') mit Rücksicht auf (1) und (6):

(29) $$\mu_{23} = \frac{x_2}{x_3}.$$

(29') $$\mu_{23} = \frac{u_2}{u_3}.$$

Die sechs Verhältnisse der Tetraederkoordinaten des Punktes P sind die multiplizierten Sinusverhältnisse, nach denen die Verbindungsebenen E_{hi} des Punktes mit den sechs Kanten ε_{hi} des Koordinatentetraeders die bezüglichen Kantenwinkel teilen:

(30) $$\frac{x_h}{x_i} = \frac{\varkappa_h}{\varkappa_i} \frac{\sin \mathsf{E}_h \mathsf{E}_{hi}}{\sin \mathsf{E}_i \mathsf{E}_{hi}}.$$

Die sechs Verhältnisse der Tetraederkoordinaten der Ebene Π sind die multiplizierten Teilungsverhältnisse, nach denen die Schnittpunkte E_{hi} der Ebene mit den sechs Kanten e_{hi} des Koordinatentetraeders die bezüglichen Kantenlängen teilen (vgl. § 28, **13**):

(30') $$\frac{u_h}{u_i} = \frac{D_h}{D_i} \cdot \frac{E_h E_{hi}}{E_i E_{hi}}.$$

Die Lage des Punktes O (Fig. 305a) muß zur eindeutigen Bestimmung des Teilungsverhältnisses (28) angegeben sein, wie in § 57, 8.

Bei gegebenen Tetraederkoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 sind nach (30) die sechs Verhältnisse $\sin \mathsf{E}_h \mathsf{E}_{hi} : \mathsf{E}_i \mathsf{E}_{hi}$ und damit die sechs Ebenen E_{hi} bestimmt. Schon solche drei von diesen sechs Ebenen, die durch drei in einer Seitenfläche des Tetraeders liegende Kanten gehen, bestimmen im allgemeinen als ihren Schnittpunkt den Punkt P. Daß die drei anderen Ebenen auch durch P gehen, folgt aus dem Transversalensatz § 55, (14), indem für die dortigen Konstanten p_i hier $x_i : \varkappa_i$ genommen wird ($i = 1, 2, 3, 4$).

12. Die Tetraederkoordinaten als Doppelverhältnisse. Die multiplizierten Teilungsverhältnisse von § 57, **11** können als Doppel-

verhältnisse gedeutet werden, wenn man Einheitspunkt und Einheitsebene (vgl. § 57, 9) benutzt.

Legt man durch die Kante ε_{23} neben den Ebenen E_2 und E_3 eine dritte Ebene E_{23}^0, die die Kante ε_{23} mit dem Einheitspunkt E_0 verbindet und dann eine vierte Ebene E_{23}, die mit den drei anderen das Doppelverhältnis (Fig. 306a)

$$(31) \qquad \mu_{23} = (\mathsf{E}_2 \mathsf{E}_3 \mathsf{E}_{23} E_{23}^0) = \frac{\sin \mathsf{E}_2 \mathsf{E}_{23}}{\sin \mathsf{E}_3 \mathsf{E}_{23}} : \frac{\sin \mathsf{E}_2 \mathsf{E}_{23}^0}{\sin \mathsf{E}_3 \mathsf{E}_{23}^0}$$

bildet, so ist die Gleichung dieser vierten Ebene nach § 47, (23) in laufenden Koordinaten x, y, z, t:

$$(32) \qquad \frac{X_2}{X_2^0} - \mu_{23} \frac{X_3}{X_3^0} = 0.$$

Geht die Ebene durch einen gegebenen Punkt $P = x, y, z, t$, so ist durch diesen das Doppelverhältnis bestimmt, und zwar:

$$(33) \qquad \mu_{23} = \frac{X_2}{X_2^0} : \frac{X_3}{X_3^0},$$

wo nunmehr in X_2 und X_3 unter x, y, z, t die Koordinaten des gegebenen Punktes P verstanden werden. Dann folgt aber aus (33) mit Hinblick auf (21):

$$(34) \qquad \mu_{23} = \frac{x_2}{x_3}.$$

Es ergibt sich daher unter Zufügung des dualen Satzes (Fig. 306b):

Die sechs Verhältnisse der Tetraederkoordinaten des Punktes P sind

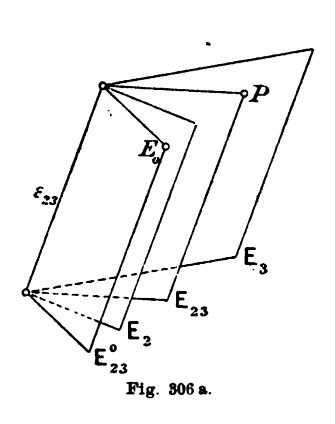


Fig. 306 a.

die Doppelverhältnisse, nach denen die Verbindungsebenen E_{hi} und E_{hi}^0 des Punktes P und des Einheits-

Die sechs Verhältnisse der Tetraederkoordinaten der Ebene Π sind

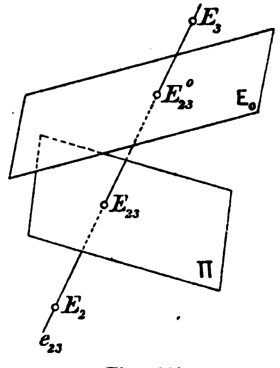


Fig. 306 b.

die Doppelverhältnisse, nach denen die Schnittpunkte E_{hi} und E_{hi}^0 der Ebene Π und der Einheitsebene E_0

punktes E_0 *mit den Kanten* $\mathsf{E}_h \times \mathsf{E}_i$ *des Koordinatentetraeders die bezüglichen Flächenwinkel teilen:*

$$(35)\quad \begin{cases} x_h : x_i = \dfrac{\sin \mathsf{E}_h \mathsf{E}_{hi}}{\sin \mathsf{E}_i \mathsf{E}_{hi}} : \dfrac{\sin \mathsf{E}_h \mathsf{E}_{hi}^0}{\sin \mathsf{E}_i \mathsf{E}_{hi}^0} \\ \quad = (\mathsf{E}_h \mathsf{E}_i \mathsf{E}_{hi} \mathsf{E}_{hi}^0) \end{cases}$$

mit den Kanten $E_h E_i$ *des Koordinatentetraeders die bezüglichen Kantenlängen teilen:*

$$(35')\quad \begin{cases} u_h : u_i = \dfrac{E_h E_{hi}}{E_i E_{hi}} : \dfrac{E_h E_{hi}^0}{E_i E_{hi}^0} \\ \quad = (E_h E_i E_{hi} E_{hi}^0). \end{cases}$$

Diese Definition der Tetraederkoordinaten setzt nur das Koordinatentetraeder mit Einheitspunkt und Einheitsebene voraus und ist vollkommen dual für Punkt und Ebene (vgl. § 28, **14**).

13. Projektionen des laufenden Punktes aus einer Kante auf die Gegenkante.

Die vier durch die Kante ε_{23} gehenden Ebenen (Fig. 306a) E_2, E_3, E_{23}, E_{23}^0 schneiden die gegenüberliegende Kante e_{23} (Fig. 307a) in den Punkten E_3, E_2, P_{23}, E_{23}^0. Nach § 52, **4** und § 3, (19) ist daher:

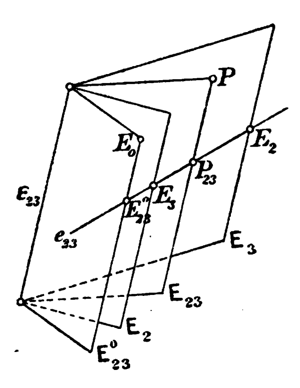


Fig. 307 a.

$$(36)\quad \begin{cases} \dfrac{x_2}{x_3} = (\mathsf{E}_2 \mathsf{E}_3 \mathsf{E}_{23} \mathsf{E}_{23}^0) = \\ (E_3 E_2 P_{23} E_{23}^0) = (E_2 E_3 E_{23}^0 P_{23}). \end{cases}$$

Sind x_1, x_2, x_3, x_4 *die Tetraederkoordinaten eines beliebigen Punktes* P, *und bedeuten* P_{23} *und* E_{23}^0 *die Punkte, in denen die Verbindungsebenen* E_{23} *und* E_{23}^0 *von* P *und* E_0

Die vier auf der Kante e_{23} liegenden Punkte (Fig. 306b) E_2, E_3, E_{23}, E_{23}^0 seien mit der gegenüberliegenden Kante ε_{23} (Fig. 307b) durch die Ebenen E_3, E_2, Π_{23}, E_{23}^0 verbunden. Nach § 52, **4** ist daher:

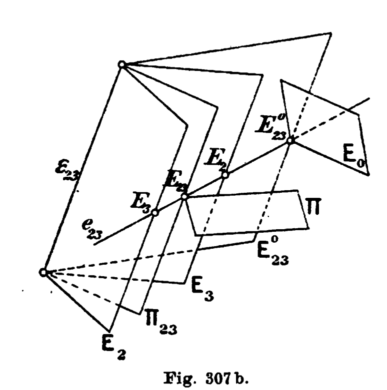


Fig. 307 b.

$$(36')\quad \begin{cases} \dfrac{u_2}{u_3} = (E_2 E_3 E_{23} E_{23}^0) = \\ (\mathsf{E}_3 \mathsf{E}_2 \Pi_{23} \mathsf{E}_{23}^0) = (\mathsf{E}_2 \mathsf{E}_3 \mathsf{E}_{23}^0 \Pi_{23}). \end{cases}$$

Sind u_1, u_2, u_3, u_4 *die Tetraederkoordinaten einer beliebigen Ebene* Π, *und bedeuten* Π_{23} *und* E_{23}^0 *die Ebenen, die die Schnittpunkte* E_{23} *und* E_{23}^0 *von* Π *und* E_0 *auf der Kante*

mit der Kante ε_{23} die Gegenkante e_{23} schneiden, so sind x_2, x_3 zugleich die Zweieckskoordinaten des Punktes P_{23} auf der Kante e_{23} in bezug auf das Koordinatenzweieck $E_2 E_3$ und den Einheitspunkt E_{23}^0 (vgl. § 8, (4)).

Für alle Punkte x_1, x_2, x_3, x_4 auf einer durch die Kante ε_{23} gehenden Ebene (E_{23} in Fig. 307a) hat daher das Verhältnis der Koordinaten x_2, x_3 denselben Wert.

e_{23} mit der Gegenkante ε_{23} verbinden, so sind u_2, u_3 zugleich die Zweiflachskoordinaten der Ebene Π_{23} an der Kante ε_{23} in bezug auf das Koordinatenzweiflach $\mathsf{E}_2 \mathsf{E}_3$ und die Einheitsebene E_{23}^0 (vgl. § 56, (3)).

Für alle Ebenen u_1, u_2, u_3, u_4 durch einen auf der Kante e_{23} liegenden Punkt (E_{23} in Fig. 307b) hat daher das Verhältnis der Koordinaten u_2, u_3 denselben Wert.

14. Punkte auf einer Kante und Ebenen durch eine Kante. Insbesondere gibt die Annahme $P = P_{23}$ und $\Pi = \Pi_{23}$ aus § 57, **13** die Sätze (vgl. § 28, **16**):

Für einen Punkt $0, x_2, x_3, 0$ *auf der Kante e_{23}* (vgl. § 57, 7) *sind die beiden Tetraederkoordinaten x_2, x_3 zugleich Zweieckskoordinaten in bezug auf das System $E_2 E_3$, E_{23}^0.*

Für eine Ebene $0, u_2, u_3, 0$ *durch die Kante ε_{23}* (vgl. § 57, 7) *sind die beiden Tetraederkoordinaten u_2, u_3 zugleich Zweiflachskoordinaten in bezug auf das System $\mathsf{E}_2 \mathsf{E}_3$, E_{23}^0.*

15. Projektion des laufenden Punktes aus einer Ecke auf die Gegenfläche.

Die vier durch die Kante ε_{23} gehenden Ebenen E_2, E_3, E_{23}, E_{23}^0

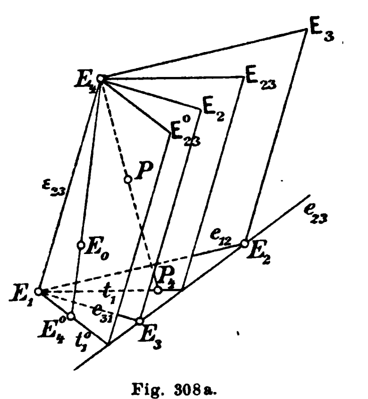


Fig. 308a.

schneiden die Ebene $\mathsf{E}_4 = E_1 E_2 E_3$ in einem perspektiven Strahlbüschel e_{31}, e_{12}, t_1, t_1^0 (Fig. 308a.) Daher ist nach § 52, **9**:

Die Verbindungslinien der vier auf der Kante e_{23} liegenden Punkte

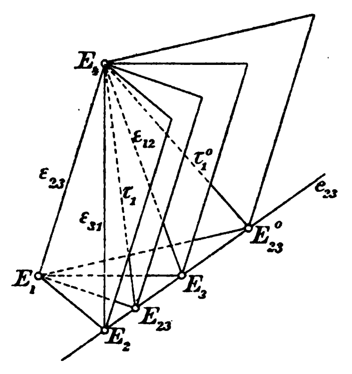


Fig. 308b.

E_2, E_3, E_{23}, E_{23}^0 mit der Ecke $E_4 = \mathsf{E}_1 \times \mathsf{E}_2 \times \mathsf{E}_3$ bilden einen zu den vier Punkten perspektiven Stahlbüschel ε_{31}, ε_{12}, τ_1, τ_1^0 (Fig. 308b).

$$(37)\quad \begin{cases} \dfrac{x_2}{x_3} = (\mathsf{E}_2\mathsf{E}_3\mathsf{E}_{23}\mathsf{E}_{23}^0) = \\ \qquad (e_{31}e_{12}t_1t_1^0). \end{cases}$$

Da nun die Ebene E_{23} durch P und E_4, also auch durch die Verbindungslinie E_4P geht, so geht sie auch durch den Schnittpunkt P_4 dieser Verbindungslinie mit der Ebene E_4. Der Punkt P_4 liegt also auch auf $t_1 = \mathsf{E}_{23} \times \mathsf{E}_4$, so daß t_1 *die Verbindungslinie von* E_1 *mit*

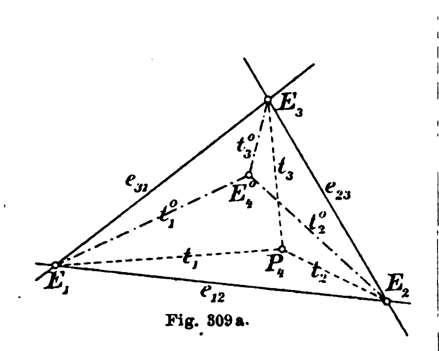


Fig. 309a.

P_4 ist. Ebenso ist t_1^0 *die Verbindungslinie von* E_1 *mit* E_4^0, dem Schnittpunkt der Geraden E_4E_0 mit E_4.

Analoges wie für die Kante ε_{23} gilt für die Kanten ε_{31} und ε_{12}.

Daher folgt mit Rücksicht auf § 28, **14**:

Sind x_1, x_2, x_3, x_4 *die Tetraederkoordinaten eines beliebigen Punktes* P, *und bedeuten* P_4 *und* E_4^0 (Fig. 309a) *die Punkte, in denen die Verbindungslinien von* P *und* E_0 *mit der Ecke* E_4 *die Gegenebene* E_4 *schneiden, so sind* x_1, x_2, x_3 *zugleich die Dreieckskoordinaten des*

Daher ist nach § 5, **3**:

$$(37')\quad \begin{cases} \dfrac{u_2}{u_3} = (E_2E_3E_{23}E_{23}^0) = \\ \qquad (\varepsilon_{31}\varepsilon_{12}\tau_1\tau_1^0). \end{cases}$$

Da nun der Punkt E_{23} auf Π und E_4, also auch auf der Schnittlinie $\mathsf{E}_4 \times \Pi$ liegt, so liegt er auch auf der Verbindungsebene Π_4 dieser Schnittlinie mit der Ecke E_4. Die Ebene Π_4 geht also auch durch $\tau_1 = E_{23}E_4$, so daß τ_1 *die Schnitt-*

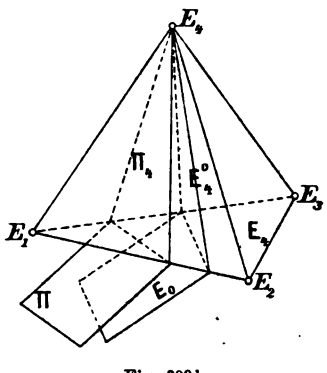


Fig. 309b.

linie von E_1 *und* Π_4 *ist. Ebenso ist* τ_1^0 *die Schnittlinie von* E_1 *mit* E_4^0, der Verbindungsebene der Geraden $\mathsf{E}_4 \times \mathsf{E}_0$ mit E_4 (vgl. auch Fig. 307b; 309b).

Analoges wie für die Kante e_{23} gilt für die Kanten e_{31} und e_{12}.

Daher folgt mit Rücksicht auf § 56, **9**:

Sind u_1, u_2, u_3, u_4 *die Tetraederkoordinaten einer beliebigen Ebene* Π, *und bedeuten* Π_4 *und* E_4^0 (Fig. 309b) *die Ebenen, welche die Schnittlinien von* Π *und* E_0 *in der Ebene* E_4 *mit der Gegenecke* E_4 *verbinden, so sind* u_1, u_2, u_3 *zugleich die Drei-*

Punktes P_4 in bezug auf das Koordinatendreieck $E_1 E_2 E_3$ und den Einheitspunkt E_4^0; und nach § 56, **10** die Dreiflachskoordinaten der Verbindungslinie des Punktes P mit der Ecke E_4 in bezug auf das Dreikant $e_{14} e_{24} e_{34}$ und den Einheitsstrahl $E_4 E_0$.

Für alle Punkte x_1, x_2, x_3, x_4 einer durch die Ecke E_4 gehenden Geraden haben daher die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ dieselben Werte.

flachskoordinaten der Ebene Π_4 in bezug auf das Koordinatendreiflach $\mathsf{E}_1 \mathsf{E}_2 \mathsf{E}_3$ und die Einheitsebene E_4^0; und nach § 56, **10** die Dreieckskoordinaten der Schnittlinie der Ebene Π mit der Ebene E_4 in bezug auf das Dreieck $\varepsilon_{14} \varepsilon_{24} \varepsilon_{34}$ und den Einheitsstrahl $\mathsf{E}_4 \times \mathsf{E}_0$.

Für alle Ebenen u_1, u_2, u_3, u_4 durch eine in der Ebene E_4 liegende Gerade haben daher die Verhältnisse $u_1 : u_2 : u_3$ dieselben Werte.

16. Punkte in einer Seitenfläche und Ebenen durch eine Ecke. Mit den besonderen Annahmen $P = P_4$ und $\Pi = \Pi_4$ folgt aus § 57, **15**:

Für einen Punkt $x_1, x_2, x_3, 0$ in der *Ebene* E_4 (vgl. § 57, 7) *sind die drei Tetraederkoordinaten x_1, x_2, x_3 zugleich Dreieckskoordinaten im System $E_1 E_2 E_3$, E_4^0.*

Für eine Ebene $u_1, u_2, u_3, 0$ durch die *Ecke* E_4 (vgl. § 57, 7) *sind die drei Tetraederkoordinaten u_1, u_2, u_3 zugleich Dreiflachskoordinaten im System $\mathsf{E}_1 \mathsf{E}_2 \mathsf{E}_3$, E_4^0.*

17. Übergang von der Harmonikalebene auf die Harmonikale. Bringt man die Sätze von § 57, **15** und **16** mit der Gleichung (24), sowie mit § 28, (24) in Verbindung, so ergibt sich:

Durchläuft ein Punkt P die Verbindungslinie der Ecke E_4 mit einem beliebigen Punkt P_4 der Gegenfläche E_4 (Fig. 308a), *so dreht sich die Harmonikalebene Π des Punktes P um eine Gerade, die in der Ebene E_4 liegt und die Harmonikale des Punktes P_4 in bezug auf das Dreieck $E_1 E_2 E_3$ ist.*

§ 58. Gleichungen von Punkten und Ebenen in Tetraederkoordinaten.

1. Bedingung der vereinigten Lage. Beim Übergang von den homogenen gemeinen Koordinaten x, y, z, t und u, v, w, s zu den Tetraederkoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 und u_1, u_2, u_3, u_4 findet nach § 57 (5) die Beziehung statt:

$$(1) \qquad ux + vy + wz + st = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4.$$

Mit Rücksicht auf § 47, 4 folgt daher die für den Zusammenhang zwischen Punkt- und Ebenenkoordinaten wesentliche Eigenschaft:

Ein Punkt und eine Ebene mit den Tetraederkoordinaten $x_1, x_2,$

x_3, x_4 und u_1, u_2, u_3, u_4 liegen immer dann und nur dann vereinigt, wenn:

(2) $$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0.$$

2. Die Gleichungen der Ebene und des Punktes. Je nachdem man daher u_1, u_2, u_3, u_4 als fest und x_1, x_2, x_3, x_4 als veränderlich ansieht oder umgekehrt, ergeben sich die beiden Hauptsätze (§ 47, **3**):

Sind u_1, u_2, u_3, u_4 die Koordinaten einer Ebene, so ist:[61])

(3) $$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$$

die Gleichung der Ebene in laufenden Punktkoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4.

Umgekehrt sind *die Koeffizienten der Gleichung* (3) einer Ebene stets zugleich deren *Koordinaten.*

Sind x_1, x_2, x_3, x_4 die Koordinaten eines Punktes, so ist:[71])

(3') $$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4 = 0$$

die Gleichung des Punktes in laufenden Ebenenkoordinaten u_1, u_2, u_3, u_4.

Umgekehrt sind *die Koeffizienten der Gleichung* (3') eines Punktes stets zugleich dessen *Koordinaten.*

3. Verkürzte Gleichungen von Ebenen und Punkten. Die Koordinaten x_1, x_2, x_3, $x_4 = 0, 0, 0, 1$ der Ecke E_4 (vgl. § 57, (16)) genügen immer dann und nur dann der Gleichung (3), wenn $u_4 = 0$ ist, also mit Zufügung des dualen Satzes (§ 40, (14); (15); § 47, (8)):

Eine Ebene geht immer dann und nur dann durch die Ecke E_4 des Koordinatentetraeders, wenn ihre Gleichung die Form hat:

(4) $$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0.$$

Ein Punkt liegt immer dann und nur dann in der Ebene E_4 des Koordinatentetraeders, wenn seine Gleichung die Form hat:

(4') $$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0.$$

Ebenso folgt:

Eine Ebene geht immer dann und nur dann durch die Kante $e_{14} = E_1E_4$ des Koordinatentetraeders, wenn ihre Gleichung die Form hat:

(5) $$u_2x_2 + u_3x_3 = 0.$$

Ein Punkt liegt immer dann und nur dann auf der Kante $\varepsilon_{14} = \mathsf{E}_1 \times \mathsf{E}_4$ des Koordinatentetraeders, wenn seine Gleichung die Form hat:

(5') $$x_2u_2 + x_3u_3 = 0.$$

Hieran schließen sich unmittelbar in Übereinstimmung mit § 57, **13** die Bemerkungen:

Die Verbindungsebene eines beliebigen Punktes x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0 mit der Kante $e_{14} = \varepsilon_{23}$ hat in laufenden Punktkoordinaten die Gleichung:

(6) $$x_2 : x_3 = x_2^0 : x_3^0.$$

Der Schnittpunkt einer beliebigen Ebene u_1^0, u_2^0, u_3^0, u_4^0 mit der Kante $\varepsilon_{14} = e_{23}$ hat in laufenden Ebenenkoordinaten die Gleichung:

(6') $$u_2 : u_3 = u_2^0 : u_3^0.$$

Die Gleichung der Seitenfläche E_k ist:

(7) $x_k = 0.$

Die Gleichung der Ecke E_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ ist:

(7′) $u_k = 0.$

4. Identität zwischen den Gleichungen von zwei Ebenen oder zwei Punkten. Der Umstand, daß die Verhältnisse der vier Tetraederkoordinaten einer Ebene oder eines Punktes in umkehrbar eindeutiger Beziehung mit der Ebene oder dem Punkte stehen (vgl. § 57, 2; 4) findet wiederum seinen Ausdruck in dem Satze (vgl. § 51, 1):

Die beiden Ebenen:

$$(8)\quad \begin{cases} X = u_1 x_1 + u_2 x_2 \\ \qquad + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0, \\ X_1 = u_1^{(1)} x_1 + u_2^{(1)} x_2 \\ \qquad + u_3^{(1)} x_3 + u_4^{(1)} x_4 = 0 \end{cases}$$

fallen immer dann und nur dann zusammen, wenn eine Identität von der Form:

$$(9)\quad \lambda X + \lambda_1 X_1 = 0$$

besteht.

Die beiden Punkte:

$$(8')\quad \begin{cases} U = x_1 u_1 + x_2 u_2 \\ \qquad + x_3 u_3 + x_4 u_4 = 0, \\ U_1 = x_1^{(1)} u_1 + x_2^{(1)} u_2 \\ \qquad + x_3^{(1)} u_3 + x_4^{(1)} u_4 = 0 \end{cases}$$

fallen immer dann und nur dann zusammen, wenn eine Identität von der Form:

$$(9')\quad \lambda U + \lambda_1 U_1 = 0$$

besteht.

5. Unterdeterminanten aus den Koeffizienten der Gleichungen zweier Ebenen oder zweier Punkte. Dieselben Sätze können auch so ausgesprochen werden (§ 51, 2):

Die beiden Ebenen (8) *fallen zusammen, wenn die Matrix der Koeffizienten verschwindet, also:*

$$(10)\quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & u_3^{(1)} & u_4^{(1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Man könnte die Bedingungen (10) als die *Gleichungen der Ebene* $u_k^{(1)}$ *in Ebenenkoordinaten* u_k bezeichnen, da sie mit (vgl. (14)):

$$(11)\quad \varrho u_k = u_k^{(1)},\quad k = 1, 2, 3, 4$$

gleichbedeutend sind.

Ist die Bedingung (10) *nicht erfüllt, so haben die beiden Ebenen* (8) *eine Gerade gemein und die Unterdeterminanten:*

Die beiden Punkte (8′) *fallen zusammen, wenn die Matrix der Koeffizienten verschwindet, also:*

$$(10')\quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & x_4^{(1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Man könnte die Bedingungen (10′) als die *Gleichungen des Punktes* $x_k^{(1)}$ *in Punktkoordinaten* x_k bezeichnen, da sie mit:

$$(11')\quad \varrho x_k = x_k^{(1)},\quad k = 1, 2, 3, 4.$$

gleichbedeutend sind.

Ist die Bedingung (10′) *nicht erfüllt, so haben die beiden Punkte* (8′) *eine Verbindungslinie und die Unterdeterminanten:*

$$q_{kl} = \begin{vmatrix} u_k & u_l \\ u_k^{(1)} & u_l^{(1)} \end{vmatrix}$$

sind die Achsenkoordinaten der Geraden,

$$p_{kl} = \begin{vmatrix} x_k & x_l \\ x_k^{(1)} & x_l^{(1)} \end{vmatrix}$$

sind die Strahlenkoordinaten der Linie,

auf die wir in § 59, **1** zurückkommen.

6. Identität zwischen den Gleichungen von drei Ebenen und drei Punkten. In derselben Weise wie in § 51, **3** gelten die Sätze:

Die drei Ebenen:

$$(12) \begin{cases} X = u_1x_1 + u_2x_2 \\ \quad + u_3x_3 + u_4x_4 = 0, \\ X_1 = u_1^{(1)}x_1 + u_2^{(1)}x_2 \\ \quad + u_3^{(1)}x_3 + u_4^{(1)}x_4 = 0, \\ X_2 = u_1^{(2)}x_1 + u_2^{(2)}x_2 \\ \quad + u_3^{(2)}x_3 + u_4^{(2)}x_4 = 0 \end{cases}$$

gehen durch eine Gerade, wenn eine Identität von der Form:

$$(13) \quad \lambda X + \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = 0$$

besteht.

Die drei Punkte:

$$(12') \begin{cases} U = x_1u_1 + x_2u_2 \\ \quad + x_3u_3 + x_4u_4 = 0, \\ U_1 = x_1^{(1)}u_1 + x_2^{(1)}u_2 \\ \quad + x_3^{(1)}u_3 + x_4^{(1)}u_4 = 0, \\ U_2 = x_1^{(2)}u_1 + x_2^{(2)}u_2 \\ \quad + x_3^{(2)}u_3 + x_4^{(2)}u_4 = 0 \end{cases}$$

liegen auf einer Geraden, wenn eine Identität von der Form:

$$(13') \quad \lambda U + \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 = 0$$

besteht.

7. Unterdeterminanten aus den Koeffizienten der Gleichungen dreier Ebenen oder dreier Punkte. Dieselbe notwendige und hinreichende Bedingung kann wie in § 51, **4** in die Form gekleidet werden:

Die drei Ebenen (12) *gehen durch eine Gerade, wenn die Matrix der Koeffizienten verschwindet, also:*

$$(14) \quad \begin{Vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & u_3^{(1)} & u_4^{(1)} \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & u_3^{(2)} & u_4^{(2)} \end{Vmatrix} = 0.$$

Die drei Punkte (12') *liegen in einer Geraden, wenn die Matrix der Koeffizienten verschwindet, also:*

$$(14') \quad \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & x_4^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & x_4^{(2)} \end{Vmatrix} = 0.$$

Bei gegebenen $u_k^{(1)}$ und $u_k^{(2)}$ ist (14) die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die veränderliche Ebene u durch die Schnittlinie der gegebenen geht oder:

Die Bedingungen (14) *sind zugleich die Gleichungen der Schnittlinie der beiden Ebenen $u_k^{(1)}$ und $u_k^{(2)}$ in laufenden Ebenenkoordinaten u_k* (vgl. § 59, (12)).

Ist die Bedingung (14) nicht

Die Bedingungen (14') *sind zugleich die Gleichungen der Verbindungslinie der beiden Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ in laufenden Punktkoordinaten x_k* (vgl. § 59, (10)).

Ist die Bedingung (14') nicht

erfüllt, so haben die drei Ebenen (12) einen Punkt gemein, und die dreireihigen Unterdeterminanten der Matrix sind dessen Koordinaten.

erfüllt, so haben die drei Punkte (12') eine Ebene gemein, und die dreireihigen Unterdeterminanten der Matrix sind deren Koordinaten.

8. Gleichung des Ebenenbüschels oder der Punktreihe. An die Identität (13) knüpft sich wiederum die Darstellung des Ebenenbüschels. Die grundlegende Beziehung (1) gibt auf zwei Ebenen mit den beiderseitigen Koordinaten u_1, v_1, w_1, s_1; $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}, u_4^{(1)}$ und u_2, v_2, w_2, s_2; $u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}, u_4^{(2)}$ angewendet:

$$(15)\quad \begin{cases} u_1 x + v_1 y + w_1 z + s_1 t = u_1^{(1)} x_1 + u_2^{(1)} x_2 + u_3^{(1)} x_3 + u_4^{(1)} x_4 \\ u_2 x + v_2 y + w_2 z + s_2 t = u_1^{(2)} x_1 + u_2^{(2)} x_2 + u_3^{(2)} x_3 + u_4^{(2)} x_4; \end{cases}$$

damit aber folgt auch die Übertragung der Sätze § 47, **11** auf Tetraederkoordinaten:

Sind:[69])

$$(16)\quad X_1 = 0, \quad X_2 = 0$$

in (12) *die Gleichungen der beiden Grundebenen* Γ_1, Γ_2 *eines Ebenenbüschels, so ist die Gleichung der laufenden Ebene* Π *des Büschels:*

$$(17)\quad \frac{X_1}{X_1^0} - \mu \frac{X_2}{X_2^0} = 0;$$

hier ist $x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0$ *ein zur Bestimmung der Einheitsebene* Γ_0 *gegebener Punkt, sind* X_1^0, X_2^0 *die für ihn gebildeten Ausdrücke* X_1, X_2, *und bedeutet* μ *das Doppelverhältnis:*

$$(18)\quad \mu = (\Gamma_1 \Gamma_2 \Pi \Gamma_0).$$

Sind:[74])

$$(16')\quad U_1 = 0, \quad U_2 = 0$$

in (12') *die Gleichungen der beiden Grundpunkte* G_1, G_2 *einer Punktreihe, so ist die Gleichung des laufenden Punktes* P *der Punktreihe:*

$$(17')\quad \frac{U_1}{U_1^0} - \mu \frac{U_2}{U_2^0} = 0;$$

hier ist $u_1^0, u_2^0, u_3^0, u_4^0$ *eine zur Bestimmung des Einheistpunktes* G_0 *gegebene Ebene, sind* U_1^0, U_2^0 *die für ihn gebildeten Ausdrücke* U_1, U_2, *und bedeutet* μ *das Doppelverhältnis:*

$$(18')\quad \mu = (G_1 G_2 P G_0).$$

Die Gleichung (17) enthält entsprechend § 47, **11** von den in ihr vorkommenden Tetraederkoordinaten je nur die Verhältnisse.

Schreibt man (17) und (17') in der kürzeren Form:

$$(19)\quad X_1 - \mu X_2 = 0, \qquad (19')\quad U_1 - \mu U_2 = 0,$$

so ist μ schlechthin das multiplizierte Teilungsverhältnis, nach dem die Ebene Π den Winkel von Γ_1 und Γ_2 und der Punkt P die Strecke $G_1 G_2$ teilt:

9. Parameterdarstellung des Ebenenbüschels und der Punktreihe. Im Anschluß an (19) und (19') ergibt sich dann nach § 58, 2:

Sind $u_k^{(1)}$ *und* $u_k^{(2)}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$

Sind $x_k^{(1)}$ *und* $x_k^{(2)}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$

die Koordinaten der beiden Grundebenen eines Ebenenbüschels, so sind die Koordinaten der laufenden Ebene des Büschels mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ *in der Form darstellbar:*[80])

(20) $\varrho u_k = u_k^{(1)} - \mu u_k^{(2)}$.

die Koordinaten der beiden Grundpunkte einer Punktreihe, so sind die Koordinaten des laufenden Punktes der Reihe mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ *in der Form darstellbar:*

(20′) $\varrho x_k = x_k^{(1)} - \mu x_k^{(2)}$.

Durch Elimination von ϱ und μ ergeben sich wieder die Bedingungen (14) und (14′).

10. Identität zwischen den Gleichungen von vier Ebenen oder vier Punkten. Wie in § 51, **6** folgt wiederum:

Die vier Ebenen:

$$(21)\left\{\begin{aligned} X &= u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0,\\ X_1 &= u_1^{(1)}x_1 + u_2^{(1)}x_2 + u_3^{(1)}x_3 + u_4^{(1)}x_4 = 0,\\ X_2 &= u_1^{(2)}x_1 + u_2^{(2)}x_2 + u_3^{(2)}x_3 + u_4^{(2)}x_4 = 0,\\ X_3 &= u_1^{(3)}x_1 + u_2^{(3)}x_2 + u_3^{(3)}x_3 + u_4^{(3)}x_4 = 0 \end{aligned}\right.$$

gehen durch einen Punkt, wenn eine Identität von der Form:

$$(22)\quad \lambda X + \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0$$

besteht.

Die vier Punkte:

$$(21')\left\{\begin{aligned} U &= x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4 = 0,\\ U_1 &= x_1^{(1)}u_1 + x_2^{(1)}u_2 + x_3^{(1)}u_3 + x_4^{(1)}u_4 = 0,\\ U_2 &= x_1^{(2)}u_1 + x_2^{(2)}u_2 + x_3^{(2)}u_3 + x_4^{(2)}u_4 = 0,\\ U_3 &= x_1^{(3)}u_1 + x_2^{(3)}u_2 + x_3^{(3)}u_3 + x_4^{(3)}u_4 = 0 \end{aligned}\right.$$

liegen in einer Ebene, wenn eine Identität von der Form:

$$(22')\quad \lambda U + \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0$$

besteht.

11. Die Determinante der Koeffizienten der Gleichungen von vier Ebenen oder vier Punkten. Dieselbe notwendige und hinreichende Bedingung kann auch in die Form gekleidet werden (§ 51, **5**):

Die vier Ebenen (21) *gehen durch einen Punkt, wenn die Determinante der Koeffizienten verschwindet, also:*

$$(23)\quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4\\ u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & u_3^{(1)} & u_4^{(1)}\\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & u_3^{(2)} & u_4^{(2)}\\ u_1^{(3)} & u_2^{(3)} & u_3^{(3)} & u_4^{(3)} \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist zugleich die Gleichung des Schnittpunktes der drei Ebenen

Die vier Punkte (21′) *liegen in einer Ebene, wenn die Determinante der Koeffizienten verschwindet also:*

$$(23')\quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & x_4^{(1)}\\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & x_4^{(2)}\\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} & x_4^{(3)} \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist zugleich die Gleichung der Verbindungsebene der drei Punkte

$u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, u_k^{(3)}$ in laufenden Ebenenkoordinaten u_k.

$x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, x_k^{(3)}$ in laufenden Punktkoordinaten x_k.

12. Gleichungen des Bündels und Feldes. Aus den Identitäten (15) folgt ferner nach § 56, (25); (25′) unter Hinzufügung der dualen Sätze (vgl. § 53, **1**; **2**):

Sind:

(24) $X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0$

in (21) *die Gleichungen der drei Grundebenen $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ eines Ebenenbündels, so ist die Gleichung der laufenden Ebene Π des Bündels:*

(25) $\mu_1 \frac{X_1}{X_1^0} + \mu_2 \frac{X_2}{X_2^0} + \mu_3 \frac{X_3}{X_3^0} = 0,$

und sind die Gleichungen des laufenden Strahles p des Bündels:

(26) $\frac{X_1}{X_1^0} : \frac{X_2}{X_2^0} : \frac{X_3}{X_3^0} = \nu_1 : \nu_2 : \nu_3.$

Hier ist $x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0$ ein zur Bestimmung des Einheitsstrahles g_0 im Bündel gegebener Punkt, und haben die Parameter μ_1, μ_2, μ_3 und ν_1, ν_2, ν_3 die Bedeutung der in § 56, **9** als Doppelverhältnisse definierten Dreiflachskoordinaten u_1, u_2, u_3 und x_1, x_2, x_3 im Bündel (vgl. (17) und (18)).

Sind:

(24′) $U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0$

in (21′) *die Gleichungen der drei Grundpunkte eines Punktfeldes, so ist die Gleichung des laufenden Punktes des Feldes:*

(25′) $\mu_1 \frac{U_1}{U_1^0} + \mu_2 \frac{U_2}{U_2^0} + \mu_3 \frac{U_3}{U_3^0} = 0,$

und sind die Gleichungen des laufenden Strahles p im Felde:

(26′) $\frac{U_1}{U_1^0} : \frac{U_2}{U_2^0} : \frac{U_3}{U_3^0} = \nu_1 : \nu_2 : \nu_3.$

Hierbei ist $u_1^0, u_2^0, u_3^0, u_4^0$ eine zur Bestimmung des Einheitsstrahles g_0 gegebene Ebene, und haben die Parameter μ_1, μ_2, μ_3 und ν_1, ν_2, ν_3 die Bedeutung der in § 28, **14** als Doppelverhältnisse definierten Dreieckskoordinaten x_1, x_2, x_3 und u_1, u_2, u_3 in der Ebene (vgl. (17′) und (18′)).

Kommt es auf einen konstanten Faktor der Parameter nicht an, so kann man die Gleichungen (25) und (26) in der einfacheren Form schreiben:

(27) $\mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3 = 0,$

(28) $X_1 : X_2 : X_3 = \nu_1 : \nu_2 : \nu_3.$

(27′) $\mu_1 U_1 + \mu_2 U_2 + \mu_3 U_3 = 0,$

(28′) $U_1 : U_2 : U_3 = \nu_1 : \nu_2 : \nu_3.$

13. Parameterdarstellung des Bündels und Feldes. Aus (27) und (27′) folgt dann wie in § 58, **9**:[107])

Sind $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, u_k^{(3)}$ die Koordinaten der drei Grundebenen eines Ebenenbündels, so sind die Koordinaten der laufenden Ebene des Bün-

Sind $x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, x_k^{(3)}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ die Koordinaten der drei Grundpunkte eines ebenen Feldes, so sind die Koordinaten des laufen-

dels von der Form:

$$(29)\quad \begin{cases} \varrho u_k = \mu_1 u_k^{(1)} + \mu_2 u_k^{(2)} \\ \qquad\quad + \mu_3 u_k^{(3)}. \end{cases}$$

den Punktes des Feldes von der Form:

$$(29')\quad \begin{cases} \varrho x_k = \mu_1 x_k^{(1)} + \mu_2 x_k^{(2)} \\ \qquad\quad + \mu_3 x_k^{(3)}. \end{cases}$$

§ 59. Die Tetraederkoordinaten der geraden Linie.

1. Definition der Achsen- und Strahlenkoordinaten. Mit derselben Begründung, die in § 48, **1**; **2** gegeben wurde, sprechen wir auch mit bezug auf ein *Koordinatentetraeder* die schon § 58, **5** erwähnte Definition aus:[103])

Ist eine Gerade als Schnittlinie zweier Ebenen $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}, u_4^{(1)}$ und $u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}, u_4^{(2)}$ gegeben, so verstehen wir unter den Achsenkoordinaten der Geraden die sechs Größen:

$$(1)\quad \begin{cases} q_{23} = u_2^{(1)}u_3^{(2)} - u_3^{(1)}u_2^{(2)}, \\ q_{31} = u_3^{(1)}u_1^{(2)} - u_1^{(1)}u_3^{(2)}, \\ q_{12} = u_1^{(1)}u_2^{(2)} - u_2^{(1)}u_1^{(2)}, \\ q_{14} = u_1^{(1)}u_4^{(2)} - u_4^{(1)}u_1^{(2)}, \\ q_{24} = u_2^{(1)}u_4^{(2)} - u_4^{(1)}u_2^{(2)}, \\ q_{34} = u_3^{(1)}u_4^{(2)} - u_4^{(1)}u_3^{(2)}, \\ q_{ki} = -q_{ik} = u_k^{(1)}u_i^{(2)} - u_i^{(1)}u_k^{(2)}. \end{cases}$$

Ist eine Gerade als Verbindungslinie zweier Punkte $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_4^{(1)}$ und $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, x_4^{(2)}$ gegeben, so verstehen wir unter den Strahlenkoordinaten der Geraden die sechs Größen:

$$(1')\quad \begin{cases} p_{23} = x_2^{(1)}x_3^{(2)} - x_3^{(1)}x_2^{(2)}, \\ p_{31} = x_3^{(1)}x_1^{(2)} - x_1^{(1)}x_3^{(2)}, \\ p_{12} = x_1^{(1)}x_2^{(2)} - x_2^{(1)}x_1^{(2)}, \\ p_{14} = x_1^{(1)}x_4^{(2)} - x_4^{(1)}x_1^{(2)}, \\ p_{24} = x_2^{(1)}x_4^{(2)} - x_4^{(1)}x_2^{(2)}, \\ p_{34} = x_3^{(1)}x_4^{(2)} - x_4^{(1)}x_3^{(2)}, \\ p_{kl} = -p_{lk} = x_k^{(1)}x_l^{(2)} - x_l^{(1)}x_k^{(2)}. \end{cases}$$

Wir wenden neben der Bezeichnung mit zwei Indizes q_{kl} und p_{kl} die Bezeichnung mit *einem* Index in dem Sinne an, daß wir die sechs Variationen ohne Wiederholung:

(2) 23 31 12 14 24 34

mit laufenden Nummern:

(3) 1 2 3 4 5 6

bezeichnen, also z. B. $q_{31} = q_2$, $p_{14} = p_4$. Mit k und $\bar{k}$ bezeichnen wir die Nummern *komplementärer* Variationen, die zusammen alle vier Zahlen 1, 2, 3, 4 enthalten; z. B. für $k = 3$, $\bar{k} = 6$ (§ 57, 7).

2. Die Identität zwischen den sechs Koordinaten der Linie. Wie in § 48, **3** folgt auch jetzt:

Zwischen den sechs Achsenkoordinaten einer Geraden besteht

Zwischen den sechs Strahlenkoordinaten einer Geraden besteht

die Identität:

$$(4)\quad \begin{cases} Q = q_{23}q_{14} + q_{31}q_{24} \\ \qquad\qquad + q_{12}q_{34} = 0 \end{cases}$$

oder

$$(5)\quad Q = q_1q_4 + q_2q_5 + q_3q_6 = 0.$$

die Identität:

$$(4')\quad \begin{cases} P = p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} \\ \qquad\qquad + p_{12}p_{34} = 0 \end{cases}$$

oder

$$(5')\quad P = p_1p_4 + p_2p_5 + p_3p_6 = 0.$$

Umgekehrt sind sechs Größen, die durch solche Relation verbunden sind, die Koordinaten einer Geraden.

3. Beziehung zwischen den Achsen- und Strahlenkoordinaten derselben Geraden. Zwischen Achsen- und Strahlenkoordinaten derselben Geraden besteht wie in § 48, (10) die Proportion:[104]

$$(6)\qquad q_{23} : q_{31} : q_{12} : q_{14} : q_{24} : q_{34} = p_{14} : p_{24} : p_{34} : p_{23} : p_{31} : p_{12}$$

oder

$$(7)\qquad q_1 : q_2 : q_3 : q_4 : q_5 : q_6 = p_4 : p_5 : p_6 : p_1 : p_2 : p_3.$$

Mit der in § 59, **1** eingeführten Bezeichnung können wir statt (7) mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ schreiben:

$$(8)\qquad \varrho \cdot q_k = p_{\bar{k}}, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

4. Die Hauptgleichungen einer durch ihre Koordinaten gegebenen Geraden in Punkt- und Ebenenkoordinaten. Wie in § 48, 8 ergibt sich:

Hat eine Gerade die Strahlenkoordinaten p_k und q_k, so sind die Gleichungen der Geraden in Punktkoordinaten (die Gleichungen ihrer Verbindungsebenen mit den vier Ecken E_1, E_2, E_3, E_4 des Koordinatentetraeders):

$$(9)\begin{cases} q_3x_2 - q_2x_3 + q_4x_4 = 0, \\ q_1x_3 - q_3x_1 + q_5x_4 = 0, \\ q_2x_1 - q_1x_2 + q_6x_4 = 0, \\ -q_4x_1 - q_5x_2 - q_6x_3 = 0, \end{cases} \quad \text{oder} \quad (10)\begin{cases} p_6x_2 - p_5x_3 + p_1x_4 = 0, \\ p_4x_3 - p_6x_1 + p_2x_4 = 0, \\ p_5x_1 - p_4x_2 + p_3x_4 = 0, \\ -p_1x_1 - p_2x_2 - p_3x_3 = 0, \end{cases}$$

und die Gleichungen der Geraden in Ebenenkoordinaten (die Gleichungen ihrer Schnittpunkte mit den vier Ebenen E_1, E_2, E_3, E_4 des Koordinatentetraeders):

$$(11)\begin{cases} p_3u_2 - p_2u_3 + p_4u_4 = 0, \\ p_1u_3 - p_3u_1 + p_5u_4 = 0, \\ p_2u_1 - p_1u_2 + p_6u_4 = 0, \\ -p_4u_1 - p_5u_2 - p_6u_3 = 0, \end{cases} \quad \text{oder} \quad (12)\begin{cases} q_6u_2 - q_5u_3 + q_1u_4 = 0, \\ q_4u_3 - q_6u_1 + q_2u_4 = 0, \\ q_5u_1 - q_4u_2 + q_3u_4 = 0, \\ -q_1u_1 - q_2u_2 - q_3u_3 = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (10) und (12) sind die entwickelte Form der Gleichungen § 58, (14′) und (14).

Die Koordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 der Verbindungsebenen der Geraden mit den vier Ecken sind daher:

$$(13)\quad \begin{cases} 0 : \quad q_3 : -q_2 : q_4, \\ -q_3 : \quad 0 : \quad q_1 : q_5. \\ q_2 : -q_1 : \quad 0 : q_6, \\ -q_4 : -q_5 : -q_6 : 0. \end{cases}$$

Die Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 der Schnittpunkte der Geraden mit den vier Seitenflächen sind daher:

$$(13')\quad \begin{cases} 0 : \quad p_3 : -p_2 : p_4, \\ -p_3 : \quad 0 : \quad p_1 : p_5, \\ p_2 : -p_1 : \quad 0 : p_6, \\ -p_4 : -p_5 : -p_6 : 0. \end{cases}$$

5. Abhängigkeit der vier Gleichungen (9) **oder** (11). Die Determinanten der vier Ebenen (9) oder (13), bezüglich der vier Punkte (11) oder (13′) sind mit Rücksicht auf (5) und (5′):

$$\begin{vmatrix} 0 & q_3 & -q_2 & q_4 \\ -q_3 & 0 & q_1 & q_5 \\ q_2 & -q_1 & 0 & q_6 \\ -q_4 & -q_5 & -q_6 & 0 \end{vmatrix} = (q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6)^2 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & p_3 & -p_2 & p_4 \\ -p_3 & 0 & p_1 & p_5 \\ p_2 & -p_1 & 0 & p_6 \\ -p_4 & -p_5 & -p_6 & 0 \end{vmatrix} = (p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6)^2 = 0.$$

Bei einer schiefen Determinante vierten Grades, die verschwindet, sind aber stets auch alle Unterdeterminanten dritten Grades Null. (Anm. 1, IV, 7.) Daher folgt (§ 48, 4):

Jedes der vier Systeme von vier Gleichungen (9) *bis* (12) *zählt, wenn die p_k und q_k gegebene Linienkoordinaten sind, nur für zwei unabhängige Gleichungen.*

6. Vereinigte Lage einer Geraden mit einer Ebene oder einem Punkt (vgl. § 58, (2)).

Die Gleichungen (9) *und* (10) *sind zugleich die Bedingungen der vereinigten Lage des Punktes x_k und der Geraden p_k, q_k.*

Die Gleichungen (11) *und* (12) *sind zugleich die Bedingungen der vereinigten Lage der Ebene u_k mit der Geraden p_k, q_k.*

7. Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene, Verbindungsebene mit einem Punkt. Wie in § 48, **11** folgt:

Der Schnittpunkt der Ebene u_k mit der Geraden q_k hat die Koordinaten:

$$(14)\quad \begin{cases} \varrho x_1 = \quad q_6 u_2 - q_5 u_3 + q_1 u_4, \\ \varrho x_2 = \quad q_4 u_3 - q_6 u_1 + q_2 u_4, \\ \varrho x_3 = \quad q_5 u_1 - q_4 u_2 + q_3 u_4, \\ \varrho x_4 = -q_1 u_1 - q_2 u_2 - q_3 u_3. \end{cases}$$

Die Verbindungsebene des Punktes x_k mit der Geraden p_k hat die Koordinaten:

$$(14')\quad \begin{cases} \varrho u_1 = \quad p_6 x_2 - p_5 x_3 + p_1 x_4, \\ \varrho u_2 = \quad p_4 x_3 - p_6 x_1 + p_2 x_4, \\ \varrho u_3 = \quad p_5 x_1 - p_4 x_2 + p_3 x_4, \\ \varrho u_4 = -p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3. \end{cases}$$

Der Schnittpunkt wird unbestimmt, wenn mit (12) Gerade und Ebene vereinigt liegen.

Die Verbindungsebene wird unbestimmt, wenn mit (10) Gerade und Punkt vereinigt liegen.

8. Vereinigte Lage zweier Geraden. Wie in § 48, **12** gilt der Satz (vgl. § 59, (8)):

Die Bedingung der vereinigten Lage zweier Geraden mit den Koordinaten p_k, q_k und p_k', q_k' (die Bedingung, daß sie sich schneiden), lautet:

$$(15)\quad \begin{cases} \sum_1^6 {}^k\, p_k q_k' = 0 \quad \textit{oder} \quad \sum_1^6 {}^k\, q_k p_k' = 0 \quad \textit{oder} \\ \sum_1^6 {}^k\, p_k \overline{p_k}' = 0 \quad \textit{oder} \quad \sum_1^6 {}^k\, q_k \overline{q_k}' = 0. \end{cases}$$

9. Projektion einer Geraden aus einer Ecke des Koordinatentetraeders auf die Gegenfläche.

Eine Gerade sei durch zwei Punkte $P_1 = x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_4^{(1)}$ und $P_2 = x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, x_4^{(2)}$ gegeben, so daß ihre Strahlenkoordinaten p_k die Unterdeterminanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & x_4^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & x_4^{(2)} \end{vmatrix}$$

sind. Die Schnittlinie p' der Ebene $\Pi = E_4 P_1 P_2$ mit der Ebene E_4 (die Projektion der Geraden p aus

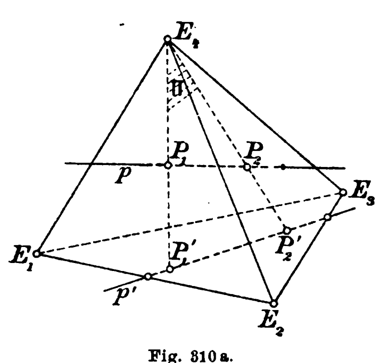


Fig. 310 a.

Eine Gerade sei durch zwei Ebenen $\Pi_1 = u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}, u_4^{(1)}$ und $\Pi_2 = u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}, u_4^{(2)}$ gegeben, so daß ihre Achsenkoordinaten q_k die Unterdeterminanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & u_3^{(1)} & u_4^{(1)} \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & u_3^{(2)} & u_4^{(2)} \end{vmatrix}$$

sind. Die Verbindungslinie q' des Punktes $P = \mathsf{E}_4 \times \Pi_1 \times \Pi_2$ (vgl. Fig. 310b) ist dann die Schnitt-

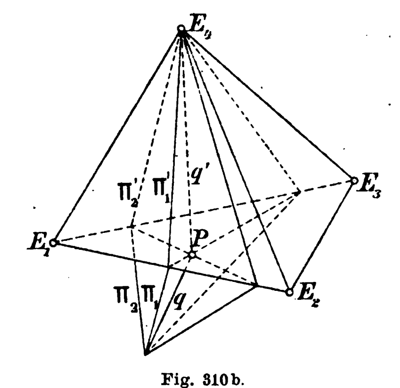


Fig. 310 b.

E_4 auf E_4, Fig. 310a) ist dann die Verbindungslinie der Punkte $P_1' = x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, 0$ und $P_2' = x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, 0$ (vgl. § 57, **16**); ihre Strahlenkoordinaten sind die Unterdeterminanten der Matrix:

$$(16)\quad \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & 0 \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & 0 \end{vmatrix}.$$

Es folgt daher mit Rücksicht auf § 29, (10'):

Von den sechs Strahlenkoordinaten p_k *einer beliebigen Geraden* p *in bezug auf das Tetraeder* $E_1E_2E_3E_4$ *sind* p_1, p_2, p_3 *zugleich die Dreieckskoordinaten* u_1, u_2, u_3 *derjenigen Geraden* p', *in der die Ebene* E_4p *die Ebene* E_4 *schneidet (der Projektion aus* E_4 *auf* E_4).

Für alle Strahlen p *einer durch die Ecke* E_4 *gehenden Ebene* Π *haben daher die Verhältnisse* $p_1 : p_2 : p_3$ *dieselben Werte.*

linie der Ebenen $\Pi_1' = u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}, 0$ und $\Pi_2' = u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}, 0$ (vgl. § 57, **16**); ihre Achsenkoordinaten sind die Unterdeterminanten der Matrix:

$$(16')\quad \begin{vmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & u_3^{(1)} & 0 \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & u_3^{(2)} & 0 \end{vmatrix}.$$

Es folgt daher mit Rücksicht auf § 56, (16):

Von den sechs Achsenkoordinaten q_k *einer beliebigen Geraden* q *in bezug auf das Tetraeder* $\mathsf{E}_1\mathsf{E}_2\mathsf{E}_3\mathsf{E}_4$ *sind* q_1, q_2, q_3 *zugleich die Dreiflachskoordinaten* x_1, x_2, x_3 *derjenigen Geraden* q', *welche den Schnittpunkt* $\mathsf{E}_4 \times q$ *mit der Ecke* E_4 *verbindet.*

Für alle Strahlen q_k *durch einen in der Ebene* E_4 *liegenden Punkt* P *haben daher die Verhältnisse* $q_1 : q_2 : q_3$ *dieselben Werte.*

10. Gerade in einer Ebene oder durch eine Ecke des Koordinatentetraeders. Mit der besonderen Annahme $p = p'$ und $q = q'$ folgt aus § 59, **9** mit Berücksichtigung von (16) und (16'):

Für eine Gerade p_k *in der Ebene* E_4 *verschwinden* p_4, p_5, p_6, *während* p_1, p_2, p_3 *zugleich die Dreieckskoordinaten der Geraden in der Ebene sind* (§ 49, **3**; **4**).

Die *Gleichungen der Geraden* sind dann nach (10) *in Punktkoordinaten* des Raumes:

$$(17)\quad \begin{cases} x_4 = 0, \\ p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = 0 \end{cases}$$

und nach (11) in Ebenenkoordinaten:

$$(18)\quad \begin{cases} u_1 : u_2 : u_3 = p_1 : p_2 : p_3 = \\ p_{23} : p_{31} : p_{12}. \end{cases}$$

Für eine Gerade q_k *durch die Ecke* E_4 *verschwinden* q_4, q_5, q_6, *während* q_1, q_2, q_3 *zugleich die Dreiflachskoordinaten des Strahles im Bündel sind* (§ 49, **6**; **11**).

Die *Gleichungen der Geraden* sind dann nach (12) in *Ebenenkoordinaten*:

$$(17')\quad \begin{cases} u_4 = 0, \\ q_1u_1 + q_2u_2 + q_3u_3 = 0 \end{cases}$$

und nach (9) in Punktkoordinaten:

$$(18')\quad \begin{cases} x_1 : x_2 : x_3 = q_1 : q_2 : q_3 = \\ q_{23} : q_{31} : q_{12}. \end{cases}$$

Liegt die Gerade in der Ebene E_1, E_2 oder E_3, so tritt für (18) ein:

$$(19)\begin{cases} u_2 : u_3 : u_4 = p_6 : -p_5 : p_1 \\ \qquad = p_{34} : p_{42} : p_{23}, \\ u_3 : u_1 : u_4 = p_4 : -p_6 : p_2 \\ \qquad = p_{14} : p_{43} : p_{31}, \\ u_1 : u_2 : u_4 = p_5 : -p_4 : p_3 \\ \qquad = p_{24} : p_{41} : p_{12}. \end{cases}$$

Geht die Gerade durch die Ecke E_1, E_2 oder E_3, so tritt für (18′) ein:

$$(19')\begin{cases} x_2 : x_3 : x_4 = q_6 : -q_5 : q_1 \\ \qquad = q_{34} : q_{42} : q_{23}, \\ x_3 : x_1 : x_4 = q_4 : -q_6 : q_2 \\ \qquad = q_{14} : q_{43} : q_{31}, \\ x_1 : x_2 : x_4 = q_5 : -q_4 : q_3 \\ \qquad = q_{24} : q_{41} : q_{12}. \end{cases}$$

An Stelle von (18) und (18′) kann man auch sagen (Fig. 311a; b):

Ist u_1^0, u_2^0, u_3^0, u_4^0 irgend eine Ebene, die durch die in E_4 enthaltene Gerade geht, so sind die Gleichungen der letzteren:

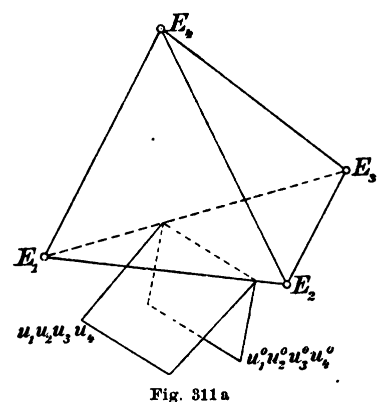


Fig. 311a

$$(20)\quad u_1 : u_2 : u_3 = u_1^0 : u_2^0 : u_3^0,$$

(vgl. § 58, (6′)).

Ist x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0 irgend ein Punkt, der auf der durch E_4 gehenden Geraden liegt, so sind die Gleichungen der letzteren:

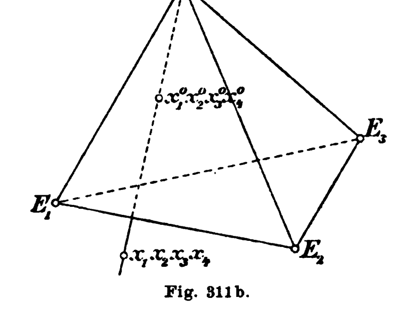


Fig. 311b.

$$(20')\quad x_1 : x_2 : x_3 = x_1^0 : x_2^0 : x_3^0,$$

(vgl. § 58 (6); § 43, (4)).

11. Strahlen- und Achsenkoordinaten der Kanten des Koordinatentetraeders. Für die Linienkoordinaten der Kanten $e_k = \varepsilon_{\bar{k}}$ (vgl. § 59, 1) des Koordinatentetraeders ergibt sich aus (1) und (1′), indem man die Kanten als Verbindungslinien zweier Ecken oder Schnittlinien zweier Seitenflächen auffaßt und die Koordinatenwerte § 57, (16), (16′) benutzt (Fig. 312).

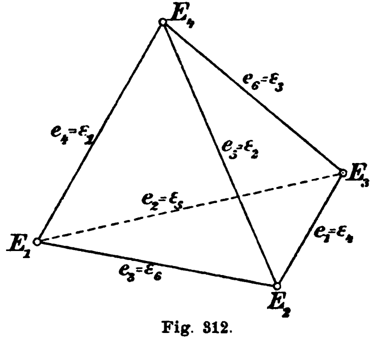


Fig. 312.

(21)

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
e_1	1	0	0	0	0	0
e_2	0	1	0	0	0	0
e_3	0	0	1	0	0	0
e_4	0	0	0	1	0	0
e_5	0	0	0	0	1	0
e_6	0	0	0	0	0	1

(21′)

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
ε_1	1	0	0	0	0	0
ε_2	0	1	0	0	0	0
ε_3	0	0	1	0	0	0
ε_4	0	0	0	1	0	0
ε_5	0	0	0	0	1	0
ε_6	0	0	0	0	0	1

12. Bedingungen für drei Gerade durch einen Punkt oder in einer Ebene. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, daß drei gegebene Gerade $p_{kl}^{(1)}, p_{kl}^{(2)}, p_{kl}^{(3)}$ sich paarweise schneiden, sind nach § 59, 8:

$$(22)\quad \begin{cases} p_1^{(h)}p_4^{(i)} + p_2^{(h)}p_5^{(i)} + p_3^{(h)}p_6^{(i)} + p_4^{(h)}p_1^{(i)} + p_5^{(h)}p_2^{(i)} + p_6^{(h)}p_3^{(i)} = 0, \\ hi = 23,\ 31,\ 12. \end{cases}$$

Die Geraden liegen dann entweder alle drei in einer Ebene oder gehen alle drei durch einen Punkt.

Gehen die drei Geraden durch einen Punkt x_1, x_2, x_3, x_4, so bestehen nach (10) die zwölf Gleichungen:

$$(23)\quad \begin{cases} p_6^{(i)}x_2 - p_5^{(i)}x_3 + p_1^{(i)}x_4 = 0, \\ p_4^{(i)}x_3 - p_6^{(i)}x_1 + p_2^{(i)}x_4 = 0, \\ p_5^{(i)}x_1 - p_4^{(i)}x_2 + p_3^{(i)}x_4 = 0, \\ -p_1^{(i)}x_1 - p_2^{(i)}x_2 - p_3^{(i)}x_3 = 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, 3.$$

Je drei mit $i = 1, 2, 3$ in einer dieser vier Zeilen enthaltene Gleichungen sind aber nur verträglich, wenn die Determinante der Koeffizienten verschwindet. Setzen wir zur Abkürzung allgemein die Determinante:

$$(24)\quad \begin{vmatrix} p_k^{(1)} p_l^{(1)} p_m^{(1)} \\ p_k^{(2)} p_l^{(2)} p_m^{(2)} \\ p_k^{(3)} p_l^{(3)} p_m^{(3)} \end{vmatrix} = (klm),$$

so ergibt sich unter Hinzufügung des dualen Satzes (vgl. (11)):[109])

Wenn die drei Geraden $p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}$ einem Strahlbündel angehören, so bestehen neben (22) *noch die Bedingungen:*

$$(25)\quad \begin{cases} (561) = 0, \quad (642) = 0, \\ (453) = 0, \quad (123) = 0. \end{cases}$$

Wenn die drei Geraden $p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}$ einem Strahlfeld angehören, so bestehen neben (22) *noch die Bedingungen:*

$$(25')\quad \begin{cases} (234) = 0, \quad (315) = 0, \\ (126) = 0, \quad (456) = 0. \end{cases}$$

Diese Bedingungen sind notwendig. Hinreichend ist schon eine geringere Zahl. Ist etwa $p_6^{(i)} \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$, sind von den vier Gleichungen (23) schon die zwei ersten hinreichend, damit der Punkt x_1, x_2, x_3, x_4 auf der Geraden $p^{(i)}$ liege (§ 59, 5). Dafür also, daß alle drei Gerade einen Punkt gemein haben, ist notwendig und hinreichend, daß dieser den sechs Gleichungen genüge:

$$(26)\begin{cases} p_6^{(1)}x_2 - p_5^{(1)}x_3 + p_1^{(1)}x_4 = 0, \quad p_6^{(2)}x_2 - p_5^{(2)}x_3 + p_1^{(2)}x_4 = 0, \\ \qquad p_6^{(3)}x_2 - p_5^{(3)}x_3 + p_1^{(3)}x_4 = 0, \\ p_4^{(1)}x_3 - p_6^{(1)}x_1 + p_2^{(1)}x_4 = 0, \quad p_4^{(2)}x_3 - p_6^{(2)}x_1 + p_2^{(2)}x_4 = 0, \\ \qquad p_4^{(3)}x_3 - p_6^{(3)}x_1 + p_2^{(3)}x_4 = 0. \end{cases}$$

Die drei ersten Gleichungen (26) sind verträglich, wenn $(561) = 0$; die drei letzten, wenn $(642) = 0$; jene geben dann (Anm. 2, II, (10)):

$$(27) \qquad x_2 : x_3 : x_4 = \begin{vmatrix} p_5^{(2)} & p_1^{(2)} \\ p_5^{(3)} & p_1^{(3)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_6^{(2)} & p_1^{(2)} \\ p_6^{(3)} & p_1^{(3)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_6^{(2)} & p_5^{(2)} \\ p_6^{(3)} & p_5^{(3)} \end{vmatrix}$$

(oder mit 31 oder 12 für 23), diese aber ebenso:

$$(28) \qquad x_3 : x_1 : x_4 = \begin{vmatrix} p_6^{(2)} & p_2^{(2)} \\ p_6^{(3)} & p_2^{(3)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_4^{(2)} & p_2^{(2)} \\ p_4^{(3)} & p_2^{(3)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_4^{(2)} & p_6^{(2)} \\ p_4^{(3)} & p_6^{(3)} \end{vmatrix}.$$

Die Entwickelung der weiteren Bedingung, daß die beiden Werte $x_3 : x_4$ in (27) und (28) gleich sind, liefert die Gleichung (22) mit $hi = 23$. Es sind dann die drei Bedingungen: $(561) = 0$, $(642) = 0$ und (22) mit $hi = 23$ hinreichend dafür, daß die drei Geraden einem Bündel angehören.

Wenn die drei Geraden einem Strahlenbüschel angehören, sind die Bedingungen (22), (25), (25′) *sämtlich erfüllt.*

§ 60. Gleichungen in laufenden Linienkoordinaten.

1. Gleichungen eines Punktes oder einer Ebene in laufenden Linienkoordinaten.

Sind x_1, x_2, x_3, x_4 die Koordinaten eines gegebenen Punktes, so haben alle durch ihn gehenden Linien nach § 59 (9) die Gleichungen zu erfüllen:

$$(1)\begin{cases} Q_1 = \quad x_2 q_3 - x_3 q_2 + x_4 q_4 = 0, \\ Q_2 = \quad x_3 q_1 - x_1 q_3 + x_4 q_5 = 0, \\ Q_3 = \quad x_1 q_2 - x_2 q_1 + x_4 q_6 = 0, \\ Q_4 = -x_1 q_4 - x_2 q_5 - x_3 q_6 = 0. \end{cases}$$

Sind u_1, u_2, u_3, u_4 die Koordinaten einer gegebenen Ebene, so haben alle in ihr liegenden Linien nach § 59 (11) die Gleichungen zu erfüllen:

$$(1')\begin{cases} P_1 = \quad u_2 p_3 - u_3 p_2 + u_4 p_4 = 0, \\ P_2 = \quad u_3 p_1 - u_1 p_3 + u_4 p_5 = 0, \\ P_3 = \quad u_1 p_2 - u_2 p_1 + u_4 p_6 = 0, \\ P_4 = -u_1 p_4 - u_2 p_5 - u_3 p_6 = 0. \end{cases}$$

Dies sind daher die (überzähligen) *Gleichungen des Punktes (des Strahlbündels) in Linienkoordinaten* q_k (vgl. § 58, (3')).

Dies sind daher die *Gleichungen der Ebene (des Strahlfeldes) in Linienkoordinaten* p_k (vgl. § 58, (3)).

Die Gleichungen zählen für drei unabhängige, da identisch in den q_k, bezüglich p_k:

(2) $x_1 Q_1 + x_2 Q_2 + x_3 Q_3 + x_4 Q_4 = 0$ | (2') $u_1 P_1 + u_2 P_2 + u_3 P_3 + u_4 P_4 = 0$,

dagegen z. B. für $x_4 \neq 0$ die drei ersten Gleichungen (1) nach q_4, q_5, q_6 auflösbar und daher unabhängig sind.

Da nun auch (vgl. § 59, 2):

(3) $q_1 Q_1 + q_2 Q_2 + q_3 Q_3 = x_4 Q$ | (3') $p_1 P_1 + p_2 P_2 + p_3 P_3 = u_4 P$,

so folgt alsdann aus den drei unabhängigen auch $Q = 0$, bezüglich $P = 0$.

Die vier Gleichungen (1) *oder* (1') *zählen bei gegebenen* x_k *oder* u_k *für drei unabhängige* (im Gegensatz zu § 59, 5, wo die p_k, q_k gegeben sind). Alle ∞^2 Werte der fünf Verhältnisse der q_k oder p_k, die drei unabhängigen Gleichungen (1) oder (1') genügen, genügen sowohl der vierten als auch der Bedingung $Q = 0$ oder $P = 0$.

Daß die quadratische Relation $Q = 0$ oder $P = 0$ zwischen den q_k oder p_k hier in Fortfall kommt, entspricht dem Umstande, daß *Strahlbündel* und *Strahlfeld lineare Liniengebilde* sind im Gegensatz zum *Linienraum*, der eben wegen dieser Relation ein *quadratisches Liniengebilde* vorstellt (§ 60, 6).

2. Determinantenform der Gleichungen eines Punktes oder einer Ebene. Ist der Punkt x_1, x_2, x_3, x_4 durch zwei Gerade $q^{(1)}$ und $q^{(2)}$ gegeben, die sich schneiden, so daß (§ 59, 8):

(4) $q_1^{(1)} q_4^{(2)} + q_2^{(1)} q_5^{(2)} + q_3^{(1)} q_6^{(2)} + q_4^{(1)} q_1^{(2)} + q_5^{(1)} q_2^{(2)} + q_6^{(1)} q_3^{(2)} = 0$,

so müssen diese selbst den Gleichungen (1):

(5) $x_2 q_3 - x_3 q_2 + x_4 q_4 = 0, \quad x_3 q_1 - x_1 q_3 + x_4 q_5 = 0, \quad \ldots, \ldots$

genügen also:

$$(6) \begin{cases} x_2 q_3^{(1)} - x_3 q_2^{(1)} + x_4 q_4^{(1)} = 0, & x_3 q_1^{(1)} - x_1 q_3^{(1)} + x_4 q_5^{(1)} = 0, \quad \ldots, \ldots \\ x_2 q_3^{(2)} - x_3 q_2^{(2)} + x_4 q_4^{(2)} = 0, & x_3 q_1^{(2)} - x_1 q_3^{(2)} + x_4 q_5^{(2)} = 0, \quad \ldots, \ldots \end{cases}$$

Durch Elimination der x aus (5) und (6) führt man aber die $q_i^{(1)}$, $q_i^{(2)}$ in (5) ein und findet:

Die Gleichungen eines Punktes (eines Strahlbündels), der durch zwei sich schneidende Strahlen $q_i^{(1)}$ *und* $q_i^{(2)}$ *gegeben ist, sind in laufenden Linienkoordinaten:*

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} q_k & q_l & q_m \\ q_k^{(1)} & q_l^{(1)} & q_m^{(1)} \\ q_k^{(2)} & q_l^{(2)} & q_m^{(2)} \end{vmatrix} = 0, \quad klm = 234,\ 315,\ 126,\ 456.$$

Ebenso folgt dual:

Die Gleichungen einer Ebene (eines Strahlfeldes), die durch zwei sich schneidende Strahlen $p_i^{(1)}$ und $p_i^{(2)}$ gegeben ist, sind in laufenden Linienkoordinaten:

$$(7')\qquad \begin{vmatrix} p_k & p_l & p_m \\ p_k^{(1)} & p_l^{(1)} & p_m^{(1)} \\ p_k^{(2)} & p_l^{(2)} & p_m^{(2)} \end{vmatrix} = 0, \quad klm = 234,\ 315,\ 126,\ 456,$$

(vgl. § 59, (24); (25')).

3. Gleichung der Geraden in Linienkoordinaten. Die Gleichung:

$$(8)\qquad q_1^{(1)}p_1 + q_2^{(1)}p_2 + q_3^{(1)}p_3 + q_4^{(1)}p_4 + q_5^{(1)}p_5 + q_6^{(1)}p_6 = 0$$

$$\text{oder} \quad \sum_1^6{}^k q_k^{(1)}p_k = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_1^6{}^k q_k^{(1)}q_{\bar{k}} = 0$$

wird nach § 59, 8 bei festen, der Bedingung:

$$(9)\qquad q_1^{(1)}q_4^{(1)} + q_2^{(1)}q_5^{(1)} + q_3^{(1)}q_6^{(1)} = 0$$

genügenden Werten der Koeffizienten von allen Geraden p_k erfüllt, die die Gerade $q_k^{(1)}$ schneiden. Sie ist daher *die Gleichung der Geraden $q_k^{(1)}$ in laufenden Strahlenkoordinaten p_k.*[110])

Die Koeffizienten der Gleichung sind die Koordinaten der Geraden (vgl. § 58, 2).

Da die laufenden Koordinaten p_k neben (8) der Bedingung:

$$(10)\qquad p_1p_4 + p_2p_5 + p_3p_6 = 0$$

genügen müssen, so gibt es ∞^3 Gerade, die eine Gerade $q_k^{(1)}$ schneiden.

Durch *zwei* Gleichungen von der Form (8) sind die ∞^2 Geraden dargestellt, die zwei feste Gerade schneiden, durch *drei* Gleichungen von der Form (8) sind die ∞^1 Geraden dargestellt, die drei feste Gerade schneiden.

4. Die Gleichungen der Kanten des Koordinatentetraeders. Da nach § 59, **11** die Koordinaten der Kanten des Koordinatentetraeders bekannt sind, so folgen die Gleichungen der Kanten:

$$(11)\qquad \begin{array}{cccccc} e_1 = \varepsilon_4: & e_2 = \varepsilon_5: & e_3 = \varepsilon_6: & e_4 = \varepsilon_1: & e_5 = \varepsilon_2: & e_6 = \varepsilon_3: \\ q_1 = 0 & q_2 = 0 & q_3 = 0 & q_4 = 0 & q_5 = 0 & q_6 = 0 \\ p_4 = 0 & p_5 = 0 & p_6 = 0 & p_1 = 0 & p_2 = 0 & p_3 = 0. \end{array}$$

5. Der lineare Komplex. *Der Inbegriff aller* ∞^3 *Geraden* p_k, *die neben der Gleichung* (10) *einer linearen Gleichung von der Form:*

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4 + a_5 p_5 + a_6 p_6 = 0 \tag{12}$$

genügen, heißt ein linearer Komplex.[111])

Er ist ein *allgemeiner* linearer Komplex, wenn die Koeffizientenverbindung:

$$A = a_1 a_4 + a_2 a_5 + a_3 a_6 \tag{13}$$

nicht 0 ist, dagegen ein *spezieller* linearer Komplex, wenn $A = 0$ ist.

Im letzteren Falle können die Koeffizienten als Achsenkoordinaten einer geraden Linie betrachtet werden, und der Komplex besteht aus allen Geraden, die diese schneiden. Die Gleichung (12) kommt dann auf die Form (8) zurück.

Die *Koeffizienten der Gleichung* (12) heißen die *Koordinaten des linearen Komplexes* (Komplexkoordinaten). Ihre fünf Verhältnisse sind im Gegensatz zu den Koordinaten der Geraden ganz *unabhängige* Größen.[112])

6. Transversalen von vier Geraden. Eine Gerade p_k, die vier feste Geraden $q_k^{(1)}$, $q_k^{(2)}$, $q_k^{(3)}$, $q_k^{(4)}$ schneidet, hat nach § 60, **3** den fünf Gleichungen zu genügen:

$$\left\{\begin{array}{l} q_1^{(1)}p_1 + q_2^{(1)}p_2 + q_3^{(1)}p_3 + q_4^{(1)}p_4 + q_5^{(1)}p_5 + q_6^{(1)}p_6 = 0, \\ q_1^{(2)}p_1 + q_2^{(2)}p_2 + q_3^{(2)}p_3 + q_4^{(\ )}p_4 + q_5^{(2)}p_5 + q_6^{(2)}p_6 = 0, \\ q_1^{(3)}p_1 + q_2^{(3)}p_2 + q_3^{(3)}p_3 + q_4^{(3)}p_4 + q_5^{(3)}p_5 + q_6^{(3)}p_6 = 0, \\ q_1^{(4)}p_1 + q_2^{(4)}p_2 + q_3^{(4)}p_3 + q_4^{(4)}p_4 + q_5^{(4)}p_5 + q_6^{(4)}p_6 = 0, \end{array}\right. \tag{14}$$

$$p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0. \tag{15}$$

Da dies vier lineare und eine quadratische Gleichung für die fünf Verhältnisse $p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6$ sind, so ergibt sich:[113])

Es gibt im allgemeinen zwei Gerade, die mit vier gegebenen Geraden vereinigt liegen (die beiden gemeinsamen Transversalen der vier Geraden).

Dieser Satz steht im Gegensatz zu den analogen Sätzen (§ 58, **11**):

Es gibt im allgemeinen einen Punkt, der mit drei Ebenen vereinigt liegt (den Schnittpunkt).	*Es gibt im allgemeinen eine Ebene, die mit drei Punkten vereinigt liegt (die Verbindungsebene).*

Daher gehört die Liniengeometrie im allgemeinen nicht in die Geometrie der *linearen* Gebilde.

7. Hyperboloidische Lage von vier Geraden. Wenn vier Gerade im Raume so gelegen sind, daß jede der ∞^1 Geraden, die drei von

den vier Geraden schneidet, auch die vierte schneidet, so sagt man, daß sie *hyperboloidische Lage* haben.[114]) Es muß dann jede Gerade p_k, die dreien von den Gleichungen (14) genügt, auch der vierten genügen.

Die Bedingung für die hyperboloidische Lage von vier Geraden $q_k^{(1)}, q_k^{(2)}, q_k^{(3)}, q_k^{(4)}$ *ist:*

$$(16) \qquad \begin{vmatrix} q_1^{(1)} & q_2^{(1)} & q_3^{(1)} & q_4^{(1)} & q_5^{(1)} & q_6^{(1)} \\ q_1^{(2)} & q_2^{(2)} & q_3^{(2)} & q_4^{(2)} & q_5^{(2)} & q_6^{(2)} \\ q_1^{(3)} & q_2^{(3)} & q_3^{(3)} & q_4^{(3)} & q_5^{(3)} & q_6^{(3)} \\ q_1^{(4)} & q_2^{(4)} & q_3^{(4)} & q_4^{(4)} & q_5^{(4)} & q_6^{(4)} \end{vmatrix} = 0.$$

Sie entspricht den Bedingungen § 58, (14′) und (14) dafür, daß drei Punkte in gerader Linie liegen oder drei Ebenen durch eine Achse gehen.

§ 61. Vier Ebenen und ihre Determinante.

1. Die Gleichungen und die Determinante von vier Ebenen. Vier Ebenen E_l, $l = 1, 2, 3, 4$, seien durch ihre Gleichungen in Tetraederkoordinaten:

$$(1) \qquad \begin{cases} X_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0, \\ X_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0, \\ X_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = 0, \\ X_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = 0, \end{cases}$$

oder:

$$X_k = \sum_1^4{}^l a_{kl}x_l = 0$$

gegeben. Ihre Determinante:

$$(2) \qquad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

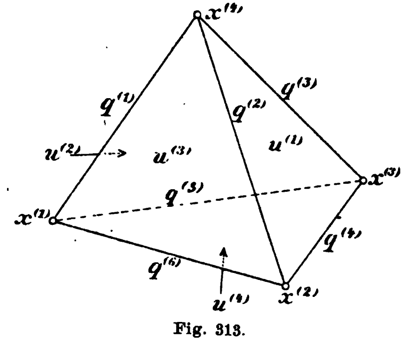


Fig. 313.

hat 16 Unterdeterminanten dritten Grades, die wir nach Anmerkung 1, III, 2 mit A_{kl}, und 36 Unterdeterminanten zweiten Grades, die wir ebenso mit α_{kl} bezeichnen.

2. Die Ebenen bilden ein Tetraeder. *Wenn die Determinante A vom Range 4 ist,* d. h. wenn sie nicht verschwindet, so bilden die vier Ebenen nach § 51, 7 ein *Tetraeder* (Fig. 313). Die *Koordinaten der*

vier Eckpunkte E_k des Tetraeders, der Schnittpunkte je dreier Ebenen (1), sind:

$$(3)\quad \begin{cases} x_1^{(1)} : x_2^{(1)} : x_3^{(1)} : x_4^{(1)} = A_{11} : A_{12} : A_{13} : A_{14}, \\ x_1^{(2)} : x_2^{(2)} : x_3^{(2)} : x_4^{(2)} = A_{21} : A_{22} : A_{23} : A_{24}, \\ x_1^{(3)} : x_2^{(3)} : x_3^{(3)} : x_4^{(3)} = A_{31} : A_{32} : A_{33} : A_{34}, \\ x_1^{(4)} : x_2^{(4)} : x_3^{(4)} : x_4^{(4)} = A_{41} : A_{42} : A_{43} : A_{44}, \end{cases}$$

oder:

$$\varrho x_l^{(k)} = A_{kl}.$$

Die *Achsenkoordinaten der sechs Kanten* $\varepsilon_k = \mathsf{E}_l \times \mathsf{E}_m$ des Tetraeders (wo lm die k^{te} Kombination der Reihe 23, 31, 12, 14, 24, 34 ist), der Schnittlinien je zweier Ebenen $X_l = 0$, $X_m = 0$, sind nach § 59, 1:

$$(4)\quad \begin{cases} q_1^{(1)} : q_2^{(1)} : q_3^{(1)} : q_4^{(1)} : q_5^{(1)} : q_6^{(1)} = \alpha_{11} : \alpha_{12} : \alpha_{13} : \alpha_{14} : \alpha_{15} : \alpha_{16}, \\ q_1^{(2)} : q_2^{(2)} : q_3^{(2)} : q_4^{(2)} : q_5^{(2)} : q_6^{(2)} = \alpha_{21} : \alpha_{22} : \alpha_{23} : \alpha_{24} : \alpha_{25} : \alpha_{26}, \\ q_1^{(3)} : q_2^{(3)} : q_3^{(3)} : q_4^{(3)} : q_5^{(3)} : q_6^{(3)} = \alpha_{31} : \alpha_{32} : \alpha_{33} : \alpha_{34} : \alpha_{35} : \alpha_{36}, \\ q_1^{(4)} : q_2^{(4)} : q_3^{(4)} : q_4^{(4)} : q_5^{(4)} : q_6^{(4)} = \alpha_{41} : \alpha_{42} : \alpha_{43} : \alpha_{44} : \alpha_{45} : \alpha_{46}, \\ q_1^{(5)} : q_2^{(5)} : q_3^{(5)} : q_4^{(5)} : q_5^{(5)} : q_6^{(5)} = \alpha_{51} : \alpha_{52} : \alpha_{53} : \alpha_{54} : \alpha_{55} : \alpha_{56}, \\ q_1^{(6)} : q_2^{(6)} : q_3^{(6)} : q_4^{(6)} : q_5^{(6)} : q_6^{(6)} = \alpha_{61} : \alpha_{62} : \alpha_{63} : \alpha_{64} : \alpha_{65} : \alpha_{66}, \end{cases}$$

oder:

$$\varrho q_l^{(k)} = \alpha_{kl}.$$

Die *Koordinaten der vier Ebenen* E_k des Tetraeders selbst sind nach (1):

$$(5)\quad \begin{cases} u_1^{(1)} : u_2^{(1)} : u_3^{(1)} : u_4^{(1)} = a_{11} : a_{12} : a_{13} : a_{14}, \\ u_1^{(2)} : u_2^{(2)} : u_3^{(2)} : u_4^{(2)} = a_{21} : a_{22} : a_{23} : a_{24}, \\ u_1^{(3)} : u_2^{(3)} : u_3^{(3)} : u_4^{(3)} = a_{31} : a_{32} : a_{33} : a_{34}, \\ u_1^{(4)} : u_2^{(4)} : u_3^{(4)} : u_4^{(4)} = a_{41} : a_{42} : a_{43} : a_{44}, \end{cases}$$

oder:

$$\varrho u_l^{(k)} = a_{kl}.$$

Die Relationen (Anm. 1, III, (17)):

$$(6)\quad \sum_1^4{}^m a_{km} A_{lm} = \begin{cases} A & \text{für } l = k \\ 0 & \text{für } l \neq k \end{cases}$$

drücken daher aus, daß die Ebene E_k und die Ecke E_l getrennt oder vereinigt liegen, je nachdem $l = k$ oder $l \neq k$ (vgl. § 58, (2)). Die Relationen (Anm. 1, III, (19)):

$$(7)\quad \sum_1^6{}^m \alpha_{km}\, \alpha_{l\bar{m}} = \begin{cases} A & \text{für } l = \bar{k} \\ 0 & \text{für } l \neq \bar{k} \end{cases}$$

bedeuten, daß die Achsen ε_k und ε_l windschief oder vereinigt liegen, je nachdem $l = \bar{k}$ oder $l \neq \bar{k}$ (vgl. § 59, (15)). Endlich die Relationen (Anm. 1, III, (20)):

$$(8) \qquad \sum_1^3 {}^m \alpha_{km} \alpha_{k\bar{m}} = 0$$

geben für die Achsenkoordinaten $q_m^{(k)}$ der Kante ε_k die identische Gleichung § 59, (5).

3. Die vier Ebenen gehen durch einen Punkt. *Wenn die Determinante A vom Range 3 ist,* d. h. wenn $A = 0$ ist, ohne daß alle

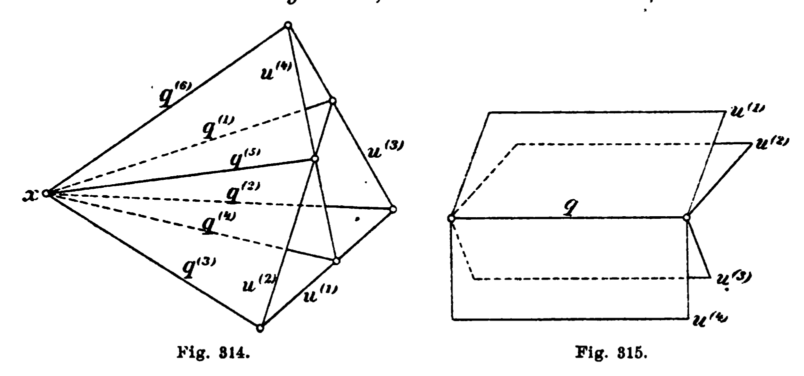


Fig. 314. Fig. 315.

16 Unterdeterminanten A_{kl} verschwinden, so *gehen die vier Ebnen nach* § 58, **11** *durch einen Punkt* (Fig. 314), *dessen Koordinaten sind:*

$$(9) \qquad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = A_{k1} : A_{k2} : A_{k3} : A_{k4},$$

mit $k = 1, 2, 3$ oder 4.

Zwischen den linken Seiten der Gleichungen (1) besteht die Identität (vgl. § 58, **10**):

$$(10) \qquad \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 = 0,$$

in der die konstanten Faktoren die Werte haben:

$$(11) \qquad \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4 = A_{1l} : A_{2l} : A_{3l} : A_{4l},$$

mit $l = 1, 2, 3$ oder 4.

Die sechs Kanten ε_k gehen ebenfalls durch den Punkt (9), sind aber im allgemeinen noch getrennt (Fig. 314).

Die vierfache Darstellung der Werte $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ oder $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$ in (9) und (11) beruht auf dem Satze (Anm. 1, III, (21)), daß *alle Unterdeterminanten zweiten Grades aus den A_{kl} verschwinden,* also:

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} A_{km} & A_{kn} \\ A_{lm} & A_{ln} \end{vmatrix} = 0.$$

4. Die vier Ebenen gehen durch eine Achse. *Wenn die Determinante vom Range 2 ist,* d. h. wenn alle 16 Unterdeterminanten $A_{kl} = 0$ sind, ohne daß alle 36 Unterdeterminanten α_{kl} verschwinden, so *gehen die vier Ebenen* nach § 58, 7 *durch eine Achse* (Fig. 315), deren Koordinaten sind:

$$(13)\qquad q_1 : q_2 : q_3 : q_4 : q_5 : q_6 = \alpha_{k1} : \alpha_{k2} : \alpha_{k3} : \alpha_{k4} : \alpha_{k5} : \alpha_{k6},$$

mit $k = 1, 2, 3, 4, 5$ oder 6.

Zwischen den linken Seiten von je drei Gleichungen (1) besteht eine Identität (§ 58, **6**):

$$(14)\qquad \begin{cases} \lambda_6 X_2 - \lambda_5 X_3 + \lambda_1 X_4 = 0, & \lambda_4 X_3 - \lambda_6 X_1 + \lambda_2 X_4 = 0, \\ \lambda_5 X_1 - \lambda_4 X_2 + \lambda_3 X_4 = 0, & \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0, \end{cases}$$

wo die konstanten Faktoren die Werte haben:

$$(15)\qquad \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4 : \lambda_5 : \lambda_6 = \alpha_{1l} : \alpha_{2l} : \alpha_{3l} : \alpha_{4l} : \alpha_{5l} : \alpha_{6l},$$

mit $l = 1, 2, 3, 4, 5$ oder 6.

Die sechsfache Darstellung der Verhältnisse der q_k und λ_k in (13) und (14) beruht auf dem Satze (Anm. 1, III, (22)), daß *alle Unterdeterminanten zweiten Grades aus den* α_{kl} *verschwinden,* also:

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{km} & \alpha_{kn} \\ \alpha_{lm} & \alpha_{ln} \end{vmatrix} = 0.$$

5. Die vier Ebenen fallen zusammen. *Wenn die Determinante* A *vom Range 1 ist,* d. h. wenn alle 36 Unterdeterminanten $\alpha_{kl} = 0$ sind (§ 58, **5**), ohne daß alle Elemente a_{kl} verschwinden, so *fallen die vier Ebenen* (1) *in eine Ebene zusammen,* deren Koordinaten sind:

$$(17)\qquad u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = a_{k1} : a_{k2} : a_{k3} : a_{k4},$$

mit $k = 1, 2, 3$ oder 4.

Zwischen den linken Seiten von je zwei der Gleichungen (1) besteht eine Identität von der Form (§ 58, **4**):

$$(18)\qquad \begin{cases} \lambda_2 X_3 - \lambda_3 X_2 = 0, & \lambda_3 X_1 - \lambda_1 X_3 = 0, & \lambda_1 X_2 - \lambda_2 X_1 = 0, \\ \lambda_1 X_4 - \lambda_4 X_1 = 0, & \lambda_2 X_4 - \lambda_4 X_2 = 0, & \lambda_3 X_4 - \lambda_4 X_3 = 0, \end{cases}$$

wo die konstanten Faktoren die Werte haben:

$$(19)\qquad \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4 = a_{1l} : a_{2l} : a_{3l} : a_{4l},$$

mit $l = 1, 2, 3$ oder 4. Es ist (Anm. 1, III, (23)):

$$(20)\qquad \begin{vmatrix} a_{km} & a_{kn} \\ a_{lm} & a_{ln} \end{vmatrix} = 0.$$

§ 62. Transversalen des Tetraeders in hyperboloidischer Lage.

1. Strahlen durch die Ecken und in den Seitenflächen des Tetraeders.

Vier durch die Ecken E_1, E_2, E_3, E_4 *des Koordinatentetraeders gehende Strahlen haben nach* § 59, (18′); (19′) *in laufenden Punktkoordinaten die Gleichungen:*

$$(1)\quad \begin{cases} x_2 : x_3 : x_4 = a_{12} : a_{13} : a_{14}, \\ x_3 : x_1 : x_4 = a_{23} : a_{21} : a_{24}, \\ x_1 : x_2 : x_4 = a_{31} : a_{32} : a_{34}, \\ x_1 : x_2 : x_3 = a_{41} : a_{42} : a_{43}, \end{cases}$$

Vier in den Seitenflächen E_1, E_2, E_3, E_4 *des Koordinatentetraeders liegende Strahlen haben nach* § 59, (18); (19) *in laufenden Ebenenkoordinaten die Gleichungen:*

$$(1')\quad \begin{cases} u_2 : u_3 : u_4 = b_{12} : b_{13} : b_{14}, \\ u_3 : u_1 : u_4 = b_{23} : b_{21} : b_{24}, \\ u_1 : u_2 : u_4 = b_{31} : b_{32} : b_{34}, \\ u_1 : u_2 : u_3 = b_{41} : b_{42} : b_{43}, \end{cases}$$

wenn ihre Achsen-, bezüglich Strahlenkoordinaten in folgender Weise bezeichnet werden:

$$(2)\quad \begin{array}{cccccc} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \\ \hline a_{14} & 0 & 0 & 0 & -a_{13} & a_{12} \\ 0 & a_{24} & 0 & a_{23} & 0 & -a_{21} \\ 0 & 0 & a_{34} & -a_{32} & a_{31} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 & 0. \end{array}$$

$$(2')\quad \begin{array}{cccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \\ \hline b_{14} & 0 & 0 & 0 & -b_{13} & b_{12} \\ 0 & b_{24} & 0 & b_{23} & 0 & -b_{21} \\ 0 & 0 & b_{34} & -b_{32} & b_{31} & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & 0 & 0 & 0. \end{array}$$

2. Bedingung für die hyperboloidische Lage der vier Geraden.

Die vier Geraden (1) liegen nach § 60, 7 hyperboloidisch, wenn jede Gerade p, die den drei Gleichungen:

$$(3)\quad \begin{cases} a_{14}p_1 - a_{13}p_5 + a_{12}p_6 = 0, \\ a_{24}p_2 - a_{21}p_6 + a_{23}p_4 = 0, \\ a_{34}p_3 - a_{32}p_4 + a_{31}p_5 = 0 \end{cases}$$

genügt, auch der Gleichung:

$$(4)\quad a_{41}p_1 + a_{42}p_2 + a_{43}p_3 = 0$$

genügt.

Die vier Geraden (1′) liegen nach § 60, 7 hyperboloidisch, wenn jede Gerade q, die den drei Gleichungen:

$$(3')\quad \begin{cases} b_{14}q_1 - b_{13}q_5 + b_{12}q_6 = 0, \\ b_{24}q_2 - b_{21}q_6 + b_{23}q_4 = 0, \\ b_{34}q_3 - b_{32}q_4 + b_{31}q_5 = 0 \end{cases}$$

genügt, auch der Gleichung:

$$(4')\quad b_{41}q_1 + b_{42}q_2 + b_{43}q_3 = 0$$

genügt.

Setzt man die aus (3) berechneten Werte p_1, p_2, p_3 in (4) ein, so folgt:

$$a_{41}\frac{a_{13}p_5 - a_{12}p_6}{a_{14}} + a_{42}\frac{a_{21}p_6 - a_{23}p_4}{a_{24}} + a_{43}\frac{a_{32}p_4 - a_{31}p_5}{a_{34}} = 0,$$

und damit diese Gleichung in p_4, p_5, p_6 identisch sei:

$$\frac{a_{43}}{a_{34}} a_{32} - \frac{a_{42}}{a_{24}} a_{23} = 0, \quad \frac{a_{41}}{a_{14}} a_{13} - \frac{a_{43}}{a_{34}} a_{31} = 0, \quad \frac{a_{42}}{a_{24}} a_{21} - \frac{a_{41}}{a_{14}} a_{12} = 0$$

oder

$$(5) \qquad \frac{a_{42}}{a_{43}} = \frac{a_{32}}{a_{34}} \cdot \frac{a_{24}}{a_{23}}, \quad \frac{a_{43}}{a_{41}} = \frac{a_{13}}{a_{14}} \frac{a_{34}}{a_{31}}, \quad \frac{a_{41}}{a_{42}} = \frac{a_{21}}{a_{24}} \frac{a_{14}}{a_{12}}.$$

Danach ist zuerst:

$$(6) \qquad \frac{a_{32}}{a_{34}} \cdot \frac{a_{24}}{a_{23}} \cdot \frac{a_{13}}{a_{14}} \cdot \frac{a_{34}}{a_{31}} \cdot \frac{a_{21}}{a_{24}} \frac{a_{14}}{a_{12}} = \frac{a_{32}}{a_{23}} \frac{a_{13}}{a_{31}} \frac{a_{21}}{a_{12}} = 1.$$

Wir können nun in (1), da es in jeder einzelnen Zeile nur auf die Verhältnisse der drei Konstanten ankommt, ohne Beschränkung: $a_{12} = a_{21}$, $a_{23} = a_{32}$ setzen und haben damit nach (6) auch $a_{13} = a_{31}$.

Dann wird nach (5):

$$\frac{a_{42}}{a_{43}} = \frac{a_{24}}{a_{34}}, \quad \frac{a_{43}}{a_{41}} = \frac{a_{34}}{a_{14}}, \quad \frac{a_{41}}{a_{42}} = \frac{a_{14}}{a_{24}}.$$

Wir können wieder ohne Beschränkung $a_{42} = a_{24}$ nehmen. Dann folgt:

$$a_{43} = a_{34}, \quad a_{14} = a_{41}.$$

Damit die vier Geraden (1) *hyperboloidisch liegen, ist notwendig und hinreichend, daß:*

$$(7) \qquad a_{kl} = a_{lk}.$$

Damit die vier Geraden (1') *hyperboloidisch liegen, ist notwendig und hinreichend, daß:*

$$(7') \qquad b_{kl} = b_{lk}.$$

Man kann den Satz mit sechs unabhängigen Konstanten μ_k und ν_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) auch so aussprechen:

Vier durch die Ecken des Tetraeders gehende Strahlen sind in hyperboloidischer Lage, wenn ihre Gleichungen (1) *die Form haben:*

$$(8) \quad \begin{cases} x_2 : x_3 : x_4 = \mu_3 : \mu_2 : \mu_4, \\ x_3 : x_1 : x_4 = \mu_1 : \mu_3 : \mu_5, \\ x_1 : x_2 : x_4 = \mu_2 : \mu_1 : \mu_6, \\ x_1 : x_2 : x_3 = \mu_4 : \mu_5 : \mu_6. \end{cases}$$

Vier in den Seitenflächen des Tetraeders liegende Strahlen sind in hyperboloidischer Lage, wenn ihre Gleichungen (1') *die Form haben:*

$$(8') \quad \begin{cases} u_2 : u_3 : u_4 = \nu_3 : \nu_2 : \nu_4, \\ u_3 : u_1 : u_4 = \nu_1 : \nu_3 : \nu_5, \\ u_1 : u_2 : u_4 = \nu_2 : \nu_1 : \nu_6, \\ u_1 : u_2 : u_3 = \nu_4 : \nu_5 : \nu_6. \end{cases}$$

3. Harmonikalbeziehungen der hyperboloidischen Strahlen. Der Schnittpunkt des vierten durch die Ecke E_4 gehenden Strahles (8) mit der Gegenebene E_4 hat nach § 57, **15** in bezug auf das Dreieck $E_1 E_2 E_3$ dieser Ebene die Dreieckskoordinaten:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \mu_4 : \mu_5 : \mu_6.$$

Die Harmonikale dieses Punktes in bezug auf dasselbe Dreieck

hat nach § 28, **11** die Linienkoordinaten:

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{1}{\mu_4} : \frac{1}{\mu_5} : \frac{1}{\mu_6}.$$

Dies sind aber nach § 57, **15** und § 59 (20) zugleich die Gleichungen der Harmonikale in Ebenenkoordinaten.

Die Verbindungsebene der vierten, in der Ebene E_4 des Koordinatentetraeders liegenden Geraden (8′) mit der Gegenecke E_4 hat nach § 57, **15** in bezug auf das Dreiflach $\mathsf{E}_1 \mathsf{E}_2 \mathsf{E}_3$ die Dreiflachskoordinaten $u_1 : u_2 : u_3 = \nu_4 : \nu_5 : \nu_6$. Der Harmonikalstrahl dieser Verbindungsebene in bezug auf dasselbe Dreiflach hat daher nach § 56, (33) die Strahlenkoordinaten:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{\mu_4} : \frac{1}{\mu_5} : \frac{1}{\mu_6}.$$

Dies sind wiederum (§ 57, **15**) zugleich die Gleichungen dieses Harmonikalstrahles in Punktkoordinaten. So folgt allgemein:

Die Schnittpunkte der vier durch die Ecken des Tetraeders gehenden Strahlen (8) *mit den Gegenebenen haben in bezug auf das Dreieck der in diesen liegenden Ecken des Tetraeders die Harmonikallinien:*

$$(9)\quad \begin{cases} u_2 : u_3 : u_4 = \frac{1}{\mu_3} : \frac{1}{\mu_2} : \frac{1}{\mu_4}, \\ u_3 : u_1 : u_4 = \frac{1}{\mu_1} : \frac{1}{\mu_3} : \frac{1}{\mu_5}, \\ u_1 : u_2 : u_4 = \frac{1}{\mu_2} : \frac{1}{\mu_1} : \frac{1}{\mu_6}, \\ u_1 : u_2 : u_3 = \frac{1}{\mu_4} : \frac{1}{\mu_5} : \frac{1}{\mu_6}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen haben aber mit $\frac{1}{\mu_k} = \nu_k$ die Form (8′). Es folgt also:[86])

Liegen vier durch die Ecken des Tetraeders gehende Strahlen hyperboloidisch, so liegen auch die Harmonikallinien ihrer Schnittpunkte mit den Gegenebenen hyperboloidisch.

Die Verbindungsebenen der vier in den Seitenebenen des Tetraeders liegenden Strahlen (8′) *mit den Gegenecken haben in bezug auf das Dreiflach der durch diese gehenden Seitenebenen des Tetraeders die Harmonikalstrahlen:*

$$(9')\quad \begin{cases} x_2 : x_3 : x_4 = \frac{1}{\nu_3} : \frac{1}{\nu_2} : \frac{1}{\nu_4}, \\ x_3 : x_1 : x_4 = \frac{1}{\nu_1} : \frac{1}{\nu_3} : \frac{1}{\nu_5}, \\ x_1 : x_2 : x_4 = \frac{1}{\nu_2} : \frac{1}{\nu_1} : \frac{1}{\nu_6}, \\ x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{\nu_4} : \frac{1}{\nu_5} : \frac{1}{\nu_6}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen haben aber mit $\frac{1}{\nu_k} = \mu_k$ die Form (8). Es folgt also:

Liegen vier in den Ebenen des Tetraeders verlaufende Strahlen hyperboloidisch, so liegen auch die Harmonikalstrahlen ihrer Verbindungsebenen mit den Gegenecken hypoboloidisch.

Die Beziehung zwischen den vier Strahlen durch die Ecken und den vier Strahlen in den Seitenebenen des Tetraeders ist nach der Form der Gleichungen (8), (9) und (8′), (9′) reziprok (vgl. § 55, 9).

4. Hyperboloidische Lage der Höhen eines Tetraeders. Sind die Seitenflächen eines Tetraeders $E_1 E_2 E_3 E_4$ in bezug auf das Koordinatensystem $Oxyz$ in doppelter Bezeichnung durch die vier Gleichungen gegeben:

$$(10)\quad \begin{cases} X_1 = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0, \\ X_2 = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0, \\ X_3 = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0, \\ X_4 = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} = a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = 0, \end{cases}$$

so sind die Gleichungen einer beliebigen durch die Ecke E_1 gehenden Geraden nach § 53, (6):

$$(11)\qquad X_2 : X_3 : X_4 = \nu_2 : \nu_3 : \nu_4$$

oder:

$$(12)\quad \nu_4 X_3 - \nu_3 X_4 = 0, \quad \nu_2 X_4 - \nu_4 X_2 = 0, \quad \nu_3 X_2 - \nu_2 X_3 = 0.$$

Die Richtungskosinus dieser Geraden verhalten sich nach § 48, (19) wie ihre drei ersten Achsenkoordinaten q_{23}, q_{31}, q_{12}; diese aber sind nach § 48, (3) proportional den Unterdeterminanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \nu_2 a_{41} - \nu_4 a_{21} & \nu_2 a_{42} - \nu_4 a_{22} & \nu_2 a_{43} - \nu_4 a_{23} \\ \nu_3 a_{21} - \nu_2 a_{31} & \nu_3 a_{22} - \nu_2 a_{32} & \nu_3 a_{23} - \nu_2 a_{33} \end{vmatrix},$$

also mit Benutzung der Bezeichnung § 61, **1**:

$$q_{23} : q_{31} : q_{12} = \alpha_{61}\nu_2 - \alpha_{51}\nu_3 + \alpha_{11}\nu_4 : \alpha_{62}\nu_2 - \alpha_{52}\nu_3 + \alpha_{12}\nu_4$$
$$: \alpha_{63}\nu_2 - \alpha_{53}\nu_3 + \alpha_{13}\nu_4.$$

Soll diese Gerade auf der Seite $X_1 = 0$ senkrecht stehen, muß nach § 41, (5) mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ:

$$\alpha_{61}\nu_2 - \alpha_{51}\nu_3 + \alpha_{11}\nu_4 = \varrho a_{11},$$
$$\alpha_{62}\nu_2 - \alpha_{52}\nu_3 + \alpha_{12}\nu_4 = \varrho a_{12},$$
$$\alpha_{63}\nu_2 - \alpha_{53}\nu_3 + \alpha_{13}\nu_4 = \varrho a_{13}.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach den Verhältnissen der ν_2, ν_3, ν_4 gibt (Anm. 2, II, 2):

$$(13)\quad \nu_2 : \nu_3 : \nu_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha_{51} & \alpha_{11} \\ a_{12} & \alpha_{52} & \alpha_{12} \\ a_{13} & \alpha_{53} & \alpha_{13} \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} \alpha_{61} & a_{11} & \alpha_{11} \\ \alpha_{62} & a_{12} & \alpha_{12} \\ \alpha_{63} & a_{13} & \alpha_{13} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_{61} & \alpha_{51} & a_{11} \\ \alpha_{62} & \alpha_{52} & a_{12} \\ \alpha_{63} & \alpha_{53} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

Nun sind die Elemente der zweiten der beiden folgenden Determinanten:

$$-A_{14} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63} \\ -\alpha_{51} & -\alpha_{52} & -\alpha_{53} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{vmatrix}$$

die Unterdeterminanten der ersten; die Unterdeterminanten der zweiten also proportional den Elementen der ersten (Anm. 1, II, (5)). Daher gibt die Entwicklung von (13):

$$\nu_2 : \nu_3 : \nu_4 = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} : a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} : a_{11}a_{41} + a_{12}a_{42} + a_{13}a_{43}.$$

Da Entsprechendes für die drei anderen Höhen gilt, so folgt unter Übergang zu der einfacheren Bezeichnung (10):

Die Gleichungen der Höhen des durch die Gleichungen (10) *gegebenen Tetraeders sind* (vgl. § 25, (17)):

$$(14)\begin{cases} X_2:X_3:X_4 = a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2:a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3:a_1a_4+b_1b_4+c_1c_4, \\ X_3:X_1:X_4 = a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3:a_2a_1+b_2b_1+c_2c_1:a_2a_4+b_2b_4+c_2c_4, \\ X_1:X_2:X_4 = a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1:a_3a_2+b_3b_2+c_3c_2:a_3a_4+b_3b_4+c_3c_4, \\ X_1:X_2:X_3 = a_4a_1+b_4b_1+c_4c_1:a_4a_2+b_4b_2+c_4c_2:a_4a_3+b_4b_3+c_4c_3. \end{cases}$$

Da man nun nach § 57, (1) X_1, X_2, X_3, X_4 als Tetraederkoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 in bezug auf das betrachtete Tetraeder (10) auffassen kann, so haben die Gleichungen (14) die Form (8) und es folgt:

Die vier Höhen eines Tetraeders haben hyperboloidische Lage.[85])

5. Satz über zwei Tetraeder.[115]) Die Gleichungen:

$$(15)\begin{cases} x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = a_{11} : a_{12} : a_{13} : a_{14}, \\ x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = a_{21} : a_{22} : a_{23} : a_{24}, \\ x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = a_{31} : a_{32} : a_{33} : a_{34}, \\ x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = a_{41} : a_{42} : a_{43} : a_{44}, \end{cases}$$

in denen:

$$(16) \qquad a_{kl} = a_{lk}$$

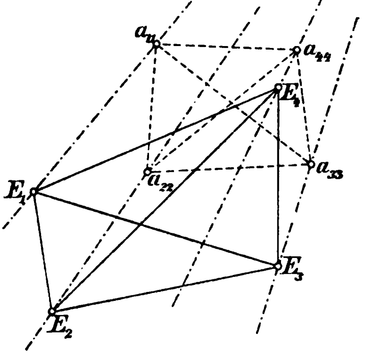


Fig. 316.

sei, geben bei *festem* a_{kl} $(k \neq l)$ nach (1) und (7) eine Parameterdarstellung der vier durch die Ecken E_1, E_2, E_3, E_4 des *Koordinatentetraeders* gehenden hyperboloidischen Strahlen (1) mit den Parametern a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} (vgl. § 57, 15). Den *wechselnden* Werten der Parameter entsprechen die bezüglich auf den einzelnen Strahlen liegenden *Punkte.* Vier *feste* Werte dieser Parameter bestimmen daher die Ecken

eines *zweiten Tetraeders* (Fig. 316), die bezüglich auf den vier Transversalen (15) des ersten Tetraeders liegen.

Die Seitenflächen dieses zweiten Tetraeders haben aber, da seine Eckpunkte die Koordinaten (15) haben, ihrerseits (nach § 61, 2, dual genommen) die Koordinaten:

$$(17)\qquad \begin{cases} u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = A_{11} : A_{12} : A_{13} : A_{14}, \\ u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = A_{21} : A_{22} : A_{23} : A_{24}, \\ u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = A_{31} : A_{32} : A_{33} : A_{34}, \\ u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = A_{41} : A_{42} : A_{43} : A_{44}, \end{cases}$$

wo die A_{kl} die Unterdeterminanten dritten Grades der Determinante der a_{kl} sind. Für diese folgt (Anm. 1, IV, 6) aus (16):

$$(18)\qquad A_{kl} = A_{lk}.$$

Nimmt man nun in (1′):

$$(19)\qquad b_{kl} = A_{kl} \quad (k \neq l),$$

so enthalten die Gleichungen (17) bei *festen* A_{kl} $(k \neq l)$ unabhängig für sich betrachtet, eine Parameterdarstellung der vier Strahlen (1′) mit den Parametern A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}. Den *wechselnden* Werten der Parameter entsprechen die bezüglich durch die einzelnen Strahlen gehenden *Ebenen*.

Zu diesen Ebenen gehören nun die Seitenflächen des zweiten Tetraeders, für die A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44} *feste* Werte haben. Mit anderen Worten: die Strahlen, in denen die Seitenflächen des zweiten Tetraeders die Seitenflächen des ersten schneiden, sind unter der Annahme (19) durch (1′) dargestellt und sind, da (7′) nach (18) erfüllt ist, hyperboloidisch. Es folgt also unter Hinzufügung des dualen Satzes:

Wenn die Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte zweier Tetraeder hyperboloidisch liegen, so sind auch die Schnittlinien entsprechender Seitenebenen der beiden Tetraeder in hyperboloidischer Lage.

Wenn die Schnittlinien entsprechender Seitenebenen zweier Tetraeder hyperboloidisch liegen, so sind auch die Verbindungslinien entsprechender Ecken der beiden Tetraeder in hyperboloidischer Lage.

§ 63. Die Transformation der Tetraederkoordinaten.

1. Allgemeine Form der Transformationsformeln.[91]) Zwischen den homogenen *gemeinen Koordinaten* x, y, z, t eines Punktes in bezug auf das Achsensystem $Oxyz$ und seinen *Tetraederkoordinaten* x_1, x_2, x_3, x_4 in bezug auf das Koordinatentetraeder $E_1E_2E_3E_4$ be-

stehen die Gleichungen § 57, (1) und (4). Zwischen x, y, z, t und den Tetraederkoordinaten y_1, y_2, y_3, y_4 in bezug auf ein anderes Koordinatentetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ bestehen dieselben Gleichungen, nur mit anderen Koeffizienten (Fig. 317). Man hat daher unter anderen die Beziehungen (vgl. § 30, 1):

Fig. 317.

$$\begin{cases} \varrho x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t, \\ \varrho x_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t, \\ \varrho x_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 t, \\ \varrho x_4 = a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma x = A_1' y_1 + A_2' y_2 + A_3' y_3 + A_4' y_4, \\ \sigma y = B_1' y_1 + B_2' y_2 + B_3' y_3 + B_4' y_4, \\ \sigma z = C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_3' y_3 + C_4' y_4, \\ \sigma t = D_1' y_1 + D_2' y_2 + D_3' y_3 + D_4' y_4. \end{cases}$$

Durch Substitution der Werte x, y, z, t in die Ausdrücke für x_1, x_2, x_3, x_4 erhält man zwischen den x_1, x_2, x_3, x_4 und den y_1, y_2, y_3, y_4 Gleichungen von der Form:

$$(1) \qquad \begin{cases} \varrho x_1 = c_{11} y_1 + c_{12} y_2 + c_{13} y_3 + c_{14} y_4, \\ \varrho x_2 = c_{21} y_1 + c_{22} y_2 + c_{23} y_3 + c_{24} y_4, \\ \varrho x_3 = c_{31} y_1 + c_{32} y_2 + c_{33} y_3 + c_{34} y_4, \\ \varrho x_4 = c_{41} y_1 + c_{42} y_2 + c_{43} y_3 + c_{44} y_4. \end{cases}$$

Zwischen den Tetraederkoordinaten eines Punktes in bezug auf zwei verschiedene Koordinatentetraeder bestehen stets Gleichungen von der Form (1).[42])

Da sowohl die Verhältnisse der x_1, x_2, x_3, x_4 als auch die der y_1, y_2, y_3, y_4 nach § 57, 2; 4 in umkehrbar eindeutiger Beziehung zu dem Punkte stehen, müssen die Gleichungen (1) auch nach den y_1, y_2, y_3, y_4 bis auf einen Proportionalitätsfaktor σ eindeutig auflösbar sein. *Es ist daher die Determinante:*

$$(2) \qquad C = | c_{kl} | \neq 0.$$

2. Die Elemente des neuen Koordinatensystems bei gegebenen Koeffizienten c_{kl}. Wir stellen uns die auf das Tetraeder $E_1 E_2 E_3 E_4$ bezogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 als die *ursprünglichen* (alten) Koordinaten vor und denken uns, jetzt ohne Vermittlung der x, y, z, t, die *neuen* Tetraederkoordinaten y_1, y_2, y_3, y_4 durch die Gleichungen

(1) mit gegebenen und der Bedingung (2) entsprechenden *Koeffizienten* c_{kl} eingeführt.

Die Gleichungen (1) geben dann unmittelbar die alten Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 eines Punktes an, dessen neue Koordinaten y_1, y_2, y_3, y_4 bekannt sind. Nun haben aber die Ecken J_1, J_2, J_3, J_4 und der Einheitspunkt J_0 des neuen Koordinatensystems die neuen Koordinaten (§ 57, (16); (22)):

$$y_1, y_2, y_3, y_4 = 1, 0, 0, 0; \quad 0, 1, 0, 0; \quad 0, 0, 1, 0; \quad 0, 0, 0, 1; \quad 1, 1, 1, 1.$$

Bezeichnen wir daher die alten Koordinaten mit:

$$(3) \quad \begin{cases} x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_4^{(1)}; \quad x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, x_4^{(2)}, \quad x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)} x_4^{(3)}; \\ x_1^{(4)}, x_2^{(4)}, x_3^{(4)}, x_4^{(4)}; \quad x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, \end{cases}$$

so ist nach (1):

$$(4) \qquad x_1^{(k)} : x_2^{(k)} : x_3^{(k)} : x_4^{(k)} = c_{1k} : c_{2k} : c_{3k} : c_{4k}$$

und:

$$(5) \quad \begin{cases} x_1^0 : x_2^0 : x_3^0 : x_4^0 = c_{11} + c_{12} + c_{13} + c_{14} : c_{21} + c_{22} + c_{23} + c_{24} : \\ c_{31} + c_{32} + c_{33} + c_{34} : c_{41} + c_{42} + c_{43} + c_{44}. \end{cases}$$

Bei gegebenen sechszehn Koeffizienten c_{kl} sind die Eckpunkte und der Einheitspunkt des neuen Koordinatensystems vollkommen bestimmt.

Infolge der Voraussetzung (2) liegen keine vier dieser fünf Punkte in einer Ebene, da die Determinante der Koordinaten von je vier solchen Punkten nach (4) und (5) immer C ist (Anm. 1, IV, 4).

3. Die Koeffizienten c_{kl} bei gegebenen Elementen des neuen Koordinatensystems. Ist umgekehrt das neue System durch die Koordinaten (3) der fünf Punkte J_1, J_2, J_3, J_4, J_0 gegeben, so erhält man zuerst aus (4) mit vier unbestimmten Faktoren n_1, n_2, n_3, n_4:

$$(6) \qquad c_{1k} = n_k x_1^{(k)}, \quad c_{2k} = n_k x_2^{(k)}, \quad c_{3k} = n_k x_3^{(k)}, \quad c_{4k} = n_k x_4^{(k)}$$

und danach aus (5) mit einem unbestimmten Faktor n_0 die Gleichungen:

$$(7) \qquad n_1 x_k^{(1)} + n_2 x_k^{(2)} + n_3 x_k^{(3)} + n_4 x_k^{(4)} = n_0 x_k^0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Aus diesen ergeben sich n_1, n_2, n_3, n_4 bis auf den Faktor n_0 eindeutig und alle vier von Null verschieden, wenn von den fünf gegebenen Punkten J_1, J_2, J_3, J_4, J_0 keine vier in einer Ebene liegen. Danach sind aber die sechszehn Koeffizienten c_{kl} aus (6) ebenfalls bis auf einen gemeinsamen Faktor n_0 bestimmt.[41])

Bei gegebenen Eckpunkten und Einheitspunkt des neuen Koordinatensystems sind, falls von diesen fünf Punkten keine vier in einer Ebene liegen, die sechszehn Koeffizienten c_{kl} ihren fünfzehn Verhältnissen nach bestimmt.

Die Determinante (2) wird dabei nach (6):

$$C = n_1 n_2 n_3 n_4 \,|\, x_k^{(l)} \,| \neq 0.$$

4. Umkehr der Transformationsformeln (1). Indem wir in den Gleichungen (1) den Faktor ϱ nicht ausdrücklich schreiben, haben wir statt ihrer (vgl. § 30, 4):

$$(8) \qquad x_k = \sum_1^4{}^l c_{kl} y_l, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Durch Auflösung nach y_1, y_2, y_3, y_4 ergibt sich hieraus (Anm. 2, III, (2)):

$$(9) \qquad C y_l = \sum_1^4{}^k C_{kl} x_k, \quad l = 1, 2, 3, 4.$$

Hier sind die Koeffizienten C_{kl} die Unterdeterminanten dritten Grades von C (Anm. 1, III, (2)):

Die Gleichungen (9) führen auch umgekehrt durch Auflösung nach x_1, x_2, x_3, x_4 zu (8) zurück (Anm. 1, III, (8)), so daß ebensogut die sechszehn Koeffizienten C_{kl} in (9) statt der c_{kl} in (1) als die gegebenen Größen gelten können.

5. Transformation der Ebenenkoordinaten. Sind u_1, u_2, u_3, u_4 die Koordinaten einer Ebene im alten Koordinatensystem $E_1E_2E_3E_4, E_0$, so ist die Gleichung der Ebene nach § 58, 2:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0.$$

Durch die Substitution (8) wird aber:

$$(10) \quad \sum_1^4{}^k u_k x_k = \sum_1^4{}^k u_k \sum_1^4{}^l c_{kl} y_l = \sum_1^4{}^l \left\{ \sum_1^4{}^k c_{kl} u_k \right\} y_l = \sum_1^4{}^l v_l y_l,$$

wo die Koeffizienten v_1, v_2, v_3, v_4 die Werte haben:

$$(11) \qquad v_l = \sum_1^4{}^k c_{kl} u_k.$$

Die Gleichung der Ebene wird daher im neuen System

$$v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 + v_4 y_4 = 0,$$

und v_1, v_2, v_3, v_4 werden ihre neuen Koordinaten.

Die Auflösung der Gleichungen (11) aber:

$$(12) \qquad C u_k = \sum_1^4{}^l C_{kl} v_l$$

gibt umgekehrt die alten Koordinaten der Ebene dargestellt durch die neuen.

6. Transformation der Linienkoordinaten. Sind x_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ und x_l' $(l = 1, 2, 3, 4)$ irgend zwei Punkte und u_k und u_l' irgend zwei Ebenen einer Geraden (Fig. 318), so sind deren Strahlen- und Achsenkoordinaten nach § 59, **1**:

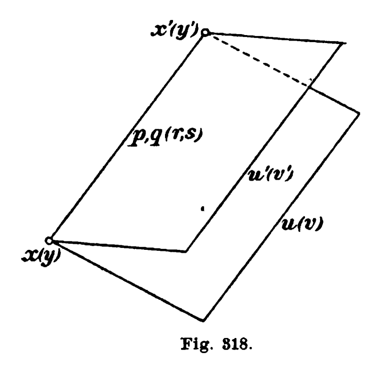


Fig. 318.

$$(13) \qquad \begin{aligned} p_{kl} &= x_k x_l' - x_l x_k' \\ q_{kl} &= u_k u_l' - u_l u_k'. \end{aligned}$$

Sind ferner y_k, y_l' und v_k, v_l' die neuen Koordinaten derselben beiden Punkte und beiden Ebenen, so sind die neuen Koordinaten der Geraden:

$$(14) \qquad \begin{aligned} r_{mn} &= y_m y_n' - y_n y_m' \\ s_{mn} &= v_m v_n' - v_n v_m'. \end{aligned}$$

Aus (13) wird nach (8) und (12):

$$\begin{aligned} p_{kl} &= \sum_1^4{}^m c_{km} y_m \cdot \sum_1^4{}^n c_{ln} y_n' - \sum_1^4{}^m c_{lm} y_m \cdot \sum_1^4{}^n c_{kn} y_n' \\ &= \sum_1^4{}^m \sum_1^4{}^n (c_{km} c_{ln} - c_{lm} c_{kn}) y_m y_n'. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^2 \cdot q_{kl} &= \sum_1^4{}^m C_{km} v_m \cdot \sum_1^4{}^n C_{ln} v_n' - \sum_1^4{}^m C_{lm} v_m \cdot \sum_1^4{}^n C_{kn} v_n' \\ &= \sum_1^4{}^m \sum_1^4{}^n (C_{km} C_{ln} - C_{lm} C_{kn}) v_m v_n'. \end{aligned}$$

Von den sechszehn Koeffizienten jeder der beiden Doppelsummen sind die vier, für die $m = n$ ist, Null; von den zwölf anderen aber sind zwei solche entgegengesetzt gleich, die einer Vertauschung von m und n entsprechen. Daher ist:

$$(15) \qquad \begin{cases} p_{kl} = \sum_1^6{}^{mn} (c_{km} c_{ln} - c_{lm} c_{kn}) (y_m y_n' - y_n y_m') \\ C^2 \cdot q_{kl} = \sum_1^6{}^{mn} (C_{km} C_{ln} - C_{lm} C_{kn}) (v_m v_n' - v_n v_m'), \end{cases}$$

wo das Indizespaar mn nur die sechs Kombinationen:

$$mn = 23,\ 31,\ 12,\ 14,\ 24,\ 34$$

zu durchlaufen braucht.

Ebenso ergibt sich aus (14) durch die Substitution (9) und (11):

$$(15')\qquad \begin{cases} C^2 \cdot r_{mn} = \sum_1^6{}^{kl} (C_{km}C_{ln} - C_{lm}C_{kn})(x_k x_l' - x_l x_k') \\ s_{mn} = \sum_1^6{}^{kl} (c_{km}c_{ln} - c_{lm}c_{kn})(u_k u_l' - u_l u_k'). \end{cases}$$

Setzen wir nun (Anm. 1, III, (4); (12)):

$$(16)\qquad \gamma_{kl,\,mn} = \begin{vmatrix} c_{km} & c_{kn} \\ c_{lm} & c_{ln} \end{vmatrix} \qquad \Gamma_{kl,\,mn} = \begin{vmatrix} C_{km} & C_{kn} \\ C_{lm} & C_{ln} \end{vmatrix},$$

so wird aus (15) und (15'):

$$(17)\qquad p_{kl} = \sum_1^6{}^{mn} \gamma_{kl,\,mn} r_{mn}, \qquad C^2 q_{kl} = \sum_1^6{}^{mn} \Gamma_{kl,\,mn} s_{mn}.$$

$$(18)\qquad C^2 r_{mn} = \sum_1^6{}^{kl} \Gamma_{kl,\,mn} p_{kl}, \qquad s_{mn} = \sum_1^6{}^{kl} \gamma_{kl,\,mn} q_{kl}$$

oder mit der in § 59, (2), (3) eingeführten Bezeichnung:

$$(19)\qquad p_k = \sum_1^6{}^{l} \gamma_{kl}\, r_l \qquad (19')\qquad C^2 q_k = \sum_1^6{}^{l} \Gamma_{kl}\, s_l$$

$$(20)\qquad C^2 r_l = \sum_1^6{}^{k} \Gamma_{kl}\, p_k \qquad (20')\qquad s_l = \sum_1^6{}^{k} \gamma_{kl}\, q_k.$$

Dies sind die Relationen zwischen den alten Koordinaten p_k, q_k *und den neuen Koordinaten* r_l, s_l *der Geraden.*[116])

Die Gleichungen (20) und (19') sind die genauen Auflösungen der Gleichungen (19) und (20'); denn da (Anm. 1, III, (18)):

$$(21)\qquad \sum_1^6{}^{k} \gamma_{kl}\, \Gamma_{km} = \begin{cases} C^2 & \text{für } l = m, \\ 0 & \text{für } l \neq m, \end{cases} \qquad \sum_1^6{}^{l} \gamma_{kl}\, \Gamma_{ml} = \begin{cases} C^2 & \text{für } k = m, \\ 0 & \text{für } k \neq m, \end{cases}$$

so folgt aus der Gleichung (19) durch Multiplikation mit Γ_{km} und Summation über k:

$$\sum_1^6{}^{k} \Gamma_{km}\, p_k = \sum_1^6{}^{l} \left\{ \sum_1^6{}^{k} \gamma_{kl}\, \Gamma_{km} \right\} r_l = C^2 \cdot r_m$$

und aus der Gleichung (20') durch Multiplikation mit Γ_{ml} und Summation über l:

$$\sum_1^6{}^{l} \Gamma_{ml}\, s_l = \sum_1^6{}^{k} \left\{ \sum_1^6{}^{l} \gamma_{kl}\, \Gamma_{ml} \right\} q_k = C^2 \cdot q_m.$$

7. Die Bedeutung der Koeffizienten der Transformationsformeln für die Koordinatentetraeder. Ebenso wie aus (1) die Darstellung (4) der Koordinaten der Ecken, so folgen aus (12) die Koordinaten der Seitenflächen und aus (19) die Koordinaten der Kanten des neuen Tetraeders. Umgekehrt dienen die Formeln (9), (11), (20) zur Bestimmung der neuen Koordinaten der Elemente des alten Tetraeders (§ 57, (16); § 59, (21)). Man findet auf diese Weise (Fig. 319):

Die alten Koordinaten der Bestandteile des neuen Tetraeders sind:

$$(22)\quad \begin{cases} x_k^{(l)} = c_{kl}\ (k = 1, 2, 3, 4) \text{ die Punktkoordinaten der Ecke } J_l; \\ u_k^{(l)} = C_{kl}\ (k = 1,2,3,4) \text{ die Ebenenkoordinaten der Seitenfläche } \mathsf{I}_l; \\ p_k^{(l)} = \gamma_{kl}\ (k = 1,2,3,4,5,6) \text{ die Strahlenkoordinaten der Kante } i_l; \\ q_k^{(l)} = \Gamma_{kl}\ (k = 1,2,3,4,5,6) \text{ die Achsenkoordinaten der Kante } \iota_l. \end{cases}$$

In der Tat ist in Übereinstimmung mit § 59, (8) und **11** (Anm. 1, III, (11)):

$$(23)\qquad \Gamma_{\overline{kl}} = C \cdot \gamma_{kl}.$$

Die neuen Koordinaten der Bestandteile des alten Tetraeders sind:

$$(24)\quad \begin{cases} y_l^{(k)} = C_{kl}\ (l = 1, 2, 3, 4) \text{ die Punktkoordinaten der Ecke } E_k; \\ v_l^{(k)} = c_{kl}\ \ (l = 1, 2, 3, 4) \text{ die Ebenenkoordinaten der Seitenfläche } \mathsf{E}_k; \\ r_l^{(k)} = \Gamma_{kl}\ (l = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \text{ die Strahlenkoordinaten der Kante } e_k; \\ s_l^{(k)} = \gamma_{kl}\ \ (l = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \text{ die Achsenkoordinaten der Kante } \varepsilon_k. \end{cases}$$

8. Einführung der Koordinaten der Ecken, Seitenflächen und Kanten des neuen Tetraeders in die Transformationsformeln. Indem

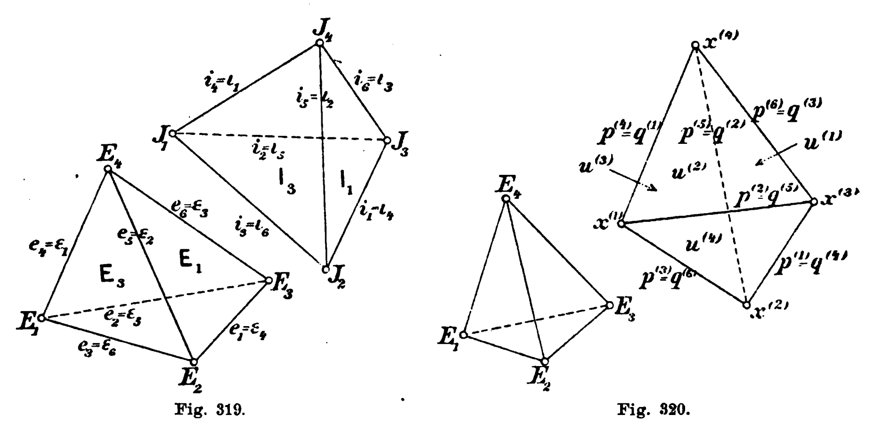


Fig. 319. Fig. 320.

wir den Proportionalitätsfaktor n_k in den Formeln (6) in $x_l^{(k)}$ aufnehmen, geben wir dem erhaltenen Resultate zur Vereinfachung folgende Gestalt (Fig. 320):

Haben die Ecken J_l *des neuen Systems die Punktkoordinaten* $x_k^{(l)}$, *die Seitenflächen* $\mathfrak{l}_l$ *die Ebenenkoordinaten* $u_k^{(l)}$, *die Kanten* i_l *die Strahlenkoordinaten* $p_k^{(l)}$, *die Kanten* ι_l *die Achsenkoordinaten* $q_k^{(l)}$, *so bestehen zwischen den alten Koordinaten* x_k, u_k, p_k, q_k *und neuen Koordinaten* y_l, v_l, r_l, s_l *der laufenden Elemente: Punkt, Ebene und gerade Linie die Relationen* (vgl. § 30, 8):

$$(25)\quad x_k = \sum_1^4{}^l x_k^{(l)} y_l \qquad (25')\quad S y_l = \sum_1^4{}^k u_k^{(l)} x_k,$$

$$(26)\quad S u_k = \sum_1^4{}^l u_k^{(l)} v_l \qquad (26')\quad v_l = \sum_1^4{}^k x_k^{(l)} u_k,$$

$$(27)\quad p_k = \sum_1^6{}^l p_k^{(l)} r_l \qquad (27')\quad S^2 r_l = \sum_1^6{}^k q_k^{(l)} p_k,$$

$$(28)\quad S^2 q_k = \sum_1^6{}^l q_k^{(l)} s_l \qquad (28')\quad s_l = \sum_1^6{}^k p_k^{(l)} q_k;$$

In (25), (26) geht k, in (25'), (26') l über 1, 2, 3, 4; in (27), (28) geht k, in (27'), (28') l über 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Hier sind etwa die sechszehn Größen $x_k^{(l)}$ $(k, l = 1, 2, 3, 4)$ beliebig, mit nicht verschwindender Determinante:

$$(29)\qquad S = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} & x_1^{(4)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} & x_2^{(4)} \\ x_3^{(1)} & x_3^{(2)} & x_3^{(3)} & x_3^{(4)} \\ x_4^{(1)} & x_4^{(2)} & x_4^{(3)} & x_4^{(4)} \end{vmatrix}$$

gegeben. Alsdann ist (Anm. 1, III, (2)):

$$(30)\qquad u_k^{(l)} = \begin{vmatrix} x_{k_1}^{(l_1)} & x_{k_1}^{(l_2)} & x_{k_1}^{(l_3)} \\ x_{k_2}^{(l_1)} & x_{k_2}^{(l_2)} & x_{k_2}^{(l_3)} \\ x_{k_3}^{(l_1)} & x_{k_3}^{(l_2)} & x_{k_3}^{(l_3)} \end{vmatrix},$$

wo $\left.\begin{matrix} k \cdot k_1 k_2 k_3 \\ l \,.\, l_1\, l_2\, l_3 \end{matrix}\right\} = 1.234,\ 2.314,\ 3.124,\ 4.321;$

ferner:

$$(31)\qquad p_k^{(l)} = \begin{vmatrix} x_{k_1}^{(l_1)} & x_{k_1}^{(l_2)} \\ x_{k_2}^{(l_1)} & x_{k_2}^{(l_2)} \end{vmatrix}, \quad q_k^{(l)} = \begin{vmatrix} u_{k_1}^{(l_1)} & u_{k_1}^{(l_2)} \\ u_{k_2}^{(l_1)} & u_{k_2}^{(l_2)} \end{vmatrix},$$

wo $k_1 k_2$ die k^{te}, $l_1 l_2$ die l^{te} Kombination der Reihe 23, 31, 12, 14, 24, 34; und hierbei (Anm. 1, III, (11)):

(32) $$q_k^{(l)} = S \cdot p_{\bar{k}}^{(\bar{l})},$$

wenn $\bar{k}$ und $\bar{l}$ die zu k und l komplementären Kombinationen sind (vgl. § 59, **1**). Es sind überdies die Determinanten vierten und sechsten Grades (Anm. 1, III, (7); (13); (8)):

(33) $$|u_k^{(l)}| = S^3,$$ (34) $$|p_k^{(l)}| = S^3;$$

ferner:

(35) $$S^2 \cdot x_k^{(l)} = \begin{vmatrix} u_{k_1}^{(l_1)} & u_{k_1}^{(l_2)} & u_{k_1}^{(l_3)} \\ u_{k_2}^{(l_1)} & u_{k_2}^{(l_2)} & u_{k_2}^{(l_3)} \\ u_{k_3}^{(l_1)} & u_{k_3}^{(l_2)} & u_{k_3}^{(l_3)} \end{vmatrix}$$

Die nebeneinanderstehenden Gleichungen in (25)—(28′) sind jedesmal Auflösungen voneinander. Aus diesem Grunde sind die Faktoren S und S^2 beibehalten, obwohl sie für das einzelne Formelsystem belanglos sind, insofern von den jeweiligen Koordinaten nur die Verhältnisse in Frage kommen.

9. Die Invarianten der vereinigten Lage von Punkt und Ebene oder von zwei Geraden. Schon in (10) wurde die für jeden Punkt $x_k = y_l$ und jede Ebene $u_k = v_l$ geltende Gleichung:

(36) $$\sum_1^4{}^k u_k x_k = \sum_1^4{}^l v_l y_l$$

abgeleitet.

Der Ausdruck:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4$$

ist daher eine identische Invariante (Kovariante) der Transformation.[43])

Entsprechend folgt aus (19), (19′) für zwei beliebige Gerade p, r und q', s' mit Hinblick auf (21):

(37) $$C^2 \cdot \sum_1^6{}^k p_k q_k' = \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \gamma_{kl} r_l \cdot \sum_1^6{}^m \Gamma_{km} s_m' =$$

$$\sum_1^6{}^l \sum_1^6{}^m \left\{ \sum_1^6{}^k \gamma_{kl} \Gamma_{km} \right\} r_l s_m' = C^2 \cdot \sum_1^6{}^l r_l s_l',$$

Der Ausdruck:

$$p_1 q_1' + p_2 q_2' + p_3 q_3' + p_4 q_4' + p_5 q_5' + p_6 q_6'$$

ist eine identische Invariante der Transformation (Moment zweier Geraden, § 48, (25)).

10. Die Invariante von vier Punkten. Nach dem Multipli-

kationssatz der Determinanten (Anm. 1, V, 3) folgt aus (8) für irgend vier Punkte $P_l = x_k^{(l)}, y_k^{(l)}, l = 1, 2, 3, 4$ (vgl. § 30, 9):

$$(38) \qquad |x_k^{(l)}| = C \cdot |y_k^{(l)}|.$$

Die Determinante der Koordinaten von vier beliebigen Punkten ist eine Invariante. Die Gleichung kommt, wenn die Determinanten $|x_k^{(l)}|$ und $|y_k^{(l)}|$ nach den Elementen einer Zeile entwickelt werden, im wesentlichen auf (36), und wenn die Determinanten nach den Unterdeterminanten zweiten Grades zweier Zeilen entwickelt werden, ebenso auf (37) zurück (Anm. 1, III, (17); (18)).

§ 64. Der Inhalt der Transformationsformeln.

1. Parameterdarstellung des Gesamtraumes. Die Transformationsformeln § 63, (25) bis (28) können auch als *Parameterdarstellungen* der auf das alte Koordinatensystem $E_1 E_2 E_3 E_4 E_0$ bezogenen Koordinaten x_k, u_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ und p_k, q_k $(k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ der Punkte, Ebenen und Geraden des Raumes betrachtet werden. Die *Parameter* y_l, v_l $(l = 1, 2, 3, 4)$ und die (nicht unabhängigen, vgl. § 59, 2) r_l, s_l $(l = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ bedeuten dann selbst Tetraederkoordinaten in bezug auf das Tetraeder der vier Punkte $x_k^{(l)}$ oder der vier Ebenen $u_k^{(l)}$ (vgl. § 63, Fig. 320).

Als besondere Fälle aber gehen aus diesen allgemeinen Parameterdarstellungen des Gesamtraumes systematisch *alle Parameterdarstellungen der Gebilde niederer Mannigfaltigkeiten* hervor, die wir früher nach der einen oder anderen Methode abgeleitet haben.

2. Parameterdarstellung der Punkte eines Feldes oder der Ebenen eines Bündels.

Für einen Punkt in der Ebene I_4 des neuen Koordinatentetraeders (§ 63, Fig. 319) ist $y_4 = 0$, während y_1, y_2, y_3 nach § 57, **16** Dreieckskoordinaten werden.

Für eine Ebene durch die Ecke J_4 des neuen Koordinatentetraeders (§ 63, Fig. 319) ist $v_4 = 0$, während v_1, v_2, v_3 nach § 57, **16** Dreiflachskoordinaten werden.

Es folgt daher aus § 63, (25) mit $y_4 = 0$ und (26) mit $v_4 = 0$, wenn wir wieder einen allgemeinen Proportionalitätsfaktor ϱ hinzufügen:[107])

Ist eine Ebene durch drei Punkte $x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, x_k^{(3)}$ *gegeben* (Fig. 321a), *so stellen sich die Koordinaten* x_k *des laufenden Punktes der Ebene in*

Ist ein Bündel durch drei Ebenen $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, u_k^{(3)}$ *gegeben* (Fig. 321b), *so stellen sich die Koordinaten* u_k *der laufenden Ebene des Bündels*

bezug auf das Tetraeder $E_1 E_2 E_3 E_4$ *mittels der Formeln:*

(1) $\varrho x_k = x_k^{(1)} y_1 + x_k^{(2)} y_2 + x_k^{(3)} y_3,$

$k = 1, 2, 3, 4,$ *durch die Dreiecks-*

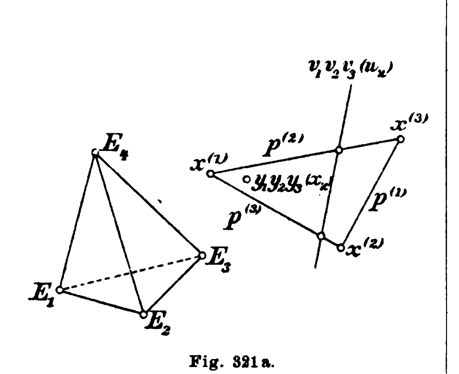


Fig. 321 a.

koordinaten y_1, y_2, y_3 *des Punktes in bezug auf das Dreieck* $x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, x_k^{(3)}$ *dar.*

in bezug auf das Tetraeder $E_1 E_2 E_3 E_4$ *mittels der Formeln:*

(1′) $\varrho u_k = u_k^{(1)} v_1 + u_k^{(2)} v_2 + u_k^{(3)} v_3,$

$k = 1, 2, 3, 4,$ *durch die Dreiflachs-*

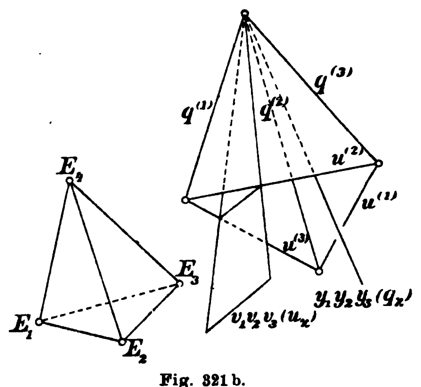


Fig. 321 b.

koordinaten v_1, v_2, v_3 *der Ebene in bezug auf das Dreiflach* $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, u_k^{(3)}$ *dar* (vgl. § 58, **13**).

3. Parameterdarstellung der Geraden eines Feldes oder Bündels.

Für eine Gerade in der Ebene I_4 des neuen Koordinatentetraeders ist nach § 59, **10**:

$$r_4 = 0, \quad r_5 = 0, \quad r_6 = 0; \quad r_1 = v_1, \quad r_2 = v_2, \quad r_3 = v_3,$$

wo v_1, v_2, v_3 Dreieckskoordinaten sind.

Für eine Gerade durch die Ecke J_4 des neuen Koordinatentetraeders ist nach § 59, **10**:

$$s_4 = 0, \quad s_5 = 0, \quad s_6 = 0; \quad s_1 = x_1, \quad s_2 = x_2, \quad s_3 = x_3,$$

wo x_1, x_2, x_3 Dreikantskoordinaten sind.

Daher ergibt sich aus § 63, (27), (28) bei nunmehr unabhängigen v_1, v_2, v_3 oder x_1, x_2, x_3 (vgl. § 59, (5), (5′)):[108])

Ist eine Ebene durch drei in ihr liegende Gerade $p_k^{(1)}, p_k^{(2)}, p_k^{(3)}$ *gegeben* (vgl. Fig. 321 a), *so stellen sich die Strahlenkoordinaten* p_k *der laufenden Geraden der Ebene in bezug auf das Tetraeder* $E_1 E_2 E_3 E_4$ *mittels der Formeln:*

Ist ein Bündel durch drei ihm angehörige Geraden $q_k^{(1)}, q_k^{(2)}, q_k^{(3)}$ *gegeben* (vgl. Fig. 321 b), *so stellen sich die Achsenkoordinaten* q_k *der laufenden Geraden des Bündels in bezug auf das Tetraeder* $E_1 E_2 E_3 E_4$ *mittels der Formeln:*

(2) $\varrho p_k = p_k^{(1)} v_1 + p_k^{(2)} v_1 + p_k^{(3)} v_3$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, *durch die Dreieckskoordinaten* v_1, v_2, v_3 *der Geraden in bezug auf das Dreieck* $p_k^{(1)}$, $p_k^{(2)}$, $p_k^{(3)}$ *dar.*

(2′) $\varrho q_k = q_k^{(1)} y_1 + q_k^{(2)} y_2 + q_k^{(3)} y_3$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, *durch die Dreikantskoordinaten* y_1, y_2, y_3 *der Geraden in bezug auf das Dreikant* $q_k^{(1)}$, $q_k^{(2)}$, $q_k^{(3)}$ *dar* (vgl. § 53, **4**).

Die Werte (2′) erfüllen die Gleichungen § 60, (7); denn beispielsweise die erste derselben wird, wenn wir die Determinanten durch ihre drei Diagonalglieder bezeichnen, durch die Substitution (2′):

$$|q_2 q_3^{(1)} q_4^{(2)}| = |q_2^{(1)} q_3^{(1)} q_4^{(2)}| y_1 + |q_2^{(2)} q_3^{(1)} q_4^{(2)}| y_2 + |q_2^{(3)} q_3^{(1)} q_4^{(2)}| y_3 = 0.$$

Denn es sind hier die Koeffizienten von y_1 und y_2 Null, weil zwei Zeilen der Determinanten gleich sind, und ist der Koeffizient von y_3 Null, weil die Geraden $q_k^{(1)}$, $q_k^{(2)}$, $q_k^{(3)}$ durch einen Punkt gehen (nach § 59, (25)). Daher geht in der Tat jede durch (2′) dargestellte Gerade q_k durch den Schnittpunkt der beiden Geraden $q_k^{(1)}$ und $q_k^{(2)}$, also durch das Zentrum des Bündels.

4. Parameterdarstellung der Punkte einer Reihe und der Ebenen eines Büschels.

Für einen Punkt auf der Kante i_3 des neuen Tetraeders (vgl. § 63, Fig. 319a) ist $y_3 = 0$ und $y_4 = 0$,

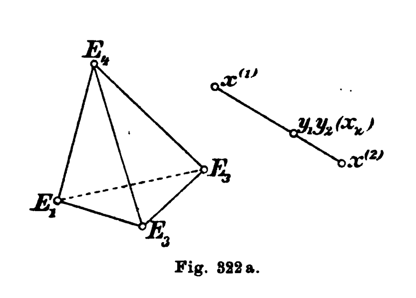


Fig. 322a.

während y_1, y_2 nach § 57, **14** Zweieckskoordinaten sind. Es folgt daher aus § 63, (25):[80])

Ist eine Gerade durch zwei Punkte $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$ *gegeben* (Fig. 322a), *so stellen sich die Koordinaten* x_k *des laufenden Punktes der Geraden in bezug*

Für eine Ebene durch die Kante ι_3 des neuen Tetraeders (vgl. § 63, Fig. 319b) ist $v_3 = 0$ und $v_4 = 0$,

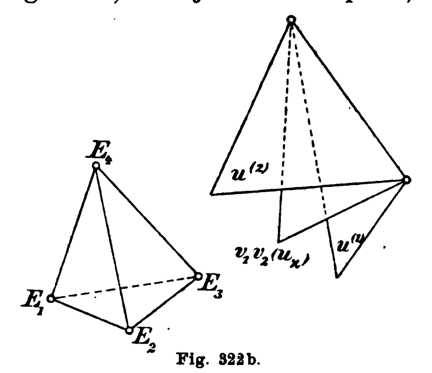


Fig. 322b.

während v_1, v_2 nach § 57, **14** Zweiflachskoordinaten sind. Es folgt daher aus § 63, (26):

Ist eine Gerade durch zwei Ebenen $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$ *gegeben* (Fig. 322b), *so stellen sich die Koordinaten* u_k *der laufenden Ebene durch die Gerade*

auf das Tetraeder $E_1E_2E_3E_4$ *mittels der Formeln:*

(3) $\varrho x_k = x_k^{(1)} y_1 + x_k^{(2)} y_2,$

$k = 1, 2, 3, 4,$ *durch die Zweieckskoordinaten* y_1, y_2 *des Punktes in bezug auf das Zweieck* $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$ *dar.*

in bezug auf das Tetraeder $E_1E_2E_3E_4$ *mittels der Formeln:*

(3') $\varrho u_k = u_k^{(1)} v_1 + u_k^{(2)} v_2,$

$k = 1, 2, 3, 4,$ *durch die Zweiflachskoordinaten* v_1, v_2 *der Ebene in bezug auf das Zweiflach* $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$ *dar* (vgl. § 58, **9**).

5. Parameterdarstellung der Strahlen eines Strahlbüschels.

Alle Strahlen (2), für die $v_3 = 0$ ist, gehen durch die Ecke $x^{(3)}$ (Fig. 321a, § 28, **16**):

Ist ein Strahlbüschel durch zwei ihm angehörige Strahlen $p_k^{(1)}$, $p_k^{(2)}$ *gegeben* (Fig. 323a), *so stellen sich die Strahlenkoordinaten* p_k *der laufenden Geraden des Büschels in bezug auf das Tetraeder* $E_1E_2E_3E_4$ *mittels der Formeln:*

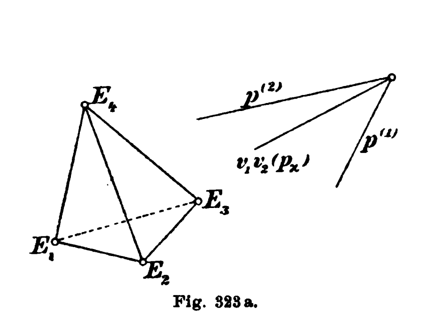


Fig. 323a.

(4) $\varrho p_k = p_k^{(1)} v_1 + p_k^{(2)} v_2,$

$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$ *durch die Zweiseitskoordinaten* v_1, v_2 *der Geraden in bezug auf das Zweiseit* $p_k^{(1)}$, $p_k^{(2)}$ *dar.*

Alle Strahlen (2'), für die $y_3 = 0$ ist, liegen in der Ebene $u^{(3)}$ (Fig. 321b):

Ist ein Strahlbüschel durch zwei ihm angehörige Strahlen $q_k^{(1)}$, $q_k^{(2)}$ *gegeben* (Fig. 323b), *so stellen sich die Achsenkoordinaten* q_k *der laufenden Geraden des Büschels in bezug auf das Tetraeder* $E_1E_2E_3E_4$ *mittels der Formeln:*

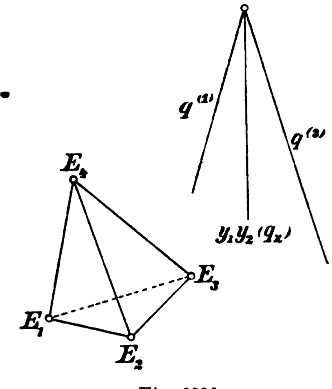


Fig. 323b.

(4') $\varrho q_k = q_k^{(1)} y_1 + q_k^{(2)} y_2,$

$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ *durch die Zweiseitskoordinaten* y_1, y_2 *der Geraden in bezug auf das Zweiseit* $q_k^{(1)}$, $q_k^{(2)}$ *dar* (vgl. § 52, **12**).

Die Zweiseitskoordinaten v_1, v_2 und y_1, y_2 des Strahles im Strahlbüschel (vgl. § 7, **2**) erscheinen hierbei das eine Mal als *ein Sonderfall*

der Linienkoordinaten in der Ebene, das andere Mal als *ein Sonderfall der Strahlenkoordinaten im Bündel.*[36])

6. Übergang von der Parameterdarstellung auf die Koordinatentransformation in Ebene und Bündel. Die Parameterdarstellungen (1) und (2) enthalten als besondere Fälle der Formeln für die Koordinatentransformation in der Ebene und im Bündel. Um beide gleichzeitig zu erhalten, lassen wir die Figur 319 des § 63 in die spezielle Form Figur 324 übergehen, legen also die Ecken J_4 und E_4, sowie die Seitenebenen I_4 und E_4 zusammen. Wir haben dann *in der Ebene* $\mathsf{E}_4 = \mathsf{I}_4$ *zwei beliebige Koordinatendreiecke* $E_1E_2E_3$ *und* $J_1J_2J_3$ und *an der Ecke* $E_4 = J_4$ *zwei beliebige Koordinatendreikante* $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ *und* $\iota_1\iota_2\iota_3$. Diese befinden sich mit jenen in perspektiver Lage, so daß die Dreieckskoordinaten x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 der Punkte oder die Dreieckskoordinaten u_1, u_2, u_3 und v_1, v_2, v_3 der Linien in bezug auf $E_1E_2E_3$ und $J_1J_2J_3$ nach § 56, **10** gleichzeitig Dreiflachskoordinaten der Strahlen oder Ebenen in bezug auf $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ und $\iota_1\iota_2\iota_3$ sind.

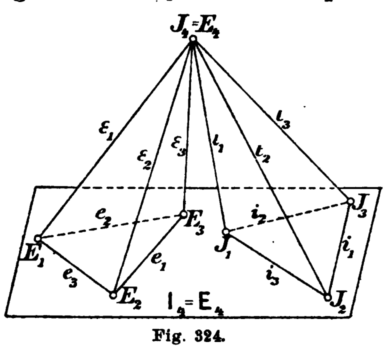


Fig. 324.

Infolge der Annahme $E_4 = J_4$ und $\mathsf{E}_4 = \mathsf{I}_4$ ist nun (vgl. § 63, Fig. 319 und 320; § 64, Fig. 324):

(5) $x_4^{(1)} = 0, \quad x_4^{(2)} = 0, \quad x_4^{(3)} = 0;$ (6) $u_4^{(1)} = 0, \quad u_4^{(2)} = 0, \quad u_4^{(3)} = 0,$

weil J_1, J_2, J_3 in E_4 liegen und I_1, I_2, I_3 durch E_4 gehen (§ 58, (7); (7')):

$$(7) \qquad \begin{cases} p_k^{(1)} = 0, & p_k^{(2)} = 0, \quad p_k^{(3)} = 0, \quad k = 4, 5, 6; \\ p_k^{(1)} = u_k^{(1)}, & p_k^{(2)} = u_k^{(2)}, \quad p_k^{(3)} = u_k^{(3)}, \quad k = 1, 2, 3, \end{cases}$$

weil i_1, i_2, i_3 in E_4 liegen, wobei $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$, $u_k^{(3)}$ die Linienkoordinaten von i_1, i_2, i_3 in bezug auf das Dreieck $E_1E_2E_3$ sind (vgl. § 59, **10**);

$$(8) \qquad \begin{cases} q_k^{(1)} = 0 & q_k^{(2)} = 0, \quad q_k^{(3)} = 0, \quad k = 4, 5, 6; \\ q_k^{(1)} = x_k^{(1)}, & q_k^{(2)} = x_k^{(2)}, \quad q_k^{(3)} = x_k^{(3)}, \quad k = 1, 2, 3; \end{cases}$$

weil ι_1, ι_2, ι_3 durch E_4 gehen, wobei $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, $x_k^{(3)}$ die Strahlenkoordinaten von ι_1, ι_2, ι_3 in bezug auf das Dreiflach $\mathsf{E}_1\mathsf{E}_2\mathsf{E}_3$ sind (vgl. § 59, **10**).

Während nun die Formeln (1) und (2) *im allgemeinen* die Parameterdarstellung der Punkte und Geraden einer *beliebigen* Ebene I_4 in bezug auf das Tetraeder $E_1E_2E_3E_4$ enthalten, ist diese Ebene *jetzt* die Ebene $\mathsf{E}_4 = E_1E_2E_3$; in der Tat gibt nach (5) die letzte Formel (1)

$x_4 = 0$ und geben nach (7) die drei letzten Formeln (2) $p_4 = 0$, $p_5 = 0$, $p_6 = 0$; die drei ersten Formeln je von (1) und (2) aber geben (die letzteren nach (7) und § 59, **10**) in der Form:

$$(9) \qquad \varrho x_k = x_k^{(1)} y_1 + x_k^{(2)} y_2 + x_k^{(3)} y_3,$$

$$(10) \qquad \varrho u_k = u_k^{(1)} v_1 + u_k^{(2)} v_2 + u_k^{(3)} v_3,$$

$k = 1, 2, 3$, die bereits in § 30, 8 direkt abgeleiteten Formeln *für die Transformation der Dreieckskoordinaten des Punktes und der Geraden in der Ebene.*

Während ferner die Formeln (1') und (2') *im allgemeinen* die Parameterdarstellung der Ebenen und Geraden eines Bündels an einem *beliebigen* Punkte J_4 in bezug auf das Tetraeder $E_1 E_2 E_3 E_4$ enthalten, ist dieser Punkt *jetzt* der Punkt E_4; in der Tat gibt nach (6) die letzte Formel (1') $u_4 = 0$ und geben nach (8) die drei letzten Formeln (2') $q_4 = 0$, $q_5 = 0$, $q_6 = 0$; die drei ersten Formeln je von (1') und (2') aber liefern (die letzteren nach (8) und § 59, **10**) die bisher nicht erwähnte Transformation im Bündel:

Der Übergang von dem auf das Dreiflach $\mathsf{E}_1 \mathsf{E}_2 \mathsf{E}_3$ (Fig. 324) *bezüglichen Koordinaten* x_k *des Strahles und* u_k *der Ebene im Bündel zu den auf das Dreiflach* $\mathsf{I}_1 \mathsf{I}_2 \mathsf{I}_3$ *bezüglichen Koordinaten* y_k, v_k *wird durch die Transformationsformeln vermittelt:*

$$(9') \qquad \varrho x_k = x_k^{(1)} y_1 + x_k^{(2)} y_2 + x_k^{(3)} y_3,$$

$$(10') \qquad \varrho u_k = u_k^{(1)} v_1 + u_k^{(2)} v_2 + u_k^{(3)} v_3,$$

$k = 1, 2, 3$, *wo* $x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, x_k^{(3)}$ *die Koordinaten der neuen Kanten* $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ *und* $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, u_k^{(3)}$ *die Koordinaten der neuen Seitenflächen* $\mathsf{I}_1, \mathsf{I}_2, \mathsf{I}_3$ *in bezug auf das alte Dreiflach sind.*

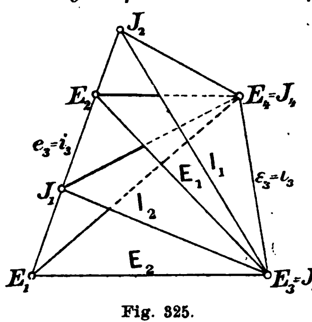


Fig. 325.

Bei der angenommenen perspektiven Lage von Ebene und Bündel (Fig. 324) stimmen die Formeln (9') und (10') formell mit (9) und (10) überein (vgl. § 56, **10**).

7. Übergang von der Parameterdarstellung der Punktreihe und des Ebenenbüschels auf die Transformation der Zweiecks und Zweiflachskoordinaten. Die Parameterdarstellungen (3) und (3') enthalten als besondere Fälle die Formeln für die Transformation der Zweiecks- und Zweiflachskoordinaten. Um beide gleichzeitig zu erhalten, lassen wir die Figur 319 in § 63 in die spezielle Form Figur 325 übergehen, legen also die Ecken J_3 und E_3, J_4 und E_4, sowie die Seitenflächen I_3 und E_3, I_4 und E_4 zusammen.

Wir haben dann *in der Kante* $e_3 = i_3$ *zwei beliebige Koordinatenzweiecke* $E_1 E_2$ *und* $J_1 J_2$ und *an der Kante* $\varepsilon_3 = \iota_3$ *zwei beliebige Koordinatenzweiflache* $\mathsf{E}_1 \mathsf{E}_2$ *und* $\mathsf{I}_1 \mathsf{I}_2$.

Es ist ferner:

$$x_3^{(1)} = 0, \quad x_4^{(1)} = 0; \quad x_3^{(2)} = 0, \quad x_4^{(2)} = 0,$$

da J_1 und J_2 in E_3 und E_4 liegen;

$$u_3^{(1)} = 0, \quad u_4^{(1)} = 0; \quad u_3^{(2)} = 0, \quad u_4^{(2)} = 0,$$

da I_1 und I_2 durch E_3 und E_4 gehen.

Daher reduzieren sich die zwei letzten Formeln (3) und (3′) auf $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, bezüglich $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ und geben die zwei ersten Formeln in:

$$(11) \quad \begin{cases} \varrho x_k = x_k^{(1)} y_1 + x_k^{(2)} y_2, \\ k = 1, 2, \end{cases} \qquad (11') \quad \begin{cases} \varrho u_k = u_k^{(1)} v_1 + u_k^{(2)} v_2, \\ k = 1, 2, \end{cases}$$

die Transformation der Zweieckskoordinaten auf der Geraden, wie in § 8, (17), und *die Transformation der Zweiflachskoordinaten im Ebenenbüschel.*

8. Parameterdarstellung von Ebenenbüschel und Strahlbüschel im Bündel. Aus den Transformationsformeln (9′) und (10′) geht nun mit $y_3 = 0$ und $v_3 = 0$ hervor (vgl. § 30, **10**; § 49, (22); (30)):

Ist ein Strahlbüschel im Bündel durch die Strahlen $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$ *gegeben* (Fig. 326a), *so stellen sich die Koordinaten* x_k *des laufenden Strahles des Büschels in bezug auf das Dreikant* $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$ *mittels der Formeln:*

$$(12) \quad \varrho x_k = x_k^{(1)} y_1 + x_k^{(2)} y_2,$$

$k = 1, 2, 3,$ *durch die Zweiseits-*

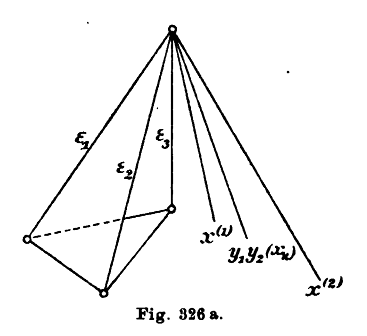


Fig. 326 a.

Ist ein Ebenenbüschel im Bündel durch die Ebenen $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$ *gegeben* (Fig. 326b), *so stellen sich die Koordinaten* u_k *der laufenden Ebene des Büschels in bezug auf das Dreiflach* $\mathsf{E}_1 \mathsf{E}_2 \mathsf{E}_3$ *mittels der Formeln:*

$$(12') \quad \varrho u_k = u_k^{(1)} v_1 + u_k^{(2)} v_2,$$

$k = 1, 2, 3,$ *durch die Zweiflachs-*

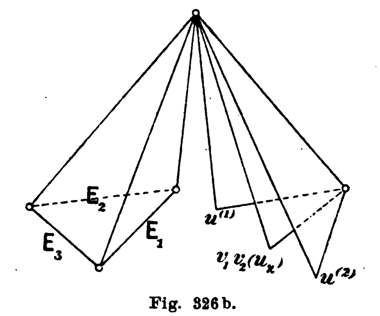


Fig. 326 b.

koordinaten des Strahles in bezug auf das Zweiseit $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$ *dar.* | *koordinaten der Ebene in bezug auf das Zweiflach* $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$ *dar.*

9. Übergang von den Transformationsformeln auf die Identitätensätze. Wenn in den Transformationsformeln § 63, (25), die wir nun mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ schreiben:

$$(13)\qquad \varrho x_k = x_k^{(1)} y_1 + x_k^{(2)} y_2 + x_k^{(3)} y_3 + x_k^{(4)} y_4, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

den Parametern y_1, y_2, y_3, y_4 bestimmte Werte gegeben werden, so ist auch x_k ein bestimmter Punkt, ebenso wie die vier Punkte $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, $x_k^{(3)}$, $x_k^{(4)}$. Schreiben wir nun $-y$ für ϱ, multiplizieren mit den laufenden Ebenenkoordinaten u_k und summieren über k, so ergibt sich aus (13) unter Benutzung der Abkürzungen § 58, (21′):

$$(14)\qquad yU + y_1 U_1 + y_2 U_2 + y_3 U_3 + y_4 U_4 = 0.$$

Es ist die *fünfgliedrige Identität* § 51, 8 zwischen den linken Seiten der Gleichungen von fünf Punkten. *In ihr bedeuten also die Faktoren* y_1, y_2, y_3, y_4 *die Tetraederkoordinaten des fünften Punktes* $U = 0$ *in bezug auf das Tetraeder der vier anderen Punkte* $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$, $U_4 = 0$.

In gleicher Weise leitet man aus (1) durch Multiplikation mit den laufenden Ebenenkoordinaten u_k und Addition die viergliedrige Identität (vgl. § 58, (22′)):

$$(15)\qquad yU + y_1 U_1 + y_2 U_2 + y_3 U_3 = 0$$

zwischen den linken Seiten der Gleichungen von vier Punkten einer Ebene und aus (3) die dreigliedrige Identität (vgl. § 58, (13′)):

$$(16)\qquad yU + y_1 U_1 + y_2 U_2 = 0$$

zwischen den linken Seiten der Gleichungen von drei Punkten einer Geraden ab; in (15) bedeuten die Faktoren y_1, y_2, y_3 die Dreieckskoordinaten des vierten Punktes $U = 0$ in bezug auf das Dreieck der drei anderen; in (16) bedeuten die Faktoren y_1, y_2 die Zweieckskoordinaten des dritten Punktes $U = 0$ in bezug auf das Zweieck der beiden anderen.

10. Zusammenfassung des Inhaltes der Transformationsformeln. Die Formeln § 63, (25) bis (28) *für die Transformation der Koordinaten der Punkte, Strahlen und Ebenen des Raumes* umfassen nach § 64, 6; 7 als Sonderfälle die Transformation der Koordinaten *der Punkte und Strahlen in der Ebene; der Strahlen und Ebenen im Bündel; der Punkte auf der Punktreihe* und *der Ebenen im Ebenenbüschel*, bezüglich *Strahlen im Strahlbüschel.*

Sie umfassen nach § 64, **2**; **3**; **4**; **5**; **8** *die Parameterdarstellungen der Punkt- und Strahlfelder, der Ebenen- und Strahlbündel, der Punktreihen, Strahlbüschel und Ebenenbüschel im Raume; der Punktreihen und Strahlbüschel in der Ebene; der Strahlbüschel und Ebenenbüschel im Bündel.*

Sie stehen nach § 64, **9** in unmittelbarem Zusammenhang mit den *Identitätensätzen.*

Sie haben aber endlich neben ihrer ursprünglichen Bedeutung für die Transformation der Koordinaten noch *eine zweite selbständige und umfassende Bedeutung zur Darstellung der projektiven Verwandtschaften*, worüber die §§ 65—69 handeln sollen.

VII. Kapitel.

Die analytische Darstellung der projektiven Verwandtschaften.

§ 65. Projektive Grundgebilde erster Stufe.

1. Begriff der projektiven Beziehung zweier Grundgebilde erster Stufe. Wenn sich zwei gleichnamige oder ungleichnamige Gebilde erster Stufe (Punktreihen, Strahlbüschel, Ebenenbüschel) in *perspektiver Lage* befinden, so werden nach § 5, **1**; 8; § 52, **1**; 8 die beiderseitigen Elemente einander *zugeordnet* und haben nach § 5, **3**; **9**; § 52, **4**; **6**; **9** je vier Elemente des einen dasselbe *Doppelverhältnis* wie die vier entsprechenden Elemente des anderen.

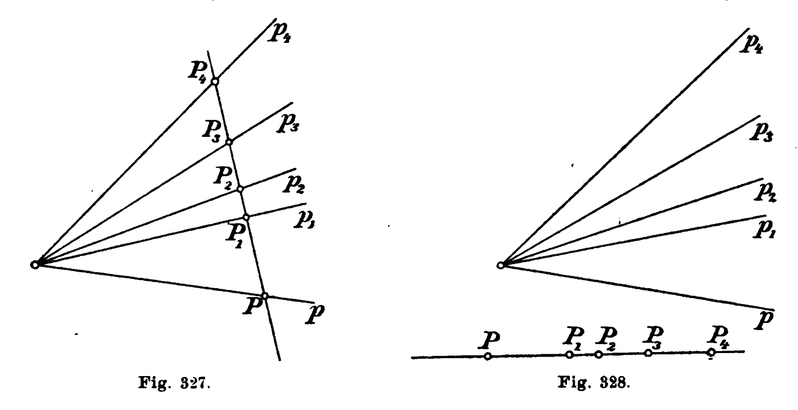


Fig. 327. Fig. 328.

Indem man diese Zuordnung (Fig. 327 z. B. für Punktreihe und

Strahlbüschel) durch gleiche Benennung entsprechender Elemente festlegt, besteht sie selbst und mit ihr die Doppelverhältniseigenschaft auch *nach Aufhebung* der perspektiven Lage (Fig. 328) unverändert fort.

Wir geben in diesem Sinne *unabhängig von der Lage der Gebilde gegeneinander* (Fig. 328) die Definition:[117])

I. *Zwei gleichnamige oder ungleichnamige Gebilde erster Stufe heißen projektiv, wenn jedem Elemente des einen ein Element des anderen derart entspricht, daß irgend vier Elemente des einen dasselbe Doppelverhältnis haben wie die vier entsprechenden Elemente des anderen.*

2. Vereinfachung der Definition. Zwei Punktreihen beispielsweise sind nach § 65, **1** projektiv, wenn die Punkte P der einen und die Punkte P' der anderen sich derart entsprechen, daß für je vier Paare entsprechender Punkte (§ 3, (6)):

$$(1)\qquad (P_1 P_2 P_3 P_4) = (P_1' P_2' P_3' P_4').$$

Fig. 329.

Sind daher E_1, E_2, E_0 drei feste Punkte der ersteren Reihe und E_1', E_2', E_0' die entsprechenden der anderen, und entspricht dem laufenden Punkte P der ersteren der laufende Punkt P' der anderen (Fig. 329), so folgt als besonderer Fall der Gleichung (1):

$$(2)\qquad (E_1 E_2 P E_0) = (E_1' E_2' P' E_0').$$

Diese besondere Gleichung (2) hat aber die allgemeinere (1) wieder zur Folge. Nach § 6, (16); (25) ist nämlich mit den Abkürzungen:

$$(3)\qquad \mu = (E_1 E_2 P E_0);\quad \mu' = (E_1' E_2' P' E_0')$$

für irgend vier Punkte P_i oder P_i' und ihre entsprechenden Werte μ_i oder μ_i' $(i = 1, 2, 3, 4)$:

$$(4)\qquad \begin{cases} (P_1 P_2 P_3 P_4) = \dfrac{(\mu_1 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_4)}{(\mu_2 - \mu_3)(\mu_1 - \mu_4)}; \\[2ex] (P_1' P_2' P_3' P_4') = \dfrac{(\mu_1' - \mu_3')(\mu_2' - \mu_4')}{(\mu_2' - \mu_3')(\mu_1' - \mu_4')}. \end{cases}$$

Besteht nun die Bedingung (2) oder, in der Bezeichnung (3) ausgedrückt:

$$(5)\qquad \mu = \mu',$$

so folgt nach (4) wieder die Gleichung (1). Somit gilt allgemein:

II. *Zwei Grundgebilde erster Stufe sind projektiv, wenn jedem Element des einen ein Element des anderen derart entspricht, daß drei feste Elemente und das laufende Element des einen dasselbe Doppelverhältnis*

haben wie die entsprechenden Elemente, drei feste und ein laufendes, des anderen.

3. Bestimmung der projektiven Beziehung. Die Gleichung (2) enthält die *vollständige Bestimmung* der projektiven Beziehung, da sie einerseits bei gegebenen festen Punkten E_1, E_2, E_0; E_1', E_2', E_0' jedem Punkte P einen Punkt P' eindeutig (vgl. § 3, **6**) zuordnet und ebenso umgekehrt jedem Punkte P' einen Punkt P, anderseits aber die allgemeine Gleichheit (1) der Doppelverhältnisse zur Folge hat. Da sie überdies keine andere Beziehung der festen Punkte untereinander voraussetzt, als daß $E_1 E_1'$, $E_2 E_2'$ und $E_0 E_0'$ entsprechende Punkte sind, so folgt:

III. *Die projektive Beziehung zweier Grundgebilde erster Stufe ist vollständig bestimmt, wenn drei beliebige (getrennte,* vgl. § 65, **8**) *Elemente des einen dreien beliebigen (getrennten) Elementen des andern entsprechend gesetzt werden.*

4. Kanonische Darstellung der projektiven Beziehung in Doppelverhältniskoordinaten. Indem wir die notwendige und hinreichende Bedingung (2) der projektiven Beziehung zweier Punktreihen in der Form (5) schreiben, ist sie bereits in *Doppelverhältniskoordinaten* der beiden Punktreihen dargestellt. Ob es sich dabei um zwei Punktreihen oder um eine Punktreihe und ein Strahlbüschel oder irgend zwei Grundgebilde erster Stufe handelt, ist für diese Darstellung gleichgültig. Es ist daher nur eine andere Ausdrucksweise der Erklärung § 65, **2**, II, wenn wir sagen:

IV. *Zwei Grundgebilde werden projektiv aufeinander bezogen, indem bei Einführung eines Systems von Doppelverhältniskoordinaten* μ *und* μ' *in jedem der beiden Gebilde* (vgl. § 6, **6** und § 56, **2**) *je zwei solche Elemente beider Gebilde einander entsprechend gesetzt werden, die gleiche Koordinaten haben:*

$$\mu = \mu'. \tag{5}$$

Insbesondere entsprechen sich die drei das Koordinatensystem bildenden Elemente beider Reihen, da sie selbst bezüglich gleiche Koordinaten $\mu = 0, \infty, 1$ und $\mu' = 0, \infty, 1$ haben (vgl. § 6, **6**).

5. Darstellung in gemeinen Koordinaten. Sind auf zwei projektiven Punktreihen (Fig. 330) gemeine Koordinatensysteme mit den beliebig gewählten Anfangspunkten O und O' eingeführt, und haben die drei festen Punkte E_1, E_2, E_0 und der laufende Punkt P

Fig. 330.

(vgl. § 65, 2) der einen Reihe die Koordinaten a, b, c, x und die entsprechenden Punkte E_1', E_2', E_0', P' der andern die Koordinaten a', b', c', x', so nimmt durch Einführung dieser Koordinaten die Gleichung (5) nach § 6, (17) die Form an:

$$\frac{(b-c)(a-x)}{(a-c)(b-x)} = \frac{(b'-c')(a'-x')}{(a'-c')(b'-x')} \tag{6}$$

oder:

$$\begin{cases} (a-c)(b'-c')(b-x)(a'-x') - \\ (a'-c')(b-c)(b'-x')(a-x) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

oder mit den Abkürzungen:

$$\begin{cases} A = (a-c)(b'-c') \quad -(a'-c')(b-c), \\ B = -(a-c)(b'-c')\ a' + (a'-c')(b-c)b', \\ C = -(a-c)(b'-c')\ b + (a'-c')(b-c)a, \\ D = (a-c)(b'-c')a'b - (a'-c')(b-c)ab': \end{cases} \tag{8}$$

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0. \tag{9}$$

Die projektive Beziehung zweier Punktreihen drückt sich in gemeinen Koordinaten x und x' beider durch eine Gleichung von der Form (9) *aus.*

Ebenso wird nach § 6, (17'); § 49, (12) die projektive Beziehung zwischen zwei Strahlbüscheln oder zwei Ebenenbüscheln oder einem Strahl- und einem Ebenenbüschel in gemeinen Koordinaten $\operatorname{tg}\varphi$ und $\operatorname{tg}\varphi'$ beider durch eine Gleichung von der Form:

$$A \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varphi' + B \operatorname{tg}\varphi + C \operatorname{tg}\varphi' + D = 0 \tag{10}$$

und zwischen einer Punktreihe und einem Strahl- oder Ebenenbüschel in gemeinen Koordinaten x und $\operatorname{tg}\varphi$ beider durch eine Gleichung von der Form:

$$Ax \operatorname{tg}\varphi + Bx + C \operatorname{tg}\varphi + D = 0 \tag{11}$$

dargestellt.

Die Gleichung § 5, (4) ist ein Spezialfall von (11) mit $A = 0$, $D = 0$.

Aufgelöst nach x' oder x nimmt die Gleichung (9) die Form an:

$$x' = -\frac{Bx + D}{Ax + C}, \quad x = -\frac{Cx' + D}{Ax' + B}. \tag{12}$$

6. Rückkehr von der Gleichung (9) zur Gleichung (7). Ist eine projektive Beziehung zweier Punktreihen durch die zweimal drei Punkte a, b, c und a', b', c' gegeben, so wird sie nach § 65, 5 durch eine Gleichung von der Form (9) dargestellt, wo die Koeffizienten A, B, C, D die Werte (8) haben. Ist umgekehrt eine Gleichung (9)

mit gegebenen Koeffizienten A, B, C, D vorgelegt, so stellt sie eine Beziehung zwischen den Punkten x und x' dar, bei der je zwei Punkte x und x' sich wechselseitig eindeutig entsprechen (vgl. (12)).

Sind nun a, a'; b, b' und c, c' drei Paare entsprechender Punkte, gelten also nach (9) die Gleichungen:

$$(13)\qquad \begin{cases} Aaa' + Ba + Ca' + D = 0, \\ Abb' + Bb + Cb' + D = 0, \\ Acc' + Bc + Cc' + D = 0, \end{cases}$$

so bestimmen diese die Verhältnisse $A : B : C : D$. Die Gleichung (9) nimmt dann unter Elimination von A, B, C, D aus (9) und (13) die Form an:

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} xx' & x & x' & 1 \\ aa' & a & a' & 1 \\ bb' & b & b' & 1 \\ cc' & c & c' & 1 \end{vmatrix} = \Delta = 0,$$

wo Δ zur Abkürzung für die Determinante dienen soll.

Die Entwicklung der letzteren gibt (Anm. 1, III, (19)):

$$\Delta = \begin{vmatrix} bb' & b' \\ cc' & c' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} cc' & c' \\ aa' & a' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} aa' & a' \\ bb' & b' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix} +$$
$$\begin{vmatrix} aa' & a' \\ xx' & x' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b & 1 \\ c & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bb' & b' \\ xx' & x' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} cc' & c' \\ xx' & x' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix}$$

oder mit den Abkürzungen:

$$(15)\quad \alpha = (b - c)(a - x), \quad \beta = (c - a)(b - x), \quad \gamma = (a - b)(c - x),$$

für welche ersichtlich:

$$(16)\qquad \alpha + \beta + \gamma = 0:$$

$$\Delta = \alpha(b'c' + a'x') + \beta(c'a' + b'x') + \gamma(a'b' + c'x');$$

oder nach (16):

$$\Delta = \beta(c'a' + b'x' - b'c' - a'x') + \gamma(a'b' + c'x' - b'c' - a'x')$$

und mit den Abkürzungen:

$$(15')\qquad \begin{cases} \alpha' = (b' - c')(a' - x'), \quad \beta' = (c' - a')(b' - x'), \\ \qquad\qquad \gamma' = (a' - b')(c' - x'): \end{cases}$$

$$(17)\qquad \Delta = \beta\gamma' - \gamma\beta'$$

und ebenso:

$$(17)\qquad \Delta = \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \quad \Delta = \alpha\beta' - \beta\alpha'.$$

Die Gleichung (14) *kann daher in jeder der drei Formen:*

(18) $$\beta\gamma' - \gamma\beta' = 0, \quad \gamma\alpha' - \alpha\gamma' = 0, \quad \alpha\beta' - \beta\alpha' = 0$$

geschrieben werden, wo α, β, γ; α', β', γ' *die Bedeutung* (15), (15') *haben.*

Die letzte dieser Gleichungen (18) ist aber die Gleichung (7) oder (6). Die Gleichung (9) kann daher, wenn $A:B:C:D$ beliebig gegeben sind, mittels dreier ihr genügenden Wertepaare a, a'; b, b'; c, c' auf die Form (6) gebracht werden. *Sie stellt stets eine projektive Beziehung dar.*

7. Darstellung in homogenen gemeinen Koordinaten. Bei homogener Schreibweise der gemeinen Koordinaten (vgl. § 7, **1**) lautet die Gleichung (9):

(19) $$Axx' + Bxt' + Ctx' + Dtt' = 0$$

oder aufgelöst, mit Proportionalitätsfaktoren ϱ und σ:

(20) $$\begin{cases} \varrho x' = -Bx - Dt \\ \varrho t' = \quad Ax + Ct \end{cases}$$ (21) $$\begin{cases} \sigma x = \quad Cx' + Dt' \\ \sigma t = -Ax' - Bt'. \end{cases}$$

Bei der projektiven Verwandtschaft zweier Punktreihen sind die homogenen Koordinaten des laufenden Punktes der einen proportional homogenen linearen Funktionen der homogenen Koordinaten des laufenden Punktes der anderen.

Ebenso sind die Gleichungen (10) und (11) bei homogener Schreibweise:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{u}{v}$$

(vgl. § 7, (3); § 49, (12)) ersetzbar durch die Gleichungensysteme:

(22) $$\begin{cases} \varrho u' = Bu - Dv \\ \varrho v' = Au - Cv \end{cases}$$ (23) $$\begin{cases} \sigma u = -Cu' + Dv' \\ \sigma v = -Au' + Bv' \end{cases}$$

(24) $$\begin{cases} \varrho u = Bx + Dt \\ \varrho v = Ax + Ct \end{cases}$$ (25) $$\begin{cases} \sigma x = \quad Cu - Dv \\ \sigma t = -Au + Bv. \end{cases}$$

8. Die Determinante der projektiven Beziehung. Die Gleichungen (20) sind bei gegebenen A, B, C, D nur dann in der Form (21) nach x, t auflösbar, wenn die *„Determinante der projektiven Verwandtschaft“:*

(26) $$J = AD - BC$$

nicht verschwindet. In der Tat wird auch die Gleichung (19) für $J = 0$ *und* $A \neq 0$.

$$A(Axx' + Bxt' + Ctx' + Dtt') = (Ax + Ct)(Ax' + Bt') = 0.$$

Ist aber $J = 0$ *und* $A = 0$, muß nach (26) auch B oder C ver-

schwinden und wird die Gleichung (19):

$$(Cx' + Dt')t = 0 \quad \text{oder} \quad (Bx + Dt)t' = 0.$$

In jedem Falle zerfällt also für $J = 0$ die linke Seite der Gleichung (19) in zwei Faktoren, von denen der eine nur x, t, der andere nur x', t' enthält.

Wir nennen die projektive Verwandtschaft (19) *oder* (9) *eigentliche oder singuläre, je nachdem* $J \neq 0$ *oder* $J = 0$.

Bei der eigentlichen entspricht jedem Punkte der einen Reihe ausnahmslos ein bestimmter Punkt den anderen; bei der singulären ist dies nicht der Fall.

Durch Einführung der Werte (8) wird:

$$J = (b - c)(c - a)(a - b)(b' - c')(c' - a')(a' - b'): \tag{27}$$

Eine projektive Verwandtschaft ist daher stets eine eigentliche, wenn sie drei getrennten Punkten der einen Reihe ($b \neq c$, $c \neq a$, $a \neq b$) *drei getrennte Punkte der anderen* ($b' \neq c'$, $c' \neq a$, $a' \neq b'$) *zuordnet* (vgl. § 65, 3).

9. Allgemeine Darstellung der projektiven Beziehung in Doppelverhältniskoordinaten. Führt man in den beiden Punktreihen (Fig. 331) Doppelverhältniskoordinaten μ und μ' ein, die sich auf beliebige Koordinatensysteme E_1, E_2, E_0 und E_1', E_2', E_0' beziehen, und gibt die projektive Beziehung dadurch, daß man die Punkte $J_1 = \mu_1$, $J_2 = \mu_2$, $J_0 = \mu_0$ den Punkten $J_1' = \mu_1'$, $J_2' = \mu_2'$, $J_0' = \mu_0'$ entsprechend setzt, so ist die projektive Beziehung wie in (2) durch die Gleichung:

Fig. 331.

$$(J_1 J_2 P J_0) = (J_1' J_2' P' J_0')$$

oder nach § 6, (25) durch:

$$\frac{(\mu_2 - \mu_0)(\mu_1 - \mu)}{(\mu_1 - \mu_0)(\mu_2 - \mu)} = \frac{(\mu_2' - \mu_0')(\mu_1' - \mu')}{(\mu_1' - \mu_0')(\mu_2' - \mu')} \tag{28}$$

ausgedrückt. Daraus folgt aber in derselben Weise, die von (6) auf (9) führte:

In Doppelverhältniskoordinaten μ *und* μ' *der beiden Reihen drückt sich die projektive Beziehung stets durch eine Gleichung von der Form:*

$$A\mu\mu' + B\mu + C\mu' + D = 0 \tag{29}$$

aus, und jede solche Gleichung stellt eine projektive Beziehung dar.

10. Multiplizierte und reine kanonische Darstellung in Doppelverhältniskoordinaten. In der allgemeinen Darstellung (29) sind die

beiderseitigen Anfangspunkte und Einheitspunkte E_1, E_2, E_0 und E_1', E_2', E_0' der Koordinatensysteme nicht gerade entsprechende Punkte der projektiven Beziehung:

Sollen sich $E_1 (\mu = 0)$ und $E_1' (\mu' = 0)$; $E_2 (\mu = \infty)$ und $E_2' (\mu' = \infty)$ (§ 6, **6**) entsprechen, so muß in (29) $D = 0$, $A = 0$ sein.

Sind die Anfangspunkte E_1 und E_1', E_2 und E_2' der beiderseitigen Koordinatensysteme entsprechende Punkte, so erhält die Gleichung (29) *die Form:*

$$B\mu + C\mu' = 0 \tag{30}$$

(multiplizierte kanonische Form): Die Koordinaten μ und μ' entsprechender Punkte sind bis auf einen konstanten Faktor gleich.

Sind außerdem die Einheitspunkte E_0 und E_0' entsprechende Punkte, so hat die Gleichung (29) *die Form:*

$$\mu - \mu' = 0 \tag{31}$$

(reine kanonische Form): Die Koordinaten μ und μ' entsprechender Punkte sind gleich.

Wir haben die Form (31) schon in (5) aufgestellt. Da sie die Determinante $J = AD - BC = 1$ hat, kann nur die *eigentliche* projektive Beziehung (29), $J \neq 0$, auf die kanonische Form (31) gebracht werden (§ 65, **8**; **12**). Dies geschieht durch die Transformation § 6, (29) in beiden Punktreihen, die aus (28) sofort $\nu = \nu'$ liefert.

11. Darstellung in Zweieckskoordinaten. Die Gleichung (29) kann nach § 7, (8) unmittelbar in Zweieckskoordinaten geschrieben werden, die sich etwa auf die in Figur 329 dargestellten Grundpunkte beziehen:

$$Ax_1 x_1' + Bx_1 x_2' + Cx_2 x_1' + Dx_2 x_2' = 0. \tag{32}$$

Die projektive Verwandtschaft zweier Punktreihen $P = x_1, x_2$ und $P' = x_1', x_2'$ stellt sich in Zweieckskoordinaten durch eine homogene bilineare Gleichung (32) *dar.*

Statt dessen kann man auch wie in § 65, **7** sagen:

Der Ausdruck der projektiven Beziehung zweier Punktreihen ist eine lineare Substitution von der Form:

$$\begin{cases} \varrho x_1' = c_{11} x_1 + c_{12} x_2, \\ \varrho x_2' = c_{21} x_1 + c_{22} x_2. \end{cases} \tag{33}$$

Insbesondere hat man in:

$$\begin{cases} \varrho x_1' = c_{11} x_1 \\ \varrho x_2' = c_{22} x_2 \end{cases} \tag{34} \qquad \begin{cases} \varrho x_1' = x_1 \\ \varrho x_2' = x_2 \end{cases} \tag{35}$$

die multiplizierte und reine kanonische Form (vgl. § 65, **10**).

Entsprechend (33) wird die projektive Beziehung zweier Strahlbüschel oder Ebenenbüschel oder einer Punktreihe und eines Strahl- oder Ebenenbüschels (§ 7, (8); § 56, (3)) durch:

$$(36) \quad \begin{cases} \varrho u_1' = c_{11} u_1 + c_{12} u_2 \\ \varrho u_2' = c_{21} u_1 + c_{22} u_2 \end{cases} \qquad (37) \quad \begin{cases} \varrho u_1 = c_{11} x_1 + c_{12} x_2 \\ \varrho u_2 = c_{21} x_1 + c_{22} x_2 \end{cases}$$

dargestellt (vgl. § 8, (19)).

12. Die Determinante als Invariante der projektiven Beziehung. Führt man in die Gleichung (32) der projektiven Beziehung zweier Punktreihen auf der einen Punktreihe neue Zweieckskoordinaten y_1, y_2 ein durch die Substitution:

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2, \quad x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2$$

(vgl. § 8, (11)), so geht (32) über in:

$$(38) \qquad A' y_1 x_1' + B' y_1 x_2' + C' y_2 x_1' + D' y_2 x_2' = 0,$$

worin:

$$A' = A\alpha + C\gamma, \quad B' = B\alpha + D\gamma,$$
$$C' = A\beta + C\delta, \quad D' = B\beta + D\delta,$$

und daher:

$$(39) \qquad A'D' - B'C' = (\alpha\delta - \beta\gamma)(AD - BC).$$

Setzt man in (38), indem man auch auf der anderen Punktreihe neue Koordinaten y_1', y_2' einführt:

$$x_1' = \alpha' y_1' + \beta' y_2', \quad x_2' = \gamma' y_1' + \delta' y_2',$$

so wird:

$$(38') \qquad A'' y_1 y_1' + B'' y_1 y_2' + C'' y_2 y_1' + D'' y_2 y_2' = 0,$$

wo wie vorhin:

$$(40) \qquad A''D'' - B''C'' = (\alpha'\delta' - \beta'\gamma')(A'D' - B'C').$$

Die Verbindung von (39) und (40) gibt den Satz:

Führt man in der Gleichung (32) der projektiven Beziehung auf beiden Punktreihen neue Koordinaten ein, so wird die Determinante der neuen Gleichung (38′) gleich dem Produkt der alten in die beiden Substitutionsdeterminanten:

$$(41) \qquad A''D'' - B''D'' = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma')(AD - BD).$$

13. Darstellung projektiver Punktreihen durch Gleichungen. Sind unter Zugrundelegung gemeiner Koordinaten (Fig. 330):

$$(42) \qquad X_1 = A_1 x + B_1 = 0, \quad X_2 = A_2 x + B_2 = 0$$

die Gleichungen der Grundpunkte und x_0 die Koordinate des Einheitspunktes einer Punktreihe, und haben:

$$(43) \qquad X_1' = A_1' x' + B_1' = 0, \quad X_2' = A_2' x' + B_2' = 0$$

und x_0' die entsprechende Bedeutung für eine andere Punktreihe, so sind nach § 9, (6) die beiden Punktreihen durch die *Gleichungen*:

$$(44)\qquad \frac{X_1}{X_1^0} - \mu \frac{X_2}{X_2^0} = 0, \quad \frac{X_1'}{X_1'^0} - \mu' \frac{X_2'}{X_2'^0} = 0$$

dargestellt.

Da aber hier die Parameter μ und μ' nach § 9, (7) die Doppelverhältniskoordinaten des laufenden Punktes jeder Reihe in bezug auf die Grundpunkte und den Einheitspunkt sind, so folgt aus § 65, **9**:

$O \quad X_1=0 \quad X_2=0 \quad X_1-\mu X_2=0$

$O' \quad X_1'=0 \quad X_2'=0 \quad X_1'-\mu X_2'=0$

Fig. 332.

Die durch die Gleichungen (44) *dargestellten Punktreihen werden durch die Gleichung* (29) *oder* (30) *oder* (31) *projektiv aufeinander bezogen.*

Da die Form der Gleichung (29) unberührt bleibt, wenn man μ und μ' je um einen Faktor ändert, so werden auch die durch die Gleichungen (§ 9, (4)):

$$(45)\qquad X_1 - \mu X_2 = 0, \quad X_1' - \mu' X_2' = 0$$

dargestellten Punktreihen durch jede Gleichung von der Form (29) projektiv aufeinander bezogen.

Wendet man jetzt insbesondere die Form (31) an, so kann man kurz sagen (Fig. 332):

Durch die beiden Gleichungen:

$$(46)\qquad X_1 - \mu X_2 = 0, \quad X_1' - \mu X_2' = 0$$

werden zwei projektive Punktreihen dargestellt (vgl. § 65, **4**, IV).

Erhalten X_1, X_2; X_1', X_2' statt (42) und (43) die Bedeutung:

$$(47)\qquad X_1 = A_1 + B_1 \operatorname{tg}\varphi, \quad X_2 = A_2 + B_2 \operatorname{tg}\varphi,$$

$$(48)\qquad X_1' = A_1' + B_1' \operatorname{tg}\varphi', \quad X_2' = A_2' + B_2' \operatorname{tg}\varphi'$$

(vgl. § 9, **1**; § 49, **13**), so stellen die Gleichungen (46) im gleichen Sinne zwei projektive *Strahlbüschel* oder *Ebenenbüschel* dar. Auch geben sie ungleichnamige projektive Gebilde, wenn X_1, X_2 die Bedeutung (42) und X_1', X_2' die Bedeutung (48) haben.

Endlich bleibt die Darstellung durch die Gleichungen (44) oder (45) oder (46) auch dann erhalten, wenn die Ausdrücke X homogene lineare Funktionen von *Zweiecks-* oder *Zweiseitskoordinaten* sind (vgl. § 9, (12)).

§ 66. Darstellung projektiver Grundgebilde erster Stufe in Ebene, Bündel und Raum.

1. Darstellung projektiver Strahlbüschel oder Punktreihen in der Ebene durch Gleichungen.

Wir setzen zur Abkürzung:

(1) $$X_i = A_i x + B_i y + C_i t,$$

(2) $$X_i' = A_i' x' + B_i' y' + C_i t',$$

$i = 1, 2$, wo x, y, t und x', y', t' homogene gemeine Punktkoordinaten sind, die sich auf zwei in verschiedenen Ebenen oder in derselben Ebene gelegene Koordinatensysteme Oxy und $O'x'y'$ (Fig. 333) oder auch auf dasselbe Koordinatensystem $Oxy = O'x'y'$ in einer Ebene beziehen. Wir verstehen ferner unter $P_0 = x_0, y_0, t_0$ und $P_0' = x_0', y_0', t_0'$ zwei feste in bezug auf Oxy und $O'x'y'$ gegebene Punkte.

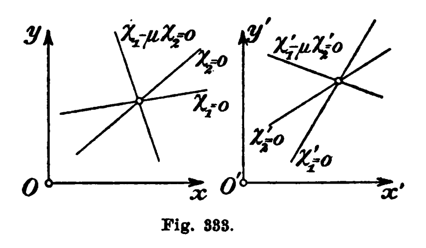


Fig. 333.

Dann stellen nach § 22, (21) die Gleichungen:

(3) $$\frac{X_1}{X_1^0} - \mu \frac{X_2}{X_2^0} = 0$$ (4) $$\frac{X_1'}{X_1'^0} - \mu' \frac{X_2'}{X_2'^0} = 0$$

zwei Strahlbüschel in laufenden Punktkoordinaten x, y, t *und* x', y', t' dar. Die Parameter μ und μ' aber sind nach § 22, (22) die *Doppelverhältniskoordinaten* des laufenden Strahles der Büschel in bezug auf die Grundstrahlen $X_i = 0$ und $X_i' = 0$ und die durch die Punkte P_0, P_0' gegebenen Einheitsstrahlen.

Die beiden Büschel werden daher nach § 65, **9**; **10** *projektiv aufeinander bezogen,* wenn zwischen den Parametern μ und μ' eine Gleichung von der allgemeinen Form:

(5) $$A\mu\mu' + B\mu + C\mu' + D = 0$$

oder auch von der multiplizierten oder reinen kanonischen Form:

(6) $$B\mu + C\mu' = 0$$ (7) $$\mu = \mu'$$

besteht.

Da die Form der Gleichung (5) unberührt bleibt, wenn man μ und μ' je um einen konstanten Faktor ändert, kann man (vgl. § 22, (23)) statt (3) und (4) auch die Gleichungen:

(8) $$X_1 - \mu X_2 = 0$$ (9) $$X_1' - \mu' X_2' = 0$$

benutzen, worauf wieder jede Gleichung von der Form (5) die projektive Beziehung herstellt. Wählt man insbesondere die Form (7), so ergibt sich (vgl. § 65, (46)):

Die Gleichungen:

(10) $X_1 - \mu X_2 = 0$ (11) $X_1' - \mu X_2' = 0$

stellen zwei projektive Strahlbüschel in laufenden Punktkoordinaten x, y, t und x', y', t' dar (Fig. 333).

Versteht man unter X_i und X_i' an Stelle von (1) und (2) die Ausdrücke:

(12) $X_i = A_i u + B_i v + C_i s,$ (13) $X_i' = A_i' u' + B_i' v' + C_i' s',$

so würden die Gleichungen (3) und (4) oder (8) und (9) oder (10) und (11) mit Rücksicht auf § 22, (21'); (23') im gleichen Sinne wie vorher *zwei projektive Punktreihen in laufenden Linienkoordinaten* darstellen.

Auch würden sich eine *Punktreihe* und ein *Strahlbüschel*, die projektiv sind, ergeben, wenn wir X_i in der Bedeutung (12) und X_i' in der Bedeutung (2) nehmen (vgl. § 24, (17); (20)).

2. Darstellung in Dreieckskoordinaten. Da es hierbei überall nur auf die Beziehung zwischen den *Parametern* μ und μ' ankommt, bleiben (vgl. § 29, 8) die erhaltenen Sätze bestehen, wenn man in die Symbole X an Stelle der gemeinen die Dreieckskoordinaten einführt, also statt (1), (2) und (12), (13) setzt:

$$(14) \quad \begin{cases} X_i = u_1^{(i)} x_1 + u_2^{(i)} x_2 + u_3^{(i)} x_3, \\ X_i' = u_1'^{(i)} x_1' + u_2'^{(i)} x_2' + u_3'^{(i)} x_3' \end{cases}$$

oder:

$$(15) \quad \begin{cases} X_i = x_1^{(i)} u_1 + x_2^{(i)} u_2 + x_3^{(i)} u_3, \\ X_i' = x_1'^{(i)} u_1' + x_2'^{(i)} u_2' + x_3'^{(i)} u_3'. \end{cases}$$

Dabei können sich die Dreieckskoordinaten x_k, u_k und x_k', u_k' auf zwei verschiedene oder auch auf dasselbe Koordinatendreieck beziehen.

3. Parameterdarstellung projektiver Punktreihen und Strahlbüschel in der Ebene. Da in den Parameterdarstellungen § 30, (24) die Parameter y_1, y_2 und v_1, v_2 Zweieckskoordinaten des Punktes und Zweiseitskoordinaten der Geraden sind, so werden auch die durch ihre Parameterdarstellungen gegebenen Punktreihen und Strahlbüschel durch lineare Gleichungen von der Form § 65, (32) bis (37) zwischen den Parametern projektiv aufeinander bezogen.

Indem wir dabei gleich die kanonische Form (§ 65, (35)) benutzen, erhalten wir folgende Darstellungen, in denen sich die Koordi-

naten x_k, u_k und x_k', u_k' wieder auf zwei verschiedene oder auf dasselbe Koordinatensystem beziehen und überall $k = 1, 2, 3$ ist:

für *zwei projektive Punktreihen* mit den Grundpunkten $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$ und $x_k'^{(1)}$, $x_k'^{(2)}$:

(16) $\varrho x_k = x_k^{(1)} y_1 + x_k^{(2)} y_2$ (17) $\varrho x_k' = x_k'^{(1)} y_1 + x_k'^{(2)} y_2$;

zu gleichen Werten von $y_1 : y_2$ gehören entsprechende Punkte beider Reihen;

für *zwei projektive Strahlbüschel* mit den Grundstrahlen $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$ und $u_k'^{(1)}$, $u_k'^{(2)}$:

(18) $\varrho u_k = u_k^{(1)} v_1 + u_k^{(2)} v_2$ (19) $\varrho u_k' = u_k'^{(1)} v_1 + u_k'^{(2)} v_2$;

zu gleichen Werten von $v_1 : v_2$ gehören entsprechende Strahlen beider Büschel.

Für eine *Punktreihe und Strahlbüschel, die projektiv sind,* ist ebenso:

(20) $\varrho x_k = x_k^{(1)} y_1 + x_k^{(2)} y_2$ (21) $\varrho u_k' = u_k'^{(1)} v_1 + u_k'^{(2)} v_2$,

wo für entsprechende Elemente (§ 65, (37)):

(22) $$y_1 : y_2 = v_1 : v_2.$$

Man kann hier überall unter x_k und u_k auch Koordinaten des Strahles und der Ebene *im Bündel* verstehen (vgl. § 56, **10**) und hat dann in (16) und (17) *zwei projektive Strahlbüschel* und in (18) und (19) *zwei projektive Ebenenbüschel,* die jedesmal zwei verschiedenen Bündeln oder demselben Bündel angehören.

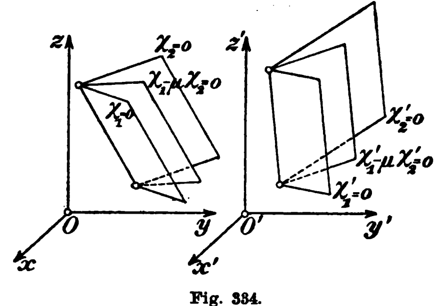


Fig. 334.

4. Darstellung projektiver Ebenenbüschel oder Punktreihen im Raume durch Gleichungen. Wir setzen wie in § 66, **1**:

(23) $$X_i = A_i x + B_i y + C_i z + D_i t,$$

(24) $$X_i' = A_i' x' + B_i' y' + C_i' z' + D_i' t',$$

$i = 1, 2$, wo x, y, z, t und x', y', z', t' homogene gemeine Punktkoordinaten sind, die sich auf zwei verschiedene Koordinatensysteme (Fig. 334) oder auch auf dasselbe Koordinatensystem $Oxyz = O'x'y'z'$ beziehen.

Mit dieser neuen Bedeutung stellen die Gleichungen (3) und (4) oder (8) und (9) zwei Ebenenbüschel dar (vgl. § 47, (23); (25)), die wiederum durch die Gleichungen (5), (6) oder (7) projektiv aufeinander bezogen werden. Ebenso *stellen die Gleichungen* (10) *und* (11) *direkt zwei*

projektive Ebenenbüschel in laufenden Punktkoordinaten x, y, z, t und x', y', z', t' dar (Fig. 334).

Mit:

$$X_i = A_i u + B_i v + C_i w + D_i s \tag{25}$$

$$X_i' = A_i' u' + B_i' v' + C_i' w' + D_i' s' \tag{26}$$

erhält man in (10) und (11) *projektive Punktreihen in laufenden Ebenenkoordinaten* dargestellt; nimmt man aber für X_i die Werte (23) und für X_i' die Werte (26), so hat man in (10) und (11) ein *Ebenenbüschel und eine Punktreihe, die projektiv sind* (vgl. § 52, (13) und (16)).

Wie in § 66, 2 können überall auch Tetraederkoordinaten in die Ausdrücke X eingeführt werden.

5. Parameterdarstellung projektiver Punktreihen, Ebenenbüschel und Strahlbüschel im Raume. Aus den Parameterdarstellungen § 64, 4 und 5 erhalten wir, wie in § 66, 3, folgende Darstellungen, in denen sich die Koordinaten x_k, u_k, p_k, q_k und x_k', u_k', p_k', q_k' auf zwei verschiedene oder auf dasselbe Koordinatentetraeder beziehen:

für *zwei projektive Punktreihen* mit den Grundpunkten $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$ und $x_k'^{(1)}$, $x_k'^{(2)}$:

(27) $\varrho x_k = x_k^{(1)} y_1 + x_k^{(2)} y_2$ (28) $\varrho x_k' = x_k'^{(1)} y_1 + x_k'^{(2)} y_2$;

für *zwei projektive Ebenenbüschel* mit den Grundebenen $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$ und $u_k'^{(1)}$, $u_k'^{(2)}$:

(29) $\varrho u_k = u_k^{(1)} v_1 + u_k^{(2)} v_2$ (30) $\varrho u_k' = u_k'^{(1)} v_1 + u_k'^{(2)} v_2$,

in allen vier Gleichungen mit $k = 1, 2, 3, 4$;

für *zwei projektive Strahlbüschel:*

(31) $\varrho p_k = p_k^{(1)} v_1 + p_k^{(2)} v_2$ (32) $\varrho p_k' = p_k'^{(1)} v_1 + p_k'^{(2)} v_2$;

oder:

(33) $\varrho q_k = q_k^{(1)} y_1 + q_k^{(2)} y_2$ (34) $\varrho q_k' = q_k'^{(1)} y_1 + q_k'^{(2)} y_2$,

in allen vier Gleichungen mit $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Die Gleichungen (27) und (30) geben, wenn:

$$y_1 : y_2 = v_1 : v_2 \tag{35}$$

gesetzt wird, eine *Punktreihe* und einen *Ebenenbüschel, die projektiv sind.*

§ 67. Projektive Grundgebilde zweiter Stufe.

1. Lineare Verwandtschaft zweier Punktfelder. Wir betrachten zwei Ebenen E und E' unabhängig von ihrer Lage zueinander, un-

abhängig davon, ob sie getrennt im Raume oder beide miteinander vereinigt liegen. In jeder der beiden Ebenen sei ein System von Punktkoordinaten x_1, x_2, x_3 und x_1', x_2', x_3', bezogen auf ein Koordinatendreieck $E_1 E_2 E_3, E_0$ und $E_1' E_2' E_3', E_0'$, eingeführt (Fig. 335).

Alsdann ordnen die Formeln (vgl. § 65, (33)):

$$(1)\qquad \begin{cases} \varrho x_1' = c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + c_{13} x_3, \\ \varrho x_2' = c_{21} x_1 + c_{22} x_2 + c_{23} x_3, \\ \varrho x_3' = c_{31} x_1 + c_{32} x_2 + c_{33} x_3 \end{cases}$$

jedem Punkte $P = x_1, x_2, x_3$ der Ebene E einen bestimmten Punkt $P' = x_1', x_2', x_3'$ der Ebene E' zu.

Ist die Determinante:

$$(2)\qquad C = | c_{kl} |$$

von Null verschieden, entspricht mittels der Auflösungen der Gleichungen (1) (Anm. 2, II, 2):

$$(3)\qquad \begin{cases} \sigma x_1 = C_{11} x_1' + C_{21} x_2' + C_{31} x_3', \\ \sigma x_2 = C_{12} x_1' + C_{22} x_2' + C_{32} x_3', \\ \sigma x_3 = C_{13} x_1' + C_{23} x_2' + C_{33} x_3' \end{cases}$$

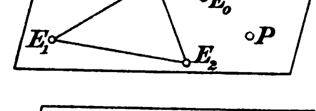


Fig. 335.

auch umgekehrt jedem Punkte P' ein Punkt P.

Die Formeln (1) *und* (3) *stellen dann eine Verwandtschaft der beiden Ebenen dar, bei der ausnahmslos jedem Punkte der einen ein Punkt der andern wechselweise entspricht.*

Wir nennen sie mit Rücksicht auf die Form der Gleichungen (1) und (3) zunächst eine *lineare* Verwandtschaft.[118])

Wir unterscheiden sie ferner als *eigentliche* lineare Verwandtschaft von der durch die Gleichungen (1) bei *verschwindender* Determinante dargestellten *singulären* linearen Verwandtschaft (§ 65, 8).

2. Die lineare Verwandtschaft als Kollineation. Sind $x_k, x_k^{(1)}, x_k^{(2)}$ irgend drei Punkte der Ebene E und $x_k', x_k'^{(1)}, x_k'^{(2)}$ die entsprechenden Punkte der Ebene E', so ist mit (1), wenn wir von dem Faktor ϱ absehen, nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten (Anm. 1, V, 2) nicht nur:

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'^{(1)} & x_2'^{(1)} & x_3'^{(1)} \\ x_1'^{(2)} & x_2'^{(2)} & x_3'^{(2)} \end{vmatrix} = C \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} \end{vmatrix},$$

sondern auch:

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} x_{k_1}'^{(1)} & x_{k_2}'^{(1)} \\ x_{k_1}'^{(2)} & x_{k_2}'^{(2)} \end{vmatrix} = \sum_1^3{}_{l_1 l_2} \begin{vmatrix} c_{k_1 l_1} & c_{k_1 l_2} \\ c_{k_2 l_1} & c_{k_2 l_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{l_1}^{(1)} & x_{l_2}^{(1)} \\ x_{l_1}^{(2)} & x_{l_2}^{(2)} \end{vmatrix},$$

wo $k_1 k_2$ eine beliebige der Kombinationen 2 3, 3 1, 1 2 ist und $l_1 l_2$ alle diese durchläuft.

Aus (4) folgt nach § 29, (13'):

Bei der linearen Verwandtschaft (1) *entspricht jeder Geraden der Ebene* E *eine Gerade der Ebene* E', *und zwar der Verbindungslinie zweier Punkte* $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$ *die Verbindungslinie der zwei entsprechenden Punkte* $x_k'^{(1)}$, $x_k'^{(2)}$.

Zugleich aber gibt (5) die Beziehung zwischen den Koordinaten u_k und u_k' der Geraden $x_k^{(1)} x_k^{(2)}$ und $x_k'^{(1)} x_k'^{(2)}$ (vgl. § 29, (10')), nämlich:

$$(6)\qquad \begin{cases} \varrho u_1' = C_{11} u_1 + C_{12} u_2 + C_{13} u_3, \\ \varrho u_2' = C_{21} u_1 + C_{22} u_2 + C_{23} u_3, \\ \varrho u_3' = C_{31} u_1 + C_{32} u_2 + C_{33} u_3, \end{cases}$$

wo die Koeffizienten C_{kl} die Unterdeterminanten von C sind.

Die Auflösung der Gleichungen (6) gibt umgekehrt:

$$(7)\qquad \begin{cases} \sigma u_1 = c_{11} u_1' + c_{21} u_2' + c_{31} u_3', \\ \sigma u_2 = c_{12} u_1' + c_{22} u_2' + c_{32} u_3', \\ \sigma u_3 = c_{13} u_1' + c_{23} u_2' + c_{33} u_3'. \end{cases}$$

Danach entspricht ausnahmslos jeder Geraden der einen Ebene wechselweise eine Gerade der andern.

Man nennt daher die lineare Verwandtschaft auch eine *Kollineation* (kollineare Verwandtschaft) der beiden Ebenen.

Die Formeln (1), (3), (6), (7) sind ihrer Form nach dieselben, wie die Formeln § 30, (8), (9), (12), (11) für die Transformation der Koordinaten in einer Ebene.

3. Die lineare Verwandtschaft als projektive Verwandtschaft. Eine Punktreihe mit den Grundpunkten $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$ oder ein Strahlbüschel mit den Grundstrahlen $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$ in der Ebene E können nach § 30, **10** durch die Parameterdarstellungen:

$$(8)\qquad x_k = x_k^{(1)} y_1 + x_k^{(2)} y_2, \qquad\qquad (9)\qquad u_k = u_k^{(1)} v_1 + u_k^{(2)} v_2,$$

$k = 1, 2, 3$, gegeben werden.

Setzt man diese bezüglich in (1) und (6) ein und bezeichnet mit $x_k'^{(1)}$, $x_k'^{(2)}$ und $u_k'^{(1)}$, $u_k'^{(2)}$ die den Elementen $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$ und $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$ entsprechenden Elemente der Ebene E' so ergibt sich:

$$(10)\qquad \varrho x_k' = x_k'^{(1)} y_1 + x_k'^{(2)} y_2, \qquad\qquad (11)\qquad \varrho u_k' = u_k'^{(1)} v_1 + u_k'^{(2)} v_2.$$

Nach § 66, (16)—(19) sind aber die Reihen (8) und (10), sowie die Büschel (9) und (11) projektiv.

Bei der linearen Verwandtschaft zweier Ebenen sind entsprechende Punktreihen und entsprechende Strahlbüschel in den beiden Ebenen projektiv.

Wir nennen daher die lineare Verwandtschaft (1) auch *projektive Verwandtschaft.*

4. Reine und multiplizierte kanonische Form der Darstellung. Da für $C \neq 0$ die rechten Seiten der Gleichungen (1) und (6) durch die Koordinatentransformation § 30, (8); (12) in der Ebene E selbst als Koordinaten y_1, y_2, y_3 und v_1, v_2, v_3 eingeführt werden können, die wir neuerdings wieder mit x_1, x_2, x_3 und u_1, u_2, u_3 bezeichnen wollen, so folgt:

Die eigentliche projektive Verwandtschaft zweier Ebenen kann stets in der reinen kanonischen Form (vgl. § 65, (35)):

$$\rho x_1' = x_1, \quad \rho x_2' = x_2, \quad \rho x_3' = x_3, \tag{12}$$

$$\rho u_1' = u_1, \quad \rho u_2' = u_2, \quad \rho u_3' = u_3 \tag{13}$$

dargestellt werden.

Hierbei entsprechen sich (Fig. 335) die gleichnamigen Ecken E_1 und E_1', E_2 und E_2', E_3 und E_3' der Koordinatendreiecke und die Einheitspunkte E_0 und E_0', worauf dann zugleich die gleichnamigen Seiten der Koordinatendreiecke und die Einheitslinien entsprechende Elemente sind.

Entsprechen sich nur die gleichnamigen Ecken, aber nicht die Punkte E_0 und E_0', so erhalten die Gleichungen (1) und (6), indem für $k \neq l$: $c_{kl} = 0$ gesetzt wird, *die multiplizierte kanonische Form* (vgl. § 65, (34)):

$$\rho x_1' = c_{11} x_1, \quad \rho x_2' = c_{22} x_2, \quad \rho x_3' = c_{33} x_3, \tag{14}$$

$$\rho u_1' = \frac{u_1}{c_{11}}, \quad \rho u_2' = \frac{u_2}{c_{22}}, \quad \rho u_3' = \frac{u_3}{c_{33}}. \tag{15}$$

5. Bestimmung der projektiven Beziehung. Da zur Bestimmung des Koordinatensystems stets vier Punkte E_1, E_2, E_3, E_0 notwendig und hinreichend sind, von denen keine drei in gerader Linie liegen, so ergibt sich aus der kanonischen Form (12) der Satz (vgl. § 65, **3**, III):

Die projektive Beziehung zweier Ebenen ist vollständig bestimmt, wenn vier beliebigen Punkten der einen, von denen keine drei in gerader Linie liegen, vier beliebige Punkte der andern, von denen keine drei in gerader Linie liegen, entsprechend gesetzt werden;

und zur analytischen Bestimmung der weitere Satz (vgl. § 65, **4**, IV):

Zwei Ebenen werden projektiv aufeinander bezogen, indem bei Einführung eines Systems von Dreieckskoordinaten in jeder von ihnen je zwei solche Punkte, bezüglich Gerade beider entsprechend gesetzt werden, die gleiche Koordinaten haben.

Da die Dreieckskoordinaten nach § 28, **14** Doppelverhältnisse mit *drei festen Elementen* sind, so entspricht dieser Satz zugleich dem Satze § 65, **2**, II. Wie aber aus dem letzteren der allgemeinere Satz § 65, **1**, I hervorging, so haben wir hier § 67, **3** den allgemeineren Satz für die Doppelverhältnisse *mit vier beliebigen Elementen.*

6. Verschiedene Arten der projektiven Verwandtschaft der Grundgebilde zweiter Stufe. Wir gingen in § 67, **1** zunächst von der Beziehung der *Punkte zweier Ebenen* aus, womit zugleich die Beziehung der *Strahlen beider Ebenen* folgte (§ 67, **2**).

Die entsprechenden Resultate gelten aber bei gleicher analytischer Form (vgl. § 56, **10**) für *die projektive Verwandtschaft zweier Bündel,* wo aus der Beziehung der beiderseitigen *Strahlen* x_k und x_k' zugleich die der beiderseitigen *Ebenen* u_k und u_k' folgt und umgekehrt.

In allen diesen Fällen handelt es sich um das Entsprechen *gleichartiger* Elemente.

In gleicher Weise können aber auch *ungleichartige* Elemente einander entsprechen (§ 65, 1, I). In diesem Falle nennt man die projektive Verwandtschaft auch *Korrelation* oder *Reziprozität* oder *Dualität.*[119])

7. Reziproke Felder und reziproke Bündel. Setzt man wieder mit Bezug auf die beiden Ebenen in Fig. 335 und ihre Koordinatensysteme an Stelle von (1):

$$(16) \qquad \begin{cases} \varrho u_1' = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \varrho u_2' = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \varrho u_3' = c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3, \end{cases}$$

so wird dadurch *jedem Punkte P der Ebene E eine Gerade p' der Ebene E' zugeordnet,* während durch die mit $C \neq 0$ aus (16) folgenden Gleichungen:

$$(17) \qquad \begin{cases} \sigma x_1 = C_{11}u_1' + C_{21}u_2' + C_{31}u_3', \\ \sigma x_2 = C_{12}u_1' + C_{22}u_2' + C_{32}u_3', \\ \sigma x_3 = C_{13}u_1' + C_{23}u_2' + C_{33}u_3' \end{cases}$$

zu jeder Geraden p' der Ebene E' wieder der Punkt P der Ebene E bestimmt wird, der mit ihr ein Paar *entsprechender Elemente* beider Ebenen bildet.

Nun gelten aber mit (16) wieder die Gleichungen (4) und (5), nur daß dort links überall u' statt x' zu setzen ist. Es folgt daher wie dort:

Bei der reziproken Verwandschaft (16) *entspricht jeder Geraden der Ebene* E *ein Punkt der Ebene* E', *und zwar der Verbindungslinie zweier Punkte* $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$ *der Schnittpunkt der zwei entsprechenden Geraden* $u_k'^{(1)}$, $u_k'^{(2)}$.

Zugleich folgen, wie dort, zwischen den Koordinaten u_k und x_k' der Geraden $x_k^{(1)} x_k^{(2)}$ und des Punktes $u_k'^{(1)} \times u_k'^{(2)}$ die Gleichungen:

$$\text{(18)} \qquad \begin{cases} \varrho x_1' = C_{11} u_1 + C_{12} u_2 + C_{13} u_3, \\ \varrho x_2' = C_{21} u_1 + C_{22} u_2 + C_{23} u_3, \\ \varrho x_3' = C_{31} u_1 + C_{32} u_2 + C_{33} u_3, \end{cases}$$

$$\text{(19)} \qquad \begin{cases} \sigma u_1 = c_{11} x_1' + c_{21} x_2' + c_{31} x_3', \\ \sigma u_2 = c_{12} x_1' + c_{22} x_2' + c_{32} x_3', \\ \sigma u_3 = c_{13} x_1' + c_{23} x_2' + c_{33} x_3'. \end{cases}$$

Bei zwei reziproken Ebenen entspricht daher jedem Punkte der einen eine Gerade der andern und umgekehrt.

Indem man ferner die Parameterdarstellungen (8) und (9) in (16) und (18) einsetzt, erhält man an Stelle von (10) und (11):

$$\text{(20)} \quad \varrho u_k' = u_k'^{(1)} y_1 + u_k'^{(2)} y_2, \qquad \text{(21)} \quad \varrho x_k' = x_k'^{(1)} v_1 + x_k'^{(2)} v_2,$$

womit nach § 66, (20)—(22) folgt:

Bei der reziproken Verwandtschaft zweier Ebenen sind eine Punktreihe der einen und ein Strahlbüschel der andern, die einander entsprechen, projektiv.

Die kanonische Form der Gleichungen (16) und (18) lautet:

$$\text{(22)} \qquad \varrho u_1' = x_1, \quad \varrho u_2' = x_2, \quad \varrho u_3' = x_3,$$

$$\text{(23)} \qquad \varrho x_1' = u_1, \quad \varrho x_2' = u_2, \quad \varrho x_3' = u_3 \quad \text{(vgl. (12); (13))}.$$

Dasselbe gilt entsprechend und bei gleicher Bezeichnung (vgl. § 56, **10**) für *reziproke Bündel*, wobei den Strahlen des einen die Ebenen der andern entsprechen.

§ 68. Darstellung projektiver Bündel und Felder im Raume.

1. Darstellung projektiver Ebenenbündel und Punktfelder durch Gleichungen. Wir setzen zur Abkürzung:

$$\text{(1)} \qquad X_i = A_i x + B_i y + C_i z + D_i t,$$

$$\text{(2)} \qquad X_i' = A_i' x' + B_i' y' + C_i' z' + D_i' t',$$

$i = 1, 2, 3$, wo x, y, z, t und x', y', z', t' homogene gemeine Punktkoordinaten sind, die sich auf zwei verschiedene beliebig gegeneinander gelegene Koordinatensysteme $Oxyz$ und $O'x'y'z'$ (Fig. 336) oder auch mit x, y, z, t für x', y', z', t' auf dasselbe System $Oxyz = O'x'y'z'$ beziehen. Wir verstehen ferner unter $P_0 = x_0, y_0, z_0, t_0$ und $P_0' = x_0', y_0', z_0', t_0'$ zwei feste in bezug auf $Oxyz$ und $O'x'y'z'$ gegebene Punkte.

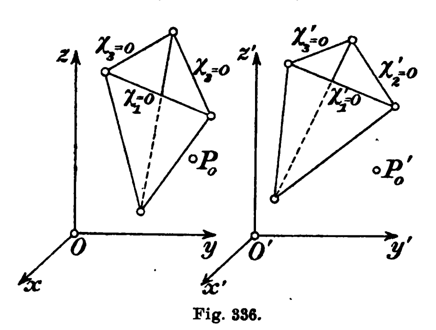


Fig. 336.

Dann stellen nach § 56, (25) die Gleichungen:

$$(3)\quad \mu_1 \frac{X_1}{X_1^0} + \mu_2 \frac{X_2}{X_2^0} + \mu_3 \frac{X_3}{X_3^0} = 0,$$

$$(4)\quad \mu_1' \frac{X_1'}{X_1'^0} + \mu_2' \frac{X_2'}{X_2'^0} + \mu_3' \frac{X_3'}{X_3'^0} = 0$$

zwei Ebenenbündel in laufenden Punktkoordinaten x, y, z, t *und* x', y', z', t' dar. Die Parameter μ_1, μ_2, μ_3 und μ_1', μ_2', μ_3' aber sind nach § 56, (30) *die Dreiflachskoordinaten* u_1, u_2, u_3 und u_1', u_2', u_3' der laufenden Ebenen der Bündel in bezug auf die Dreiflache $X_i = 0$ und $X_i' = 0$ und die durch die Punkte P_0 und P_0' gegebenen Einheitsebenen (§ 56, (22)).

Die beiden Bündel werden daher nach § 67, **6** *projektiv aufeinander bezogen,* wenn zwischen den Parametern lineare Gleichungen von der allgemeinen Form (vgl. § 67, (6)):

$$(5)\quad \begin{cases} \varrho\mu_1' = C_{11}\mu_1 + C_{12}\mu_2 + C_{13}\mu_3, \\ \varrho\mu_2' = C_{21}\mu_1 + C_{22}\mu_2 + C_{23}\mu_3, \\ \varrho\mu_3' = C_{31}\mu_1 + C_{32}\mu_2 + C_{33}\mu_3 \end{cases}$$

oder von der multiplizierten oder reinen kanonischen Form:

$$(6)\quad \varrho\mu_1' = C_{11}\mu_1, \quad \varrho\mu_2' = C_{22}\mu_2, \quad \varrho\mu_3' = C_{33}\mu_3,$$

$$(7)\quad \varrho\mu_1' = \mu_1, \quad \varrho\mu_2' = \mu_2, \quad \varrho\mu_3' = \mu_3$$

bestehen.

Da die Form der Gleichungen (5) unberührt bleibt, wenn man jeden der Parameter $\mu_1, \mu_2, \mu_3; \mu_1', \mu_2', \mu_3'$ um einen konstanten Faktor ändert, kann man statt (3) und (4) auch die Gleichungen (§ 53, (2)):

$$(8)\quad \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3 = 0, \qquad (9)\quad \mu_1' X_1' + \mu_2' X_2' + \mu_3' X_3' = 0$$

nehmen. Wählt man dann unter den Formen (5), (6) und (7) der Parameterbeziehung die letzte aus, so ergibt sich (Fig. 336):

Die Gleichungen:

$$(10)\quad \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3 = 0, \qquad (11)\quad \mu_1 X_1' + \mu_2 X_2' + \mu_3 X_3' = 0$$

stellen zwei projektive Ebenenbündel in laufenden Punktkoordinaten x, y, z, t und x', y', z', t' dar (vgl. § 66, (10), (11)).

Versteht man unter X_i und X_i' an Stelle von (1) und (2) die Ausdrücke:

$$X_i = A_i u + B_i v + C_i w + D_i s, \tag{12}$$

$$X_i' = A_i' u' + B_i' v' + C_i' w' + D_i' s', \tag{13}$$

so würden die Gleichungen (3) und (4) oder (8) und (9) oder (10) und (11) mit Rücksicht auf § 53, (2') *zwei projektive Punktfelder in laufenden Ebenenkoordinaten* darstellen.

2. Darstellung projektiver Strahlbündel und Strahlfelder durch Gleichungen. Wie in § 68, **1** werden in der Annahme (1), (2) *die beiden Strahlbündel* (vgl. § 56, (25')):

$$(14)\ \frac{X_1}{X_1^0} : \frac{X_2}{X_2^0} : \frac{X_3}{X_3^0} = \nu_1 : \nu_2 : \nu_3, \qquad (15)\ \frac{X_1'}{X_1'^0} : \frac{X_2'}{X_2'^0} : \frac{X_3'}{X_3'^0} = \nu_1' : \nu_2' : \nu_3'$$

oder:

$$(16)\quad X_1 : X_2 : X_3 = \nu_1 : \nu_2 : \nu_3, \qquad (17)\quad X_1' : X_2' : X_3' = \nu_1' : \nu_2' : \nu_3'$$

projektiv aufeinander bezogen, indem zwischen den Parametern, die Dreikantskoordinaten des Strahles im Bündel sind, lineare Gleichungen von der allgemeinen Form (§ 67, (1)):

$$(18)\quad \begin{cases} \varrho \nu_1' = c_{11}\nu_1 + c_{12}\nu_2 + c_{13}\nu_3, \\ \varrho \nu_2' = c_{21}\nu_1 + c_{22}\nu_2 + c_{23}\nu_3, \\ \varrho \nu_3' = c_{31}\nu_1 + c_{32}\nu_2 + c_{33}\nu_3, \end{cases}$$

insbesondere auch von der kanonischen Form:

$$(19)\quad \varrho \nu_1' = \nu_1, \quad \varrho \nu_2' = \nu_2, \quad \varrho \nu_3' = \nu_3$$

angenommen werden. In kürzester Form (vgl. (10); (11)) lautet das Resultat:

Die Gleichungen:

$$(20)\quad X_1 : X_2 : X_3 = \nu_1 : \nu_2 : \nu_3, \qquad (21)\quad X_1' : X_2' : X_3' = \nu_1 : \nu_2 : \nu_3$$

stellen zwei projektive Strahlbündel in laufenden Punktkoordinaten x, y, z, t und x', y', z', t' dar.

3. Darstellung reziproker Bündel und Felder durch Gleichungen. Das Ebenenbündel (4) und das Strahlbündel (14) werden, da nach § 56, (30); (30') μ_1', μ_2', μ_3' Dreiflachskoordinaten der Ebene und ν_1, ν_2, ν_3 des Strahles sind, nach § 67, (16) projektiv aufeinander bezogen durch die allgemeinen linearen Gleichungen:

$$(22)\quad \begin{cases} \varrho \mu_1' = c_{11}\nu_1 + c_{12}\nu_2 + c_{13}\nu_3, \\ \varrho \mu_2' = c_{21}\nu_1 + c_{22}\nu_2 + c_{23}\nu_3, \\ \varrho \mu_3' = c_{31}\nu_1 + c_{32}\nu_2 + c_{33}\nu_3, \end{cases}$$

beziehungsweise die kanonischen Gleichungen:

(23) $$\varrho \mu_1' = \nu_1, \quad \varrho \mu_2' = \nu_2, \quad \varrho \mu_3' = \nu_3.$$

Insbesondere geben die Gleichungen:

(24) $$\mu_1 X_1' + \mu_2 X_2' + \mu_3 X_3' = 0,$$ (25) $$X_1 : X_2 : X_3 = \mu_1 : \mu_2 : \mu_3$$

zwei reziproke Bündel in laufenden Punktkoordinaten x', y', z', t' *und* x, y, z, t.

4. Darstellung in Tetraederkoordinaten. Da es in den Entwicklungen von § 68, **1—3** überall nur auf die Beziehung zwischen den *Parametern* μ und ν ankommt, bleiben (vgl. § 58, **12**) die erhaltenen Sätze bestehen, wenn man in die Symbole X an Stelle der gemeinen die *Tetraederkoordinaten* einführt, also statt (1), (2) und (12), (13) setzt:

(26) $$\begin{cases} X_i = u_1^{(i)} x_1 + u_2^{(i)} x_2 + u_3^{(i)} x_3 + u_4^{(i)} x_4, \\ X_i' = u_1'^{(i)} x_1' + u_2'^{(i)} x_2' + u_3'^{(i)} x_3' + u_4'^{(i)} x_4', \end{cases}$$

oder:

(27) $$\begin{cases} X_i = x_1^{(i)} u_1 + x_2^{(i)} u_2 + x_3^{(i)} u_3 + x_4^{(i)} u_4, \\ X_i' = x_1'^{(i)} u_1' + x_2'^{(i)} u_2' + x_3'^{(i)} u_3' + x_4'^{(i)} u_4'. \end{cases}$$

Dabei können sich die Tetraederkoordinaten x_k, u_k und x_k', u_k' auf zwei verschiedene oder auch auf dasselbe Koordinatentetraeder beziehen.

5. Parameterdarstellung projektiver Bündel und Felder. Da in den Parameterdarstellungen § 64, **2** und **3** die Parameter y_1, y_2, y_3 und v_1, v_2, v_3 Dreieckskoordinaten des Punktes und der Geraden oder Dreiflachskoordinaten des Strahles und der Ebene sind, so werden auch die durch ihre Parameterdarstellungen gegebenen Felder und Bündel durch lineare Gleichungen zwischen den Parametern projektiv aufeinander bezogen.

Indem wir dabei gleich die kanonische Form (7) und (19) benutzen, erhalten wir folgende Darstellungen, in denen sich die Koordinaten x_k, u_k, p_k, q_k und x_k', u_k', p_k', q_k' wiederum auf zwei verschiedene oder auf dasselbe Koordinatensystem beziehen (vgl. § 66, **5**):

für *zwei projektive Punktfelder* mit den Grundpunkten $x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, x_k^{(3)}$ und $x_k'^{(1)}, x_k'^{(2)}, x_k'^{(3)}$:

(28) $$\varrho x_k = x_k^{(1)} y_1 + x_k^{(2)} y_2 + x_k^{(3)} y_3,$$

(29) $$\varrho x_k' = x_k'^{(1)} y_1 + x_k'^{(2)} y_2 + x_k'^{(3)} y_3;$$

für *zwei projektive Ebenenbündel* mit den Grundebenen $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, u_k^{(3)}$ und $u_k'^{(1)}, u_k'^{(2)}, u_k'^{(3)}$:

(30) $$\varrho u_k = u_k^{(1)} v_1 + u_k^{(2)} v_2 + u_k^{(3)} v_3,$$

(31) $$\varrho u_k' = u_k'^{(1)} v_1 + u_k'^{(2)} v_2 + u_k'^{(3)} v_3,$$

in allen vier Formeln $k = 1, 2, 3, 4$;

für *zwei projektive Strahlfelder* mit den Grundstrahlen $p_k^{(1)}$, $p_k^{(2)}$, $p_k^{(3)}$ und $p_k'^{(1)}$, $p_k'^{(2)}$, $p_k'^{(3)}$:

(32) $$\varrho p_k = p_k^{(1)} v_1 + p_k^{(2)} v_2 + p_k^{(3)} v_3,$$

(33) $$\varrho p_k' = p_k'^{(1)} v_1 + p_k'^{(2)} v_2 + p_k'^{(3)} v_3;$$

für *zwei projektive Strahlbündel* mit den Grundstrahlen $q_k^{(1)}$, $q_k^{(2)}$, $q_k^{(3)}$ und $q_k'^{(1)}$, $q_k'^{(2)}$, $q_k'^{(3)}$:

(34) $$\varrho q_k = q_k^{(1)} y_1 + q_k^{(2)} y_2 + q_k^{(3)} y_3,$$

(35) $$\varrho q_k' = q_k'^{(1)} y_1 + q_k'^{(2)} y_2 + q_k'^{(3)} y_3,$$

in allen vier Formeln $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Reziproke Felder werden durch die Gleichungen (28) und (33), *reziproke Bündel* durch (30) und (35) dargestellt, beidemal mit:

(36) $$y_1 : y_2 : y_3 = v_1 : v_2 : v_3.$$

§ 69. Projektive Grundgebilde dritter Stufe.

1. Lineare Verwandtschaft zweier Punkträume. In jedem von zwei Räumen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ sei ein System von Punktkoordinaten x_k und x_k' $(k = 1, 2, 3, 4)$, bezogen auf ein Koordinatentetraeder $E_1 E_2 E_3 E_4, E_0$ und $E_1' E_2' E_3' E_4'$, E_0' eingeführt (Fig. 337; vgl. Fig. 335; 329).

Alsdann ordnen die linearen Gleichungen (vgl. § 67, (1)):

(1) $$\varrho x_k' = \sum_1^4{}^l c_{kl} x_l$$

jedem Punkte $P = x_k$ des Raumes $\mathfrak{R}$ einen bestimmten Punkt $P' = x_k'$ des Raumes $\mathfrak{R}'$ zu.

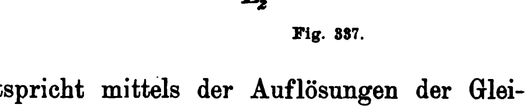


Fig. 337.

Ist die Determinante:

(2) $$C = | c_{kl} |$$

von Null verschieden, entspricht mittels der Auflösungen der Gleichungen (1):

(3) $$\sigma x_l = \sum_1^4{}^k C_{kl} x_k'$$

auch umgekehrt jedem Punkte P' ein Punkt P.

Die Formeln (1) und (3) stellen dann eine lineare Verwandtschaft der beiden Räume dar, bei der ausnahmslos jedem Punkte des einen Raumes ein Punkt des andern wechselweise entspricht.[118])

Wir nennen die lineare Verwandtschaft eine *eigentliche*, im Gegensatz zu der durch die Gleichungen (1) bei *verschwindender* Determinante C dargestellten *singulären* linearen Verwandtschaft.

2. Entsprechende Ebenen und Strahlen beider Räume. Sind x_k, $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, $x_k^{(3)}$ irgend vier Punkte des Raumes $\mathfrak{R}$ und x_k', $x_k'^{(1)}$, $x_k'^{(2)}$, $x_k'^{(3)}$ die entsprechenden Punkte des andern Raumes, so ist mit (1), wenn wir von dem Faktor ϱ absehen, nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten (Anm. 1, V, 3) nicht nur:

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'^{(1)} & x_2'^{(1)} & x_3'^{(1)} & x_4'^{(1)} \\ x_1'^{(2)} & x_2'^{(2)} & x_3'^{(2)} & x_4'^{(2)} \\ x_1'^{(3)} & x_2'^{(3)} & x_3'^{(3)} & x_4'^{(3)} \end{vmatrix} = C \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & x_4^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & x_4^{(2)} \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} & x_4^{(3)} \end{vmatrix},$$

sondern auch:

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} x_{k_1}'^{(1)} & x_{k_2}'^{(1)} & x_{k_3}'^{(1)} \\ x_{k_1}'^{(2)} & x_{k_2}'^{(2)} & x_{k_3}'^{(2)} \\ x_{k_1}'^{(3)} & x_{k_2}'^{(3)} & x_{k_3}'^{(3)} \end{vmatrix} = \sum_1^4{}_{l_1 l_2 l_3} \begin{vmatrix} c_{k_1 l_1} & c_{k_1 l_2} & c_{k_1 l_3} \\ c_{k_2 l_1} & c_{k_2 l_2} & c_{k_2 l_3} \\ c_{k_3 l_1} & c_{k_3 l_2} & c_{k_3 l_3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{l_1}^{(1)} & x_{l_2}^{(1)} & x_{l_3}^{(1)} \\ x_{l_1}^{(2)} & x_{l_2}^{(2)} & x_{l_3}^{(2)} \\ x_{l_1}^{(3)} & x_{l_2}^{(3)} & x_{l_3}^{(3)} \end{vmatrix},$$

wo $k_1 k_2 k_3$ eine beliebige der Kombinationen 234, 314, 124, 321 ist und $l_1 l_2 l_3$ alle diese Kombinationen durchläuft, und weiter:

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} x_{k_1}'^{(1)} & x_{k_2}'^{(1)} \\ x_{k_1}'^{(2)} & x_{k_2}'^{(2)} \end{vmatrix} = \sum_1^6{}_{l_1 l_2} \begin{vmatrix} c_{k_1 l_1} & c_{k_1 l_2} \\ c_{k_2 l_1} & c_{k_2 l_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{l_1}^{(1)} & x_{l_2}^{(1)} \\ x_{l_1}^{(2)} & x_{l_2}^{(2)} \end{vmatrix},$$

wo $k_1 k_2$ eine beliebige der Kombinationen 23, 31, 12, 14, 24, 34 ist und $l_1 l_2$ alle diese durchläuft.

Aus (4) folgt nach § 58, (23'):

Bei der linearen Verwandtschaft (1) entspricht jeder Ebene des Raumes $\mathfrak{R}$ eine Ebene des Raumes $\mathfrak{R}'$, und zwar der Verbindungsebene dreier Punkte $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, $x_k^{(3)}$ die Verbindungsebene der drei entsprechen-Punkte $x_k'^{(1)}$, $x_k'^{(2)}$, $x_k'^{(3)}$.

Aus (5) folgt nach § 58, (14'):

Jeder Geraden des Raumes $\mathfrak{R}$ entspricht eine Gerade des Raumes $\mathfrak{R}'$, und zwar der Verbindungslinie zweier Punkte $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$ die Verbindungslinie der zwei entsprechenden Punkte $x_k'^{(1)}$, $x_k'^{(2)}$.

Zugleich aber gibt (5) die Beziehung zwischen den Koordinaten u_k und u_k' der Ebenen $x_k^{(1)} x_k^{(2)} x_k^{(3)}$ und $x_k'^{(1)} x_k'^{(2)} x_k'^{(3)}$ und (6) zwischen den Koordinaten p_k und p_k' der Geraden $x_k^{(1)} x_k^{(2)}$ und $x_k'^{(1)} x_k'^{(2)}$ (vgl.

§ 58, **7** und **5**), nämlich:

(7) $$\varrho u_k' = \sum_1^4 {}^l C_{kl} u_l,$$ (8) $$\varrho p_k' = \sum_1^6 {}^l \gamma_{kl} p_l,$$

wo C_{kl} und γ_{kl} die Unterdeterminanten dritten und zweiten Grades von C sind (vgl. Anm. 1, III, (2); (4)).

Die Auflösung der Gleichungen (7) und (8) gibt umgekehrt:

(9) $$\sigma u_l = \sum_1^4 {}^k c_{kl} u_k',$$ (10) $$\sigma p_l = \sum_1^6 {}^k \Gamma_{kl} p_k',$$

wo Γ_{kl} die Unterdeterminanten zweiten Grades aus den C_{kl} sind (Anm. 1, III, (12)).

Die Gleichungen (1), (3); (7), (9); (8), (10) stimmen ihrer Form nach mit den Formeln für die Koordinatentransformation in § 63, (8), (9); (12), (11); (19), (20) überein. Wie dort in (19′) und (20′) können die Formeln (8) und (10) auch ersetzt werden durch:

(8′) $$\varrho q_k' = \sum_1^6 {}^l \Gamma_{kl} q_l,$$ (10′) $$\sigma q_l = \sum_1^6 {}^k \gamma_{kl} q_k'.$$

3. Die lineare Verwandtschaft als projektive Verwandtschaft. Ein Punktfeld mit den Grundpunkten $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, $x_k^{(3)}$ und ein Ebenenbündel mit den Grundebenen $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$, $u_k^{(3)}$ im Raume $\mathfrak{R}$ können nach § 64, **2** durch die Parameterdarstellungen:

(11) $x_k = x_k^{(1)} y_1 + x_k^{(2)} y_2 + x_k^{(3)} y_3$, (12) $u_k = u_k^{(1)} v_1 + u_k^{(2)} v_2 + u_k^{(3)} v_3$,

$k = 1, 2, 3, 4$, gegeben werden.

Setzt man diese bezüglich in (1) und (7) ein und bezeichnet mit $x_k'^{(1)}$, $x_k'^{(2)}$, $x_k'^{(3)}$ und $u_k'^{(1)}$, $u_k'^{(2)}$, $u_k'^{(3)}$ die den genannten Grundpunkten und Grundebenen entsprechenden Elemente des Raumes $\mathfrak{R}'$, so ergibt sich:

(13) $$\varrho x_k' = x_k'^{(1)} y_1 + x_k'^{(2)} y_2 + x_k'^{(3)} y_3,$$

(14) $$\varrho u_k' = u_k'^{(1)} v_1 + u_k'^{(2)} v_2 + u_k'^{(3)} v_3.$$

Nach § 68, (28) bis (31) sind aber die Punktfelder (11) und (13), sowie die Ebenenbündel (12) und (14) projektiv.

Ein Strahlfeld mit den Grundstrahlen $p_k^{(1)}$, $p_k^{(2)}$, $p_k^{(3)}$ und ein Strahlbündel mit den Grundstrahlen $q_k^{(1)}$, $q_k^{(2)}$, $q_k^{(3)}$ im Raume $\mathfrak{R}$ können nach § 64, **3** durch die Parameterdarstellungen:

(15) $p_k = p_k^{(1)} v_1 + p_k^{(2)} v_2 + p_k^{(3)} v_3$, (16) $q_k = q_k^{(1)} y_1 + q_k^{(2)} y_2 + q_k^{(3)} y_3$,

$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ gegeben werden.

Setzt man diese bezüglich in (8) und (8′) ein und bezeichnet mit $p_k'^{(1)}$, $p_k'^{(2)}$, $p_k'^{(3)}$ und $q_k'^{(1)}$, $q_k'^{(2)}$, $q_k'^{(3)}$ die den genannten Grundstrahlen entsprechenden des Raumes $\mathfrak{R}'$, so ergibt sich:

$$(17)\qquad \varrho p_k' = p_k'^{(1)} v_1 + p_k'^{(2)} v_2 + p_k'^{(3)} v_3,$$

$$(18)\qquad \varrho q_k' = q_k'^{(1)} y_1 + q_k'^{(2)} y_2 + q_k'^{(3)} y_3.$$

Nach § 68, (32) bis (35) sind aber die Strahlfelder (15) und (17), sowie die Strahlbündel (16) und (18) projektiv.

Bei der linearen Verwandtschaft zweier Räume sind entsprechende Punktfelder, Strahlfelder, Ebenenbündel und Strahlbündel projektiv.

Dasselbe würde sich für *entsprechende Punktreihen, Ebenenbüschel* und *Strahlbüschel* mittels der Parameterdarstellungen § 64, **4** und **5** und im Hinblick auf § 66, **5** ergeben.

4. Reine und multiplizierte kanonische Form der Darstellung. Da für $C \neq 0$ die rechten Seiten der Gleichungen (1), (7) und (8) durch eine Koordinatentransformation im Raume $\mathfrak{R}$ nach § 63, (8), (12), (19) selbst als Koordinaten eingeführt werden können, die wir neuerdings wieder mit x_k, u_k, p_k bezeichnen wollen, so folgt:

Die eigentliche projektive Verwandtschaft zweier Räume kann stets in der reinen kanonischen Form (vgl. § 67, (12); (13)):

$$(19)\qquad \varrho x_k' = x_k, \quad \varrho u_k' = u_k, \quad \varrho p_k' = p_k$$

dargestellt werden.

Hierbei entsprechen sich (Fig. 337) die gleichnamigen Ecken E_k und E_k' $(k = 1, 2, 3, 4)$ und die Einheitspunkte E_0 und E_0', worauf dann zugleich die gleichnamigen Seitenebenen der Koordinatentetraeder und die Einheitsebenen entsprechende Elemente sind.

Entsprechen sich nur die Ecken E_k und E_k', aber nicht die Punkte E_0 und E_0', so erhalten die Gleichungen (1), (7) und (8), indem für $k \neq l: c_{kl} = 0$ gesetzt wird, *die multiplizierte kanonische Form:*

$$(20)\qquad \varrho x_k' = c_{kk} x_k, \quad \varrho u_k' = \frac{u_k}{c_{kk}}, \quad \varrho p_k' = c_{k_1 k_1} c_{k_2 k_2} p_k,$$

wo $k_1 k_2$ die k^{te} Kombination der Reihe 23, 31, 12, 14, 24, 34 ist (§ 59, **1**).

5. Bestimmung der projektiven Beziehung. Da zur Bestimmung des Koordinatensystems stets fünf Punkte E_1, E_2, E_3, E_4, E_0 gehören, von denen keine vier in einer Ebene liegen (§ 57, **9**), so ergibt sich aus der kanonischen Form (19) der Satz (vgl. § 67, **5**):

Die projektive Beziehung zweier Räume ist vollständig bestimmt, wenn fünf beliebigen Punkten des einen, von denen keine vier in einer

Ebene liegen, fünf beliebige Punkte des andern, von denen keine vier in einer Ebene liegen, entsprechend gesetzt werden;

und zur analytischen Bestimmung der weitere Satz (vgl. § 67, 5):

Zwei Räume werden projektiv aufeinander bezogen, indem bei Einführung eines Systems von Tetraederkoordinaten in jedem von ihnen je zwei solche Punkte, Strahlen oder Ebenen beider entsprechend gesetzt werden, die gleiche Koordinaten haben.

6. Reziproke Räume. Wie in § 69, **1—5** *gleichartige* Elemente beider Räume, Punkte und Punkte, Ebenen und Ebenen einander entsprechen, so können auch *ungleichartige* Elemente, Punkte und Ebenen, beider Räume entsprechend gesetzt werden. Man nennt die Verwandtschaft dann *Korrelation, Dualität* oder *Reziprozität* zweier Räume.[119])

Sie ist bestimmt durch die Gleichungen:

$$\rho u_k' = \sum_1^4{}^l c_{kl} x_l, \tag{21}$$

die jedem Punkte $P = x_l$ eine Ebene $\Pi = u_k'$ zuordnen, wobei sich die Punktkoordinaten x_l auf das eine und die Ebenenkoordinaten u_k' auf das andere Koordinatensystem Fig. 337 beziehen.

Durch Auflösung der Gleichungen (21) ergibt sich umgekehrt:

$$\sigma x_l = \sum_1^4{}^k C_{kl} u_k', \tag{22}$$

so daß zunächst *je ein Punkt des Raumes $\mathfrak{R}$ und eine Ebene des Raumes $\mathfrak{R}'$ als ein Paar entsprechende Elemente zusammengehören.*

Nun gelten aber mit (21) wieder die Gleichungen (4), (5), (6), nur daß dort links überall u' statt x' zu setzen ist. Es folgt daher auch wie dort:

Bei der reziproken Verwandtschaft (21) *entspricht jeder Ebene des Raumes $\mathfrak{R}$ ein Punkt des Raumes $\mathfrak{R}'$, und zwar der Verbindungsebene dreier Punkte $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, $x_k^{(3)}$ der Schnittpunkt der drei entsprechenden Ebenen $u_k'^{(1)}$, $u_k'^{(2)}$, $u_k'^{(3)}$.*

Jeder Geraden des Raumes $\mathfrak{R}$ entspricht eine Gerade des Raumes $\mathfrak{R}'$, und zwar der Verbindungslinie zweier Punkte $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$ die Schnittlinie der entsprechenden Ebenen $u_k'^{(1)}$, $u_k'^{(2)}$.

Zugleich folgen, wie dort, zwischen den Koordinaten u_k und x_k' der Ebene $x_k^{(1)} x_k^{(2)} x_k^{(3)}$ und des Punktes $u_k'^{(1)} \times u_k'^{(2)} \times u_k'^{(3)}$, sowie den Koordinaten p_k und q_k' der Geraden $x_k^{(1)} x_k^{(2)}$ und $u_k'^{(1)} \times u_k'^{(2)}$ die Gleichungen:

$$(23)\qquad \varrho x_k' = \sum_1^4 {}^l\, C_{kl} u_l, \qquad\qquad (24)\qquad \varrho q_k' = \sum_1^6 {}^l\, \gamma_{kl} p_l$$

und durch Auflösung:

$$(25)\qquad \sigma u_l = \sum_1^4 {}^k\, c_{kl} x_k', \qquad\qquad (26)\qquad \sigma p_l = \sum_1^6 {}^k\, \Gamma_{kl} q_k'.$$

Das Verhältnis der beiden Räume gestaltet sich daher vollkommen reziprok.

Indem man ferner die Parameterdarstellungen (11) und (12) in (21) und (23) einsetzt, findet man an Stelle von (13) und (14):

$$(27)\qquad \varrho u_k' = u_k'^{(1)} y_1 + u_k'^{(2)} y_2 + u_k'^{(3)} y_3,$$

$$(28)\qquad \varrho x_k' = x_k'^{(1)} v_1 + x_k'^{(2)} v_2 + x_k'^{(3)} v_3,$$

womit wie § 68, 5 folgt, daß das Punktfeld (11) und das Ebenenbündel (27) projektiv sind, und allgemein:

Bei der reziproken Verwandtschaft zweier Räume sind ein Punktfeld des einen und ein Ebenenbündel des andern, die sich entsprechen, projektiv; ebenso sind ein Strahlfeld des einen und ein Strahlbündel des andern, eine Punktreihe des einen und ein Ebenenbüschel des andern, ein Strahlbüschel des einen und ein Strahlbüschel des andern, die sich entsprechen, jedesmal projektiv.

Die *kanonische Form* der Gleichungen der reziproken Verwandtschaft lautet (vgl. (19)):

$$(29)\qquad \varrho u_k' = x_k, \quad \varrho x_k' = u_k, \quad \varrho q_k' = p_k.$$

VIII. Kapitel.

Gleichungen zwischen den Koordinaten.

§ 70. Gleichungen zwischen den Koordinaten in der Punktreihe, im Strahl- und Ebenenbüschel.

1. Gleichungen mit gemeinen Koordinaten. Bedeutet x die gemeine Koordinate eines Punktes auf der Geraden (vgl. § 1, 6) und $g(x)$ einen ganze Funktion n^{ten} Grades von x, so stellt die Gleichung:

$$(1)\qquad g(x) = 0$$

eine *Gruppe* (ein System) *von n Punkten* (eine *Punktgruppe* n^{ter} *Ordnung)* auf der Geraden dar. Die n Wurzeln $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ der

Gleichung (1) sind die Koordinaten der *n Punkte* der Gruppe.[120]) Wie jene können diese auch teilweise oder alle zusammenfallen.

Die Punktgruppe *erster Ordnung* mit der Gleichung:

$$Ax + B = 0 \tag{2}$$

ist der einzelne Punkt (§ 1, **11**).

Bedeutet $\operatorname{tg}\varphi$ die gemeine Koordinate eines Strahles im Strahlbüschel (vgl. § 2, **11**) oder einer Ebene im Ebenenbüschel (vgl. § 49, **13**), so stellt die Gleichung:

$$g(\operatorname{tg}\varphi) = 0 \tag{1'}$$

ebenso eine *Gruppe von n Strahlen* oder *n Ebenen* dar.

2. Imaginäre Punkte, Strahlen und Ebenen. Die Sätze in § 70, **1** sind im Sinne der Algebra allgemein aufgefaßt, indem auch komplexe Wurzeln x und $\operatorname{tg}\varphi$ der Gleichungen (1) und (1') mitgezählt werden, denen *„imaginäre Punkte“* der Geraden und *„imaginäre Strahlen oder Ebenen“* im Büschel entsprechen.[121])

Auch die zunächst reell gedachten Koeffizienten der ganzen Funktion g können schließlich komplexe Werte erhalten.

3. Übergang auf homogene gemeine Koordinaten. Um die Punktgruppe (1) in *homogenen* gemeinen Koordinaten x, t (vgl. § 7, **1**) darzustellen, setzt man in der Gleichung (1) $x:t$ für x und multipliziert mit t^n. Man erhält dann eine Gleichung:

$$f(x,t) = 0, \tag{3}$$

wo $f(x,t)$ eine *homogene* ganze Funktion *(binäre Form)* n^{ten} Grades von x, t ist.

Umgekehrt wird eine gegebene Gleichung (3) in die Gestalt (1) versetzt, indem sie durch t^n dividiert und danach für $x:t$ wieder x geschrieben, oder kurz, indem sogleich $t = 1$ gesetzt wird (vgl. § 7, **1**).

Eine gegebene Gleichung (3) ist jedoch *umfassender* als die entsprechende Gleichung (1), wenn sie den Faktor t^m $(0 < m \leq n)$ enthält. Dann wird nämlich (1) nur vom Grade $n - m$, indem der in der Punktgruppe (3) m-fach enthaltene unendlich ferne Punkt $t = 0$ (vgl. § 7, **1**) verloren geht. Beispielsweise werden die in der Form (3) gegebenen Gleichungen *zweiten* Grades:

$$Ax^2 + Bt^2 = 0, \qquad Axt + Bt^2 = 0$$

beim Übergang zur Gestalt (1):

$$Ax^2 + B = 0, \qquad Ax + B = 0,$$

die eine wieder vom *zweiten*, die andere nur vom *ersten* Grade.

4. Gleichungen mit homogenen gemeinen Koordinaten. In der in diesem Sinne allgemeineren Auffassung erhalten wir den Satz:

Bedeutet $f(x,t)$ eine Form n^{ten} Grades der homogenen gemeinen Koordinaten x, t auf der Geraden, so stellt die Gleichung:

$$f(x,t) = 0 \tag{4}$$

eine Punktgruppe n^{ter} Ordnung auf der Geraden dar.

Das Entsprechende gilt bei gleicher Bedeutung von f für alle homogenen gemeinen Koordinaten *in Grundgebilden erster Stufe*. Es ist also:

$$f(x,y) = 0 \tag{5}$$

eine *Punktgruppe auf der unendlich fernen Geraden* bei der Bedeutung § 23, **1** von x, y;

$$f(u,v) = 0 \quad \text{oder} \quad f(x,y) = 0 \tag{6}$$

eine *Strahlengruppe im Strahlbüschel* mit endlichem Mittelpunkt bei der Bedeutung § 7, **2**; § 23, **2**; **1** von u, v oder x, y;

$$f(x,t) = 0 \quad \text{oder} \quad f(u,s) = 0 \tag{7}$$

eine *Strahlengruppe im Parallelstrahlbüschel* bei der Bedeutung § 23, **2** von x, t oder u, s $(x : t = - s : u)$;

$$f(u,v) = 0 \tag{8}$$

eine *Ebenengruppe im Ebenenbüschel* mit endlicher Achse bei der Bedeutung § 49, **13** von u, v;

$$f(x,t) = 0 \tag{9}$$

eine *Ebenengruppe im Parallelebenenbüschel* bei der Bedeutung § 49, **13** von x, t.

5. Gleichungen mit Zweieckskoordinaten. Durch die lineare Substitution § 7, (14) geht die Gleichung (4) in eine Gleichung von derselben Form zwischen den Zweieckskoordinaten x_1, x_2 über; dabei kommt es auf den Faktor σ in der Substitution nicht an, da die Gleichung (4) nur von dem Verhältnis $x : t$ abhängt.

Bedeutet $f(x_1, x_2) = 0$ eine Form n^{ten} Grades der Zweieckskoordinaten x_1, x_2 auf der Geraden, so stellt die Gleichung:

$$f(x_1, x_2) = 0 \tag{10}$$

eine Punktgruppe n^{ter} Ordnung auf der Geraden dar.

Ebenso ist:

$$f(u_1, u_2) = 0 \tag{11}$$

die Gleichung einer *Strahlen- oder Ebenengruppe*, je nachdem u_1, u_2 als

Zweiseitskoordinaten im Strahlbüschel (§ 7, 5) oder als *Zweiflachskoordinaten im Ebenenbüschel* (§ 56, **1**) gelten.

6. Erhaltung der Ordnung bei der Koordinatentransformation. Wie schon aus der geometrischen Bedeutung *der Ordnung einer Punktgruppe* als der Anzahl der Punkte der Gruppe hervorgeht, *bleibt* nach § 8, (17); § 64, (11′) *der Grad der Gleichungen* (10) *und* (11) *bei jeder Transformation der Koordinaten erhalten.*

§ 71. Gleichungen zwischen den Koordinaten in der Ebene und im Bündel.

1. Gleichungen zwischen gemeinen Koordinaten in der Ebene.

Der Inbegriff aller Punkte der Ebene, deren gemeine Koordinaten x, y (vgl. § 10, **2**) einer Gleichung von der Form:

$$(1) \qquad g(x, y) = 0$$

genügen, wo $g(x, y)$ eine ganze Funktion n^{ten} Grades von x, y bedeutet, ist eine Kurve n^{ter} Ordnung (eine Punktreihe oder Linie n^{ter} Ordnung, vgl. Fig. 338a).

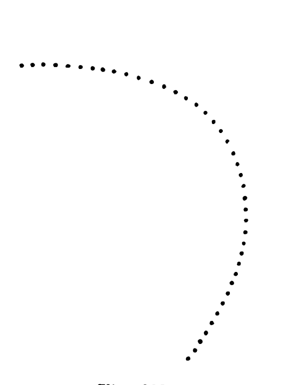


Fig. 338 a.

Die Gleichung (1) heißt die *Gleichung der Kurve in laufenden Punktkoordinaten.*[122])

Der Inbegriff aller Geraden der Ebene, deren gemeine Koordinaten u, v (vgl. § 19, **1**) einer Gleichung von der Form:

$$(1') \qquad g(u, v) = 0$$

genügen, wo $g(u, v)$ eine ganze Funktion n^{ten} Grades von u, v bedeutet, ist eine Kurve n^{ter} Klasse (ein Strahlbüschel n^{ter} Ordnung, vgl. Fig. 338b).

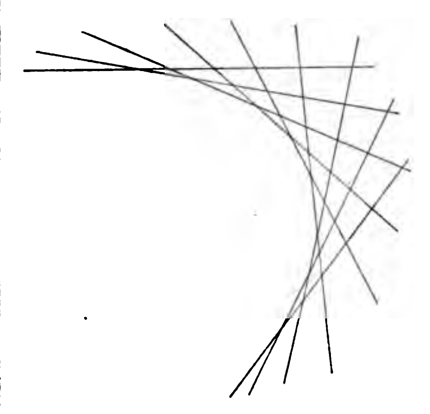


Fig. 338 b.

Die Gleichung (1′) heißt die *Gleichung der Kurve in laufenden Linienkoordinaten.*[123])

Die *Kurve erster Ordnung* mit der Gleichung (Fig. 339a):

. . . .

Fig. 339a.

(2) $$Ax + By + C = 0$$

(vgl. § 16, (6)) ist die *gerade Linie.*

Die *Kurve erster Klasse* (das Strahlbüschel erster Ordnung oder Strahlbüschel schlechthin):

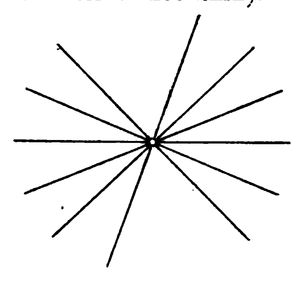


Fig. 339b.

(2′) $$Au + Bv + C = 0$$

(vgl. § 19, 2) ist der Punkt (Fig. 339b).

2. Übergang auf homogene gemeine Koordinaten. Um in die Gleichung (1) homogene gemeine Koordinaten einzuführen (vgl. § 22, 1), setzt man $x:t$ und $y:t$ für x und y und multipliziert alsdann die Gleichung mit t^n.

Man erhält so eine Gleichung von der Form:

(3) $$f(x, y, t) = 0,$$

in der f eine homogene ganze Funktion (ternäre Form) n^{ten} Grades von x, y, t ist.

Dividiert man umgekehrt die Gleichung (3) durch t^n und bezeichnet dann $x:t$ und $y:t$ mit x und y oder setzt man einfach in (3) $t = 1$, so erhält man wieder die Gleichung (1).

Allerdings wird diese, wenn eine gegebene Gleichung (3) den Faktor t^m $(0 < m \leqq n)$ enthält, nur vom $(n - m)^{\text{ten}}$ Grade (vgl. § 70, 3). Die gegebene Gleichung (3) ist also dann umfassender als die entsprechende Gleichung (1), indem sie neben der durch diese dargestellten Kurve $(n - m)^{\text{ter}}$ Ordnung noch m-fach die unendlich ferne Gerade $(t^m = 0)$ umfaßt (vgl. § 22, (6)).

Die entsprechende Beziehung besteht zwischen den Gleichungen:

$$(1') \quad g(u, v) = 0 \quad \text{und} \quad (3') \quad f(u, v, s) = 0;$$

enthält die homogene ganze Funktion $f(u, v, s)$ den Faktor s^m $(0 < m \leqq n)$, so geht beim Übergang zu (1′) mit $s = 1$ der Koordinatenanfangspunkt O $m$fach $(s^m = 0)$ verloren (vgl. § 22, (9)).

3. Gleichungen zwischen homogenen gemeinen Koordinaten

in der Ebene. In der in diesem Sinne allgemeineren Auffassung verstehen wir nunmehr:

unter einer Kurve n^{ter} Ordnung den Inbegriff aller Punkte der Ebene, deren homogene gemeine Koordinaten einer Gleichung von der Form genügen:

(4) $$f(x, y, t) = 0,$$

unter einer Kurve n^{ter} Klasse den Inbegriff aller Strahlen der Ebene, deren homogene gemeine Koordinaten einer Gleichung von der Form genügen:

(4') $$f(u, v, s) = 0,$$

wo f beiderseits eine homogene ganze Funktion n^{ten} Grades der drei Argumente ist.

Die Kurve *erster Ordnung* (vgl. § 22, (2)) hat die Gleichung:

(5) $$Ax + By + Ct = 0.$$

Die Kurve *erster Klasse* (vgl. § 22, (2')) hat die Gleichung:

(5') $$Au + Bv + Cs = 0.$$

Eine Kurve n^{ter} Ordnung in der unendlich fernen Ebene des Raumes wird ebenso durch die Gleichung:

(6) $$f(x, y, z) = 0$$

dargestellt, wo x, y, z homogene gemeine Punktkoordinaten in der unendlich fernen Ebene sind (vgl. § 49, 2).

Eine Kurve n^{ter} Klasse in der unendlich fernen Ebene des Raumes wird ebenso durch eine Gleichung:

(6') $$f(u, v, w) = 0$$

dargestellt, wo u, v, w homogene gemeine Linienkoordinaten in der unendlich fernen Ebene sind (vgl. § 49, 4).

4. Gleichungen zwischen Dreieckskoordinaten in der Ebene. Bei Einführung von Dreieckskoordinaten in die Gleichungen (4) und (4') ändert sich nach § 28, (4); (10) die Form der letzteren nicht, wie auch umgekehrt, so daß wir sagen können:

Eine Kurve n^{ter} Ordnung in der Ebene ist der Inbegriff aller Punkte, deren Dreieckskoordinaten einer Gleichung n^{ten} Grades:

(7) $$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

genügen.

Eine Kurve n^{ter} Klasse in der Ebene ist der Inbegriff aller Strahlen, deren Dreieckskoordinaten einer Gleichung n^{ten} Grades:

(7') $$f(u_1, u_2, u_3) = 0$$

genügen.

Dabei ist f immer eine *homogene* ganze Funktion (Form) n^{ten} Grades.

5. Gleichungen zwischen homogenen gemeinen Koordinaten im Bündel. Wie in § 71, 3 verstehen wir:

unter einem Kegel (Strahlbüschel) n^{ter} Ordnung den Inbegriff aller Strahlen des Bündels, deren homogene gemeine

unter einem Kegel n^{ter} Klasse (Ebenenbüschel n^{ter} Ordnung) den Inbegriff aller Ebenen des Bündels,

Koordinaten (vgl. § 49, **6**) *einer Gleichung* n^{ten} *Grades genügen:*

(8) $$f(x, y, z) = 0.$$

deren homogene gemeine Koordinaten (vgl. § 49, **5**) *einer Gleichung* n^{ten} *Grades genügen:*

(8') $$f(u, v, w) = 0.$$

Hierbei ist der Mittelpunkt des Bündels im Endlichen angenommen. Auf das *Bündel mit unendlich fernem Zentrum* beziehen sich die entsprechenden Sätze:

Ein Zylinder n^{ter} *Ordnung ist der Inbegriff aller Strahlen des Bündels, deren homogene gemeine Koordinaten* (vgl. § 49, **11**) *einer Gleichung* n^{ten} *Grades genügen:*

(9) $$f(x, y, t) = 0.$$

Ein Zylinder n^{ter} *Klasse ist der Inbegriff aller Ebenen des Bündels, deren homogene gemeine Koordinaten* (vgl. § 49, **10**) *einer Gleichung* n^{ten} *Grades genügen:*

(9') $$f(u, v, s) = 0.$$

6. Gleichungen zwischen Dreiflachskoordinaten im Bündel. Nach § 56, **5** behalten die Gleichungen (8) und (8') auch bei Einführung von Dreiflachskoordinaten ihre Form bei, wie auch umgekehrt, also:

Ein Kegel n^{ter} *Ordnung im Bündel ist der Inbegriff aller Strahlen, deren Dreiflachskoordinaten* (vgl. § 56, (12'), (30')) *einer Gleichung* n^{ten} *Grades genügen:*

(10) $$f(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Ein Kegel n^{ter} *Klasse im Bündel ist der Inbegriff aller Ebenen, deren Dreiflachskoordinaten* (vgl. § 56, (12), (30)) *einer Gleichung* n^{ten} *Grades genügen:*

(10') $$f(u_1, u_2, u_3) = 0.$$

7. Zwei Gleichungen zwischen den Koordinaten. *Zwei* Gleichungen von der Form (1), (4), (6) oder (7), die eine vom Grade m, die andere vom Grade n, stellen eine Gruppe von mn Punkten der Ebene, *die gemeinsamen Punkte (Schnittpunkte) zweier Kurven* m^{ter} und n^{ter} Ordnung (Fig. 338a) dar; zwei Gleichungen von der Form (1'), (4'), (6') oder (7') ebenso eine Gruppe von mn Strahlen der Ebene, *die gemeinsamen Strahlen zweier Kurven* m^{ter} und n^{ter} Klasse (Fig. 338b) dar.[125]) Dem Fall $m = 1$, $n = 1$ entspricht der Schnittpunkt zweier Geraden (vgl. § 18, **3**) und die Verbindungslinie zweier Punkte.

Im *Bündel* geben zwei entsprechende Gleichungen eine Gruppe von mn Strahlen, *die Schnittlinien zweier Kegel* m^{ter} *und* n^{ter} *Ordnung* oder eine Gruppe von mn Ebenen, *die gemeinsamen Ebenen zweier Kegel* m^{ter} *und* n^{ter} *Klasse.*

8. Perspektive Beziehung zwischen Ebene und Bündel. Durch die gleiche Bezeichnung ihrer Koordinaten sind die Punkte x, y, t und

Strahlen u, v, s der xy-Ebene des Koordinatensystems $Oxyz$ einerseits und die zur z-Achse (die hierbei zur xy-Ebene nicht senkrecht zu sein braucht) parallelen Strahlen und Ebenen andererseits (vgl. § 49, **10**; **11**); ferner die Punkte x, y, z und Strahlen u, v, w der unendlich fernen Ebene einerseits und die Strahlen und Ebenen des Bündels am Punkt O andererseits (vgl. § 53, **6**) perspektiv aufeinander bezogen. Dasselbe gilt daher bei gleichem f für die Kurve (4), (4') und den Zylinder (9), (9'), für die Kurve (6), (6') und den Kegel (8), (8'). Man kann diese Beziehung in den Sätzen aussprechen:

Jeder Zylinder n^{ter} Ordnung (oder Klasse) schneidet eine Ebene, die nicht zu seinen Strahlen parallel ist, in einer Kurve n^{ter} Ordnung (oder Klasse); jeder über einer Kurve n^{ter} Ordnung (Klasse) errichteter Zylinder ist von der n^{ten} Ordnung (Klasse).

Jeder Kegel n^{ter} Ordnung (Klasse) schneidet die unendlich ferne Ebene in einer Kurve n^{ter} Ordnung (Klasse); jeder über einer unendlich fernen Kurve n^{ter} Ordnung (Klasse) errichtete Kegel ist von der n^{ten} Ordnung (Klasse).

Endlich aber folgt mit Bezug auf (7), (7') und (10), (10') aus der Gleichheit der gleichbezeichneten Koordinaten x_1, x_2, x_3 und u_1, u_2, u_3 entsprechender Elemente bei perspektiver Lage eines Bündels und einer Ebene (vgl. § 56, **10**):

Jeder Kegel n^{ter} Ordnung (Klasse) schneidet eine Ebene, die nicht durch seine Spitze geht, in einer Kurve n^{ter} Ordnung (Klasse); jeder über einer Kurve n^{ter} Ordnung (Klasse) errichtete Kegel ist von der n^{ten} Ordnung (Klasse).

9. Erhaltung der Ordnung und Klasse bei der Transformation der Koordinaten. Führt man in die Gleichungen (4), (4') oder (9), (9') nach § 23, **3**; in die Gleichungen (6), (6') oder (8), (8') nach § 50, **3**, in die Gleichungen (7), (7') oder (10), (10') nach § 30, (15); (16) und § 64, (9'); (10') neue Koordinaten ein, so wird, da in allen Fällen die alten Koordinaten homogene lineare Funktionen der neuen sind, der Grad der Gleichungen in diesen derselbe wie in jenen.[124])

Ordnung und Klasse einer Kurve oder eines Kegels (Zylinders) sind von der Wahl des Koordinatensystems, in bezug auf das sie bestimmt werden, unabhängig (vgl. § 70, **6**).

10. Gleichung der gemeinsamen Punkte einer Kurve und einer Geraden oder der gemeinsamen Strahlen einer Kurve und eines Punktes in gemeinen Koordinaten. In bezug auf dasselbe Achsensystem Oxy, auf das sich die Gleichung (4) der Kurve n^{ter} Ordnung bezieht, sei eine beliebige Gerade p_0 durch einen Punkt

$O' = x_0, y_0, 1$ und ihre Richtungskosinus a_1, b_1 gegeben. Jeder Punkt der Geraden ist in der Parameterdarstellung § 23, (5) enthalten. Soll er auf der Kurve liegen, muß die Bedingung erfüllt sein:

$$(11) \qquad f(a_1 x' + x_0 t', \quad b_1 x' + y_0 t', \quad t') = 0.$$

Mit Rücksicht auf die Bedeutung der Parameter x', t' (vgl. § 23, 4) ist dies *die Gleichung der Gruppe der Schnittpunkte der Kurve* n^{ter} *Ordnung* (4) *mit der gegebenen Geraden* p_0 *in homogenen gemeinen Punktkoordinaten* x', t' *auf dieser* (vgl. § 70, (4)).

Unmittelbar aus (4) mit $t = 0$ (vgl. § 22, (6)) ergibt sich in:

$$(12) \qquad f(x, y, 0) = 0$$

die Gleichung der Gruppe der Schnittpunkte der Kurve n^{ter} *Ordnung* (4) *mit der unendlich fernen Geraden in homogenen gemeinen Punktkoordinaten* x, y *auf dieser* (vgl. § 70, (5)).

Wieder in bezug auf Oxy sei neben der Kurve (4′) ein Punkt $O' = x_0, y_0, 1$ gegeben. Jeder Strahl durch den Punkt ist in der Parameterdarstellung § 23, (6) enthalten. Soll er ein Strahl der Kurve sein, muß:

$$(11') \qquad f(u', v', -x_0 u' - y_0 v') = 0$$

sein. Mit Rücksicht auf die Bedeutung der Parameter u', v' (vgl. § 23, 5) ist dies *die Gleichung der Gruppe der gemeinsamen Strahlen der Kurve* n^{ter} *Klasse* (4′) *und des gegebenen Punktes* O' *in homogenen gemeinen Strahlenkoordinaten* u', v' *in bezug auf das dem Strahlbüschel des Punktes* O' *angehörige mit* Oxy *parallele System* $O'x'y'$ (vgl. § 70, (6)). Ebenso erhält man mittels der Parameterdarstellung des Parallelstrahlbüschels von der Richtung a_1, b_1 (§ 23, (7)) in:

$$(12') \qquad f(a_1 u', b_1 u', s') = 0$$

die Gleichung der Gruppe derjenigen Strahlen der Kurve n^{ter} *Klasse* (4′), *die einem gegebenen Parallelstrahlbüschel angehören in gemeinen Strahlenkoordinaten* u', s' *im Büschel* (vgl. § 70, (7)).

Die Gleichungen (11), (12) oder (11′), (12′) stellen nach § 71, 8 zugleich die Strahlen eines *Zylinders* n^{ter} *Ordnung*, die in einer Ebene des Bündels liegen, oder bezüglich die Ebenen eines *Zylinders* n^{ter} *Klasse* dar, die durch einen Strahl des Bündels gehen, dem der Zylinder angehört.

11. Gleichung der gemeinsamen Strahlen eines Kegels und einer Ebene oder der gemeinsamen Ebenen eines Kegels und eines Strahles in gemeinen Koordinaten. In bezug auf das Achsensystem $Oxyz$ im Bündel, auf das sich die Gleichungen (8) und (8′)

beziehen, sei eine Ebene Π_0 durch die Richtungskosinus a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 zweier in ihr liegenden rechtwinkligen Achsen x' und y' oder ein Strahl p_0 dadurch gegeben, daß er zu zwei solchen Achsen senkrecht steht. Alle in der Ebene Π_0 liegenden Strahlen oder alle durch den Strahl p_0 des Bündels gehenden Ebenen sind dann in den Parameterdarstellungen § 50, (19') oder (19) enthalten.

Für die in der Ebene Π_0 liegenden Strahlen des Kegels (8) ist daher:

$$(13)\quad \begin{cases} f(a_1x' + a_2y', \quad b_1x' + b_2y', \\ \qquad c_1x' + c_2y') = 0. \end{cases}$$

Dies ist die Gleichung der Gruppe der gemeinsamen Strahlen des Kegels n^{ter} *Ordnung* (8) *und der Ebene* Π_0 *in gemeinen Strahlenkoordinaten* x', y' *im Strahlbüschel* (vgl. § 70, (6)).

Für die durch den Strahl p_0 gehenden Ebenen des Kegels (8') ist daher:

$$(13')\quad \begin{cases} f(a_1u' + a_2v', \quad b_1u' + b_2v', \\ \qquad c_1u' + c_2v') = 0. \end{cases}$$

Dies ist die Gleichung der Gruppe der gemeinsamen Ebenen des Kegels n^{ter} *Klasse* (8') *und des Strahles* p_0 *in gemeinen Ebenenkoordinaten* u', v' *im Ebenenbüschel* (vgl. § 70, (8)).

Es sind gleichzeitig *innerhalb der unendlich fernen Ebene* die Gleichungen der Gruppe von Punkten, die die Kurve n^{ter} Ordnung (6) mit einer Geraden und der Gruppe von Strahlen, die die Kurve n^{ter} Klasse (6') mit einem Punkte gemein hat.

12. Gleichungen der gemeinsamen Elemente in Dreiecks- und Dreiflachskoordinaten. In bezug auf das Koordinatendreieck, auf das sich die Gleichungen (7) und (7') beziehen, sei eine Gerade p_0 durch zwei Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ oder ein Punkt P_0 durch zwei Gerade $u_k^{(1)}$ und $u_k^{(2)}$ $(k = 1, 2, 3)$ gegeben. Dann folgt wie in § 71, **10** unter Benutzung der Parameterdarstellungen § 30, (24), (24'):

Die Gruppe der Punkte, die die Kurve n^{ter} *Ordnung:*

$$(7)\qquad f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

mit der Verbindungslinie zweier gegebenen Punkte $x_k^{(1)}$ *und* $x_k^{(2)}$ *gemein hat, ist durch die Gleichung:*

$$(14)\quad \begin{cases} f(x_1^{(1)}y_1 + x_1^{(2)}y_2, \\ \quad x_2^{(1)}y_1 + x_2^{(2)}y_2, \\ \quad x_3^{(1)}y_1 + x_3^{(2)}y_2) = 0 \end{cases}$$

in Zweieckskoordinaten y_1, y_2 *auf der Verbindungslinie dargestellt* (vgl. § 70, (10)).

Die Gruppe der Strahlen, die die Kurve n^{ter} *Klasse:*

$$(7')\qquad f(u_1, u_2, u_3) = 0$$

mit dem Schnittpunkt zweier gegebenen Strahlen $u_k^{(1)}$ *und* $u_k^{(2)}$ *gemein hat, ist durch die Gleichung:*

$$(14')\quad \begin{cases} f(u_1^{(1)}v_1 + u_1^{(2)}v_2, \\ \quad u_2^{(1)}v_1 + u_2^{(2)}v_2, \\ \quad u_3^{(1)}v_1 + u_3^{(2)}v_2) = 0 \end{cases}$$

in Zweiseitskoordinaten v_1, v_2 *an dem Schnittpunkte dargestellt* (vgl. § 70, (11)).

Dieselbe Gleichung (14) gibt die Gruppe der Strahlen, die der *Kegel n^{ter} Ordnung* (10) mit der Verbindungsebene zweier gegebenen Strahlen $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ gemein hat, in Zweiseitskoordinaten y_1, y_2 im Strahlbüschel der Verbindungsebene (§ 64, 8).

Dieselbe Gleichung (14′) gibt die Gruppe der Ebenen, die der *Kegel n^{ter} Klasse* (10′) mit dem Schnittstrahl zweier gegebenen Ebenen $u_k^{(1)}$ und $u_k^{(2)}$ gemein hat, in Zweiflachskoordinaten v_1, v_2 im Ebenenbüschel des Schnittstrahles.

13. Geometrische Bedeutung der Ordnung und Klasse der Kurven und Kegel. Da beim Übergang von der Gleichung (7) der Kurve n^{ter} Ordnung in Dreieckskoordinaten x_1, x_2, x_3 zu der Gleichung (14) ihrer Schnittpunkte mit einer Geraden in Zweieckskoordinaten y_1, y_2, wie bei allen in § 71, **10** bis **12** nach übereinstimmender Methode ausgeführten Übergängen von drei zu zwei homogenen Koordinaten der Grad der Gleichung unverändert bleibt, so folgt allgemein:[126])

In der Ebene hat eine Kurve n^{ter} Ordnung mit jeder Geraden n Punkte gemein.

Im Bündel hat ein Kegel n^{ter} Ordnung mit jeder Ebene n Strahlen gemein.

In der Ebene hat eine Kurve n^{ter} Klasse mit jedem Punkt n Strahlen gemein.

Im Bündel hat ein Kegel n^{ter} Klasse mit jedem Strahle n Ebenen gemein.

Der Zylinder ist dabei als ein Kegel im Bündel mit unendlich fernem Mittelpunkt eingeschlossen.

Eine *Ausnahme* von dem ersten Satze tritt nur dann ein, wenn eine Gerade der Kurve *ganz* angehört, die Gleichung (14) besteht dann in y_1, y_2 *identisch.* Entsprechendes gilt für die anderen Sätze.

14. Unvollständige Gleichungen für drei homogene Koordinaten in der Ebene. Wenn in der Gleichung (4) y fehlt, so zerfällt die linke Seite $f(x, t)$ in n lineare Faktoren von der Form $Ax + Ct$. Daraus ergibt sich nach § 16, (16) und entsprechend nach § 19, **5**; § 16, (15); § 22, (10); § 29, **3**:

Die Kurve n^{ter} Ordnung:

$$f(x, t) = 0 \tag{15}$$

zerfällt in n zur y-Achse parallele Gerade.

Die Kurve n^{ter} Ordnung:

$$f(x, y) = 0 \tag{16}$$

Die Kurve n^{ter} Klasse:

$$f(u, s) = 0 \tag{15'}$$

zerfällt in n auf der x-Achse liegende Punkte.

Die Kurve n^{ter} Klasse:

$$f(u, v) = 0 \tag{16'}$$

zerfällt in n durch den Koordinatenanfang O gehende Strahlen.

Die Kurve n^{ter} Ordnung:

(17) $$f(x_1, x_2) = 0$$

zerfällt in n durch die Ecke E_3 des Koordinatendreiecks gehende Strahlen.

Die *zwei* Gleichungen (vgl. § 71, 7):

(18) $$f(x_1, x_2) = 0, \quad x_3 = 0$$

geben die Schnittpunkte dieser Strahlen mit der Seite e_3.

zerfällt in n auf der unendlich fernen Geraden liegende Punkte.

Die Kurve n^{ter} Klasse:

(17') $$f(u_1, u_2) = 0$$

zerfällt in n auf der Seite e_3 des Koordinatendreiecks liegende Punkte.

Die *zwei* Gleichungen (vgl. § 71, 7):

(18') $$f(u_1, u_2) = 0, \quad u_3 = 0$$

geben die Verbindungslinien dieser Punkte mit der Ecke E_3.

15. Unvollständige Gleichungen für drei homogene Koordinaten im Bündel. In gleicher Weise ergeben sich mit Rücksicht auf § 49, **8** und § 56, **10** für das Bündel ((8), (8'); (10), (10')) die Sätze:

Der Kegel n^{ter} Ordnung:

(19) $$f(x, y) = 0$$

zerfällt in n durch die z-Achse gehende Ebenen.

Der Kegel n^{ter} Ordnung:

(20) $$f(x_1, x_2) = 0$$

zerfällt in n durch die Kante ε_3 des Koordinatendreiflachs gehende Ebenen.

Der Kegel n^{ter} Klasse:

(19') $$f(u, v) = 0$$

zerfällt in n in der xy-Ebene liegende Strahlen.

Der Kegel n^{ter} Klasse:

(20') $$f(u_1, u_2) = 0.$$

zerfällt in n in der Ebene E_3 des Koordinatendreiflachs liegende Strahlen.

§ 72. Gleichungen zwischen den Koordinaten im Raume.

1. Gleichungen zwischen gemeinen Koordinaten.

Der Inbegriff aller Punkte des Raumes, deren gemeine Koordinaten x, y, z (vgl. § 31, 2) einer Gleichung von der Form:

(1) $$g(x, y, z) = 0$$

genügen, wo $g(x, y, z)$ eine ganze Funktion n^{ten} Grades von x, y, z bedeutet, ist eine *Fläche* (ein Punktfeld) *n^{ter} Ordnung.*

Die Gleichung (1) heißt die

Der Inbegriff aller Ebenen des Raumes, deren gemeine Koordinaten u, v, w (vgl. § 45, **1**) einer Gleichung von der Form:

(1') $$g(u, v, w) = 0$$

genügen, wo $g(u, v, w)$ eine ganze Funktion n^{ten} Grades von u, v, w bedeutet, ist eine *Fläche n^{ter} Klasse* (ein Ebenenbündel n^{ter} Ordnung).

Die Gleichung (1') heißt die

Gleichung der Fläche in laufenden Punktkoordinaten.[122])

Die *Fläche erster Ordnung mit der Gleichung*:

(2) $Ax + By + Cz + D = 0$

(vgl. § 40, (6)) ist die *Ebene*.

Gleichung der Fläche in laufenden Ebenenkoordinaten.[123])

Die *Fläche erster Klasse* (das Ebenenbündel erster Ordnung oder Ebenenbündel schlechthin):

(2′) $Au + Bv + Cw + D = 0$

(vgl. § 45, (5)) ist der *Punkt*.

2. Gleichungen zwischen homogenen gemeinen oder Tetraederkoordinaten. In derselben Weise wie in § 71, 2 gelangen wir zu *den Gleichungen der Fläche in homogenen gemeinen Koordinaten.*

(3) $f(x, y, z, t) = 0$ (3′) $f(u, v, w, s) = 0,$

wo f eine *homogene* ganze Funktion *(Form)* n^{ten} Grades der vier Argumente ist.

Von hier aber leiten, wie in § 71, 4, die Formeln § 57, (1), (4), (6), (10) zu der Definition über:

Eine Fläche n^{ter} Ordnung ist der Inbegriff aller Punkte, deren Tetraederkoordinaten einer Gleichung n^{ten} Grades:

(4) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$

genügen.

Eine Fläche n^{ter} Klasse ist der Inbegriff aller Ebenen, deren Tetraederkoordinaten einer Gleichung n^{ten} Grades:

(4′) $f(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0$

genügen.

3. Zwei und drei Gleichungen zwischen den Koordinaten.

Zwei Gleichungen von der Form (1), (3) oder (4), die eine vom Grade m, die andere vom *Grade n*, geben in laufenden *Punktkoordinaten* die *Raumkurve mn^{ter} Ordnung*, die aus den gemeinsamen Punkten zweier Flächen m^{ter} *und* n^{ter} Ordnung besteht (Schnittkurve, Durchdringungskurve beider Flächen).[127])

Die *Raumkurve erster Ordnung* mit den Gleichungen:

$$(5) \quad \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

ist die *gerade Linie* (gerade Punktreihe; § 43, 3).

Zwei Gleichungen von der Form (1′), (3′) oder (4′), die eine vom Grade m, die andere vom Grade n, geben in laufenden *Ebenenkoordinaten* den *Ebenenbüschel mn^{ter} Klasse*, der aus den gemeinsamen Ebenen zweier Flächen m^{ter} und n^{ter} Klasse besteht (gemeinsame Umhüllende, umbeschriebene Developpable beider Flächen).

Der *Ebenenbüschel erster Klasse* mit den Gleichungen:

$$(5') \quad \begin{cases} A_1 u + B_1 v + C_1 w + D_1 = 0 \\ A_2 u + B_2 v + C_2 w + D_2 = 0 \end{cases}$$

ist die *gerade Linie* (gerader Ebenenbüschel, Ebenenbüschel schlechthin).

Drei Gleichungen l^{ten}, m^{ten} und n^{ten} Grades von der Form (1), (3) oder (4) stellen im allgemeinen eine Gruppe von lmn Punkten des Raumes dar, *die gemeinsamen Punkte dreier Flächen* l^{ter}, m^{ter} *und* n^{ter} *Ordnung.*

Drei *Ebenen* haben im allgemeinen *einen* Punkt gemein (vgl. § 58, 7).

Drei Gleichungen l^{ten}, m^{ten}, n^{ten} Grades von der Form (1'), (3') oder (4') stellen im allgemeinen eine Gruppe von lmn Ebenen des Raumes dar, *die gemeinsamen Ebenen dreier Flächen* l^{ter}, m^{ter} *und* n^{ter} *Klasse.*

Drei *Punkte* haben im allgemeinen *eine* Ebene gemein.

4. Erhaltung der Ordnung und Klasse bei der Transformation der Koordinaten. Führt man in die Gleichungen (3), (3') nach § 50, (1); (2) und in die Gleichungen (4), (4') nach § 63, (8); (12) neue Koordinaten ein, so wird, da in allen Fällen die alten Koordinaten homogene lineare Funktionen der neuen sind, der Grad der Gleichungen in diesen derselbe wie in jenen.[124])

Ordnung und Klasse einer Fläche sind von der Wahl des Koordinatensystems, in bezug auf das sie bestimmt werden, unabhängig (vgl. § 71, 9).

5. Gleichung der gemeinsamen Punkte einer Fläche und einer Ebene oder der gemeinsamen Ebenen einer Fläche und eines Punktes. In bezug auf dasselbe Achsensystem $Oxyz$, auf das sich die Gleichung (3) der Fläche n^{ter} Ordnung bezieht, sei eine beliebige Ebene Π_0 durch einen Punkt $O' = x_0, y_0, z_0$ und zwei von ihm ausgehende rechtwinklige Achsen $x' = a_1, b_1, c_1$ und $y' = a_2, b_2, c_2$ gegeben. Jeder Punkt der Ebene ist in der Parameterdarstellung § 50, (8) enthalten. Soll er auf der Fläche liegen, muß die Bedingung erfüllt sein:

$$(6)\quad f(a_1x' + a_2y' + x_0t',\quad b_1x' + b_2y' + y_0t',\quad c_1x' + c_2y' + z_0t', t') = 0.$$

Mit Rücksicht auf die Bedeutung der Parameter x', y', t' in § 50, 4 ist dies die *Gleichung der Kurve, in der die Fläche* n^{ter} *Ordnung* (3) *von der gegebenen Ebene* Π_0 *geschnitten wird, in laufenden Punktkoordinaten* x', y', t' *in bezug auf das in* Π_0 *liegende Koordinatensystem* $O'x'y'$ (vgl. § 71, (4)).

Unmittelbar aus (3) mit $t = 0$ (vgl. 47, (6)) ergibt sich in:

$$(7)\qquad f(x, y, z, 0) = 0$$

die Gleichung der Kurve, in der die Fläche n^{ter} *Ordnung* (3) *von der unendlich fernen Ebene geschnitten wird, in laufenden Punktkoordinaten* x, y, z *in dieser* (vgl. § 71, (6)).

Wieder in bezug auf $Oxyz$ sei neben der Fläche (3') ein Punkt $O' = x_0, y_0, z_0$ gegeben. Jede Ebene durch den Punkt ist in der Parameterdarstellung § 50, (10) enthalten. Soll sie der Fläche angehören, muß sein:

(6') $$f(u', v', w', -x_0u' - y_0v' - z_0w') = 0.$$

Mit Rücksicht auf die Bedeutung der Parameter $u'\ v'\ w'$ in § 50, **6** ist dies *die Gleichung des Kegels, den die durch den Punkt O' gehenden Ebenen der Fläche n^{ter} Klasse* (3') *bilden, in laufenden Ebenenkoordinaten u', v', w' in bezug auf das dem Bündel des Punktes O' angehörige mit Oxyz parallele System O'x'y'z'* (vgl. § 71, (8')).

Ist ferner ein Ebenenbündel mit unendlich fernem Zentrum durch zwei von O ausgehende Achsen $x' = a_1, b_1, c_1$ und $y' = a_2, b_2, c_2$ gegeben, zu deren Ebene $Ox'y'$ die Ebenen des Bündels senkrecht sein sollen, so erhält man nach § 50, (12) in:

(7') $$f(a_1u' + a_2v',\quad b_1u' + b_2v',\quad c_1u' + c_2v',\quad s') = 0$$

die Gleichung des Zylinders, den die dem Ebenenbündel angehörigen Ebenen der Fläche bilden, in laufenden Ebenenkoordinaten u', v', s' im Bündel in bezug auf das System Ox'y'z' (vgl. § 71, (9')).

In bezug auf das Koordinatentetraeder, auf das sich die Gleichungen (4) und (4') beziehen, folgt mit Benutzung der Parameterdarstellungen § 64, **2** in gleicher Weise:

Die Kurve, in der die Fläche n^{ter} Ordnung:

(8) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_k) = 0$

von der Verbindungsebene dreier gegebenen Punkte $x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, x_k^{(3)}$ geschnitten wird, ist durch die Gleichung:

(9) $f(x_k^{(1)}y_1 + x_k^{(2)}y_2 + x_k^{(3)}y_3) = 0$

in laufenden Dreieckskoordinaten y_1, y_2, y_3 des Punktes der Verbindungsebene dargestellt (vgl. § 71, (7)).

Der Kegel, den die Ebenen der Fläche n^{ter} Klasse:

(8') $f(u_1, u_2, u_3, u_4) = f(u_k) = 0$

am Schnittpunkt dreier gegebenen Ebenen $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, u_k^{(3)}$ bilden, ist durch die Gleichung:

(9') $f(u_k^{(1)}v_1 + u_k^{(2)}v_2 + u_k^{(3)}v_3) = 0$

in laufenden Dreiflachskoordinaten v_1, v_2, v_3 der Ebene des Bündels am Schnittpunkt dargestellt (vgl. § 71, (10')).

6. Erste geometrische Bedeutung der Ordnung und Klasse einer Fläche. Da die Gleichungen (6), (7), (9), sowie (6'), (7'), (9') alle von demselben Grade sind, wie die Gleichungen (3), (4), sowie (3'), (4'), so folgt wie § 71, **13**:[126])

Die Fläche n^{ter} Ordnung hat

Die Fläche n^{ter} Klasse hat mit

mit jeder Ebene eine Kurve n^{ter} Ordnung gemein. | *jedem Bündel einen Kegel n^{ter} Klasse gemein.*

Vorausgesetzt ist hierbei (vgl. 71, **13**) nur, daß die Ebene, bezüglich das Bündel, nicht *ganz* der Fläche angehört.

Verbindet man dieses Resultat mit § 71, **7**, so ergibt sich:

Die Raumkurve mn^{ter} Ordnung in § 72, **3** *hat mit jeder Ebene mn Punkte gemein.* | *Das Ebenenbüschel mn^{ter} Klasse in* § 72, **3** *hat mit jedem Bündel mn Ebenen gemein.*

7. Gleichung der gemeinsamen Punkte oder Ebenen einer Fläche und einer Geraden. In bezug auf dasselbe Achsensystem $Oxyz$, auf das sich die Gleichung (3) bezieht, sei eine beliebige Gerade p_0 durch einen Punkt $O' = x_0, y_0, z_0$ und ihre Richtungskosinus a_1, b_1, c_1 gegeben. Jeder Punkt der Geraden ist in der Parameterdarstellung § 50, (14) enthalten; soll er auf der Fläche (3) liegen, muß sein:

$$f(a_1 x' + x_0 t', \quad b_1 x' + y_0 t', \quad c_1 x' + z_0 t', \quad t') = 0. \tag{10}$$

Mit Rücksicht auf die Bedeutung der Parameter x', t' in § 50, **10** ist dies *die Gleichung der Gruppe der Schnittpunkte der Fläche n^{ter} Ordnung* (3) *mit der gegebenen Geraden p_0 in gemeinen Koordinaten auf dieser* (vgl. § 70, (4)).

Ebenso ist nach § 50, (15), wenn a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 die Richtungskosinus zweier rechtwinkligen, von O ausgehenden Achsen x' und y' sind:

$$f(a_1 x' + a_2 y', \quad b_1 x' + b_2 y', \quad c_1 x' + c_2 y', \; 0) = 0 \tag{11}$$

die Gleichung der Gruppe der Schnittpunkte der Fläche (3) *mit der unendlich fernen Geraden der Ebene $Ox'y'$ in gemeinen Koordinaten auf dieser Geraden* (vgl. § 70, (5)).

Ist ein rechtwinkliges Achsensystem $O'x'y'z'$ durch die Richtungskosinus a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 der Achsen x' und y' gegeben, so sind alle durch die z'-Achse gehenden Ebenen in der Parameterdarstellung § 50, (16) enthalten. Daher ist:

$$f(a_1 u' + a_2 v', \quad b_1 u' + b_2 v', \quad c_1 u' + c_2 v', \quad x_0' u' + y_0' v') = 0 \tag{10'}$$

mit der dortigen Bedeutung von u', v'; x_0', y_0' *die Gleichung der Gruppe von Ebenen, die die Fläche n^{ter} Klasse* (3') *mit dem Ebenenbüschel der Achse z' gemein hat, in gemeinen Koordinaten u', v' im Büschel* (vgl. § 70, (8)).

Sind a_1, b_1, c_1 die Stellungskosinus eines Büschels von Parallelebenen, so ist nach § 50, (17):

$$f(a_1 t', \quad b_1 t', \quad c_1 t', \quad -x') = 0 \tag{11'}$$

die Gleichung der Gruppe von Ebenen der Fläche n^{ter} Klasse (3'), *die eine gegebene Stellung haben, in gemeinen Koordinaten x', t' im Parallelebenenbüschel* (vgl. § 70, (9)).

In bezug auf das Koordinatentetraeder, auf das sich die Gleichungen (4) und (4') beziehen, folgt endlich mit Benutzung der Parameterdarstellung § 64, **4**:

Die Gruppe der Punkte, die die Fläche n^{ter} Ordnung:

$$(12) \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_k) = 0$$

mit der Verbindungslinie zweier gegebenen Punkte $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$ gemein hat, ist durch die Gleichung:

$$(13) \quad f(x_k^{(1)} y_1 + x_k^{(2)} y_2) = 0$$

in Zweieckskoordinaten y_1, y_2 auf der Verbindungslinie dargestellt (vgl. § 70, (10)).

Die Gruppe der Ebenen, die die Fläche n^{ter} Klasse:

$$(12') \quad f(u_1, u_2, u_3, u_4) = f(u_k) = 0$$

mit der Schnittlinie zweier gegebenen Ebenen $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$ gemein hat, ist durch die Gleichung:

$$(13') \quad f(u_k^{(1)} v_1 + u_k^{(2)} v_2) = 0$$

in Zweiflachskoordinaten v_1, v_2 im Ebenenbüschel der Schnittlinie dargestellt (vgl. § 70, (11)).

8. Zweite geometrische Bedeutung der Ordnung und Klasse der Fläche (vgl. § 72, **6**). Da die Gleichungen (10), (11), (13) und (10'), (11'), (13') alle von demselben Grade sind, wie die Gleichungen (3), (4) und (3'), (4'), so folgt:

Die Fläche n^{ter} Ordnung hat mit jeder geraden Punktreihe n Punkte gemein.

Die Fläche n^{ter} Klasse hat mit jedem geraden Ebenenbüschel n Ebenen gemein.

Vorausgesetzt ist hierbei (vgl. § 71, **13**) nur, daß die Punktreihe, bezüglich der Ebenenbüschel, nicht *ganz* der Fläche angehört.

9. Unvollständige Gleichungen mit drei Punkt- oder Ebenenkoordinaten.

Fehlt in der Gleichung (3) der Fläche n^{ter} Ordnung die Koordinate z, so wird die Gleichung reihenweise von solchen Punkten $P = x, y, z, t$; $P' = x, y, z', t$; $P'' = x, y, z'', t$; ... erfüllt (Fig. 340a), die bei wechselnden Werten von z dieselben Werte x, y, t haben. Solche Punkte aber liegen nach § 31, **4** alle auf *einer* Geraden p, derjenigen, die im Strahlbüschel der zur z-Achse

Fehlt in der Gleichung (3') der Fläche n^{ter} Klasse die Koordinate w, so wird die Gleichung büschelweise von solchen Ebenen $\Pi = u, v, w, s$; $\Pi' = u, v, w', s$; $\Pi'' = u, v, w'', s$; ... erfüllt (Fig. 340b), die bei wechselnden Werten von w dieselben Werte u, v, s haben. Solche Ebenen aber gehen nach § 45, **1** alle durch *eine* Gerade p, diejenige, die im Strahlfeld aller in der xy-Ebene liegen-

parallelen Strahlen *die Koordinaten* x, y, t *im Bündel,* und deren Schnitt-

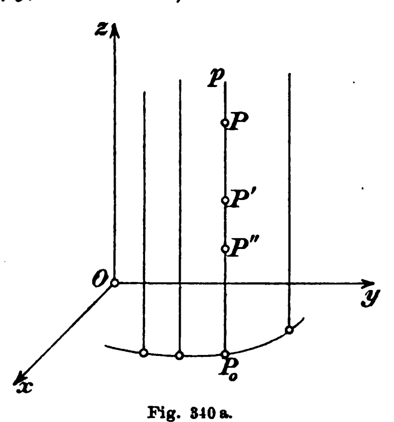
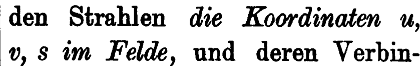


Fig. 340 a.

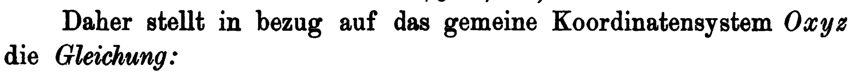
punkt P_0 mit der xy-Ebene *in dieser die Koordinaten* x, y, t hat (vgl. § 49, **11**).



den Strahlen *die Koordinaten* u, v, s *im Felde,* und deren Verbin-

Fig. 340 b.

dungsebene Π_0 mit dem unendlich fernen Punkt der z-Achse *im Bündel die Koordinaten* u, v, s hat (vgl. § 49, **10**).



Daher stellt in bezug auf das gemeine Koordinatensystem $Oxyz$ die *Gleichung:*

(14) $\quad f(x, y, t) = 0$

in laufenden *Punktkoordinaten im Raume* denselben der z-Achse parallelen *Zylinder* n^{ter} *Ordnung* dar, der in laufenden *Strahlenkoordinaten im Bündel* durch die Gleichung § 71, (9) und dessen „*Leitkurve*" n^{ter} *Ordnung* in laufenden *Punktkoordinaten in der Ebene* durch die Gleichung § 71, (4) dargestellt wird.

In laufenden *Punktkoordinaten im Raume* wird die *Leitkurve* n^{ter} *Ordnung* durch die *zwei* Gleichungen:

(15) $\quad f(x, y, t) = 0, \quad z = 0$

ausgedrückt (§ 47, (18)).

(14') $\quad f(u, v, s) = 0$

in laufenden *Ebenenkoordinaten im Raume* dieselbe in der xy-Ebene liegende *Kurve* n^{ter} *Klasse* dar, die in laufenden *Strahlenkoordinaten in der Ebene* durch die Gleichung § 71, (4') und deren „*Leitzylinder*" n^{ter} *Klasse* in laufenden *Ebenenkoordinaten im Bündel* durch die Gleichung § 71, (9') dargestellt wird.

In laufenden *Ebenenkoordinaten im Raume* wird der *Leitzylinder* n^{ter} *Klasse* durch die *zwei* Gleichungen:

(15') $\quad f(u, v, s) = 0, \quad w = 0$

ausgedrückt (§ 47, (21)).

Nach demselben Verfahren erhält man nun die folgenden auf das gemeine Koordinatensystem $Oxyz$ bezüglichen Sätze:

Die Gleichung:

(16) $f(x, y, z) = 0$

gibt in laufenden *Punktkoordinaten im Raume* denselben *Kegel n^{ter} Ordnung* mit der Spitze O,[128]) der in laufenden *Strahlenkoordinaten im Bündel* durch die Gleichung § 71, (8) und dessen „*Leitkurve*“ n^{ter} *Ordnung* in laufenden *Punktkoordinaten in der unendlich fernen Ebene* durch die Gleichung § 71, (6) dargestellt wird.

In laufenden *Punktkoordinaten im Raume* wird die *Leitkurve n^{ter} Ordnung* durch die *zwei* Gleichungen:

(17) $f(x, y, z) = 0, \quad t = 0$

ausgedrückt.

(16′) $f(u, v, w) = 0$

gibt in laufenden *Ebenenkoordinaten im Raume* dieselbe *unendlich ferne Kurve n^{ter} Klasse*, die in laufenden *Strahlenkoordinaten in der unendlich fernen Ebene* durch die Gleichung § 71, (6′) und deren „*Leitkegel*“ n^{ter} *Klasse* in laufenden *Ebenenkoordinaten im Bündel* durch die Gleichung § 71, (8′) dargestellt wird.

In laufenden *Ebenenkoordinaten im Raume* wird der *Leitkegel n^{ter} Klasse* durch die *zwei* Gleichungen:

(17′) $f(u, v, w) = 0, \quad s = 0$

ausgedrückt.

Endlich stellt mit bezug auf das Koordinatentetraeder *die Gleichung:*

(18) $f(x_1, x_2, x_3) = 0$

in laufenden *Punktkoordinaten im Raume* denselben *Kegel n^{ter} Ordnung* mit der Spitze E_4 dar, der in laufenden *Strahlenkoordinaten im Bündel* E_4 durch die Gleichung § 71, (10) und dessen *Leitkurve n^{ter} Ordnung* in laufenden *Punktkoordinaten in der Ebene* E_4 durch die Gleichung § 71, (7) dargestellt wird (§ 57, **15**).

In laufenden *Punktkoordinaten im Raume* wird die *Leitkurve n^{ter} Ordnung* durch die *zwei* Gleichungen:

(19) $f(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad x_4 = 0$

ausgedrückt (§ 57, **16**).

(18′) $f(u_1, u_2, u_3) = 0$

in laufenden *Ebenenkoordinaten im Raume* dieselbe *Kurve n^{ter} Klasse* in der Ebene E_4 dar,[129]) die in laufenden *Strahlenkoordinaten in der Ebene* E_4 durch die Gleichung § 71, (7′) und deren *Leitkegel n^{ter} Klasse* in laufenden *Ebenenkoordinaten im Bündel* E_4 durch die Gleichung § 71, (10′) dargestellt wird.

In laufenden *Ebenenkoordinaten im Raume* wird der *Leitkegel n^{ter} Klasse* durch die *zwei* Gleichungen:

(19′) $f(u_1, u_2, u_3) = 0, \quad u_4 = 0$

ausgedrückt.

10. Unvollständige Gleichungen mit zwei Punkt- oder Ebenenkoordinaten. Enthält die Gleichung der Fläche n^{ter} Ordnung oder n^{ter} Klasse nur zwei der vier Koordinaten, so zerfällt sie in n in diesen

homogene lineare Faktoren (vgl. § 71, **14**) und stellt daher nach § 40, **5**; § 47, (8); § 58, **3** eine *Gruppe von n Ebenen in laufenden Punktkoordinaten* oder eine *Gruppe von n Punkten in laufenden Ebenenkoordinaten* dar. Daher gilt in bezug auf das gemeine Koordinatensystem $Oxyz$:

Die Fläche n^{ter} Ordnung:

(20) $f(x, y) = 0$ oder $f(x, t) = 0$

zerfällt in n Ebenen, die durch die z-Achse gehen oder bezüglich der yz-Ebene parallel sind.

Die Fläche n^{ter} Klasse:

(20′) $f(u, v) = 0$ oder $f(u, s) = 0$

zerfällt in n Punkte, die auf der unendlich fernen Geraden der xy-Ebene oder bezüglich auf der x-Achse liegen.

Ebenso gilt in bezug auf das Koordinatentetraeder (vgl. § 57, Fig. 303):

Die Fläche n^{ter} Ordnung:

(21) $f(x_2, x_3) = 0$

zerfällt in n Ebenen, die durch die Kante ε_{23} gehen.

Die Fläche n^{ter} Klasse:

(21′) $f(u_2, u_3) = 0$

zerfällt in n Punkte, die auf der Kante e_{23} liegen.

11. Gleichungen zwischen Linienkoordinaten im Raume. Der Inbegriff der ∞^3 geraden Linien des Raumes, deren Strahlenkoordinaten (vgl. § 59, **1**) der Gleichung:

$$(22) \qquad f(p_k) = f(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) = 0,$$

genügen, wo f eine homogene ganze Funktion n^{ten} Grades der n Argumente ist, heißt ein *Linien- oder Strahlenkomplex n^{ten} Grades* (§ 60, (12)).

Erfüllen die *Strahlen*koordinaten einer Geraden die Gleichung (22), so erfüllen die *Achsen*koordinaten nach § 59, (7); (8) die Gleichung:

$$(22') \qquad f(q_{\bar{k}}) = f(q_4, q_5, q_6, q_1, q_2, q_3) = 0$$

und umgekehrt, so daß beide Gleichungen denselben Komplex darstellen.

Nach § 63, (19) und (19′) ist der *Grad* des Komplexes *vom Koordinatensystem unabhängig* (vgl. § 72, **4**).

Die ∞^2 Geraden, die *zwei* Gleichungen von der Form (22) oder (22′) genügen, bilden eine *Linienkongruenz* oder ein *Strahlensystem;* die ∞^1 Geraden, die *drei* Gleichungen von der Form (22) und (22′) genügen, bilden eine *Linienfläche* (§ 60, **3**).

12. Gemeinsame Gerade eines Komplexes und eines Strahlfeldes oder Strahlbündels. Jeder Strahl eines Strahlfeldes ist in der Parameterdarstellung § 64, (2) enthalten. Soll er dem Komplex (22) angehören, muß die Bedingung:

$$f\,(p_k^{(1)} v_1 + p_k^{(2)} v_2 + p_k^{(3)} v_3) = 0$$

bestehen. Mit Rücksicht auf die Bedeutung der Parameter in § 64, **3** und unter Hinzufügung des dualen Satzes folgt daher:

Die Strahlen des Komplexes n^{ten} Grades (22), *die einem durch drei Strahlen $p_k^{(1)}$, $p_k^{(2)}$, $p_k^{(3)}$ gegebenen Strahlfeld angehören, bilden eine Kurve n^{ter} Klasse (Komplexkurve), deren Gleichung in laufenden Linienkoordinaten v_1, v_2, v_3 im Felde in bezug auf das Koordinatendreiseit $p_k^{(1)}$, $p_k^{(2)}$, $p_k^{(3)}$ lautet* (§ 71, (7′)):

$$(23)\quad f(p_k^{(1)} v_1 + p_k^{(2)} v_2 + p_k^{(3)} v_3) = 0.$$

Die Strahlen des Komplexes n^{ten} Grades (22′), *die einem durch drei Strahlen $q_k^{(1)}$, $q_k^{(2)}$, $q_k^{(3)}$ gegebenen Strahlbündel angehören, bilden einen Kegel n^{ter} Ordnung (Komplexkegel), dessen Gleichung in laufenden Strahlenkoordinaten y_1, y_2, y_3 im Bündel in bezug auf das Dreikant $q_k^{(1)}$, $q_k^{(2)}$, $q_k^{(3)}$ lautet* (§ 71, (10)):

$$(23')\quad f(q_{\bar{k}}^{(1)} y_1 + q_{\bar{k}}^{(2)} y_2 + q_{\bar{k}}^{(3)} y_3) = 0.$$

Hierbei sind p_k und $q_{\bar{k}}$ als *Tetraeder*koordinaten der Linie gedacht. In derselben Weise können aber auch, wenn p_k und $q_{\bar{k}}$ *gemeine* Koordinaten der Linie sind (vgl. § 48, **5**), mittels der Parameterdarstellungen § 50, **5**; **7**; **9** die Gleichungen der Komplexkurve und des Komplexkegels erhalten werden.[130])

13. Komplexgleichung des Kegels n^{ter} Klasse und der ebenen Kurve n^{ter} Ordnung.

Fehlen in der Gleichung (22) des Komplexes die Koordinaten p_4, p_5, p_6, so wird die Gleichung zunächst erfüllt durch alle Strahlen $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$, die durch die Ecke E_4 des Koordinatentetraeders gehen (vgl. § 59, **10**), weiter aber ebenenweise durch solche Strahlen, die bei wechselnden Werten von p_4, p_5, p_6 dieselben Koordinaten p_1, p_2, p_3 haben. Solche Strahlen liegen nach § 59, **9** und § 56, **10** alle in einer Ebene Π, derjenigen, die im Ebenenbündel E_4 die Dreiflachskoordinaten $u_1 : u_2 : u_3 = p_1 : p_2 : p_3$ hat.

Daher stellt die Gleichung:

$$(24)\qquad f(p_1, p_2, p_3) = 0$$

in laufenden Strahlenkoordinaten im

Fehlen in der Gleichung (22′) des Komplexes die Koordinaten q_4, q_5, q_6, so wird die Gleichung zunächst erfüllt durch alle Strahlen $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0$, die in der Ebene E_4 des Koordinatentetraeders liegen (vgl. § 59, **10**), weiter aber bündelweise durch solche Strahlen, die bei wechselnden Werten von q_4, q_5, q_6 dieselben Koordinaten q_1, q_2, q_3 haben. Solche Strahlen gehen nach § 59, **9** und § 56, **10** alle durch einen Punkt P, denjenigen, der im Punktfeld E_4 die Dreieckskoordinaten $x_1 : x_2 : x_3 = q_1 : q_2 : q_3$ hat.

Daher stellt die Gleichung:

$$(24')\qquad f(q_1, q_2, q_3) = 0$$

in laufenden Achsenkoordinaten im

Raume denselben Kegel n^{ter} Klasse mit der Spitze E_4 dar, der (vgl. § 71, (10′)) *in laufenden Ebenenkoordinaten im Bündel E_4 die Gleichung hat:*

$$(25)\qquad f(u_1, u_2, u_3) = 0.$$

Der Gleichung (24) wird durch alle die ∞^3 Strahlen genügt, die in irgend einer Ebene des Kegels liegen; sie heißt die *Komplexgleichung des Kegels n^{ter} Klasse.*

Raume dieselbe Kurve n^{ter} Ordnung in der Ebene E_4 dar, die (vgl. § 71, (7)) *in laufenden Punktkoordinaten in der Ebene E_4 die Gleichung hat:*

$$(25')\qquad f(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Der Gleichung (24′) wird durch alle die ∞^3 Strahlen genügt, die durch irgend einen Punkt der Kurve gehen; sie heißt die *Komplexgleichung der ebenen Kurve n^{ter} Ordnung.*

14. Linienflächengleichungen der Kurve n^{ter} Klasse und des Kegels n^{ter} Ordnung.

Da nach § 59, **10** für einen in der Ebene E_4 liegenden Strahl p_4, p_5, p_6 verschwinden und $p_1 : p_2 : p_3 = u_1 : u_2 : u_3$ die Dreieckskoordinaten in der Ebene E_4 sind, so folgt mit Rücksicht auf § 71, (7′):

Die vier Gleichungen:

$$(26)\quad \begin{cases} f(p_1, p_2, p_3) = 0, \\ p_4 = 0, \quad p_5 = 0, \quad p_6 = 0 \end{cases}$$

stellen in laufenden Strahlenkoordinaten im Raume die Kurve n^{ter} Klasse § 71, (7′) *dar.*

Da nach § 59, **10** für einen durch die Ecke E_4 gehenden Strahl q_4, q_5, q_6 verschwinden und $q_1 : q_2 : q_3 = x_1 : x_2 : x_3$ die Dreiflachskoordinaten im Bündel E_4 sind, so folgt mit Rücksicht auf § 71, (10):

Die vier Gleichungen:

$$(26')\quad \begin{cases} f(q_1, q_2, q_3) = 0, \\ q_4 = 0, \quad q_5 = 0, \quad q_6 = 0 \end{cases}$$

stellen in laufenden Achsenkoordinaten im Raume den Kegel n^{ter} Ordnung § 71, (10) *dar.*

Die vier Gleichungen sind, da eine von den drei letzten wegen der Identität § 59, **2** überzählig ist, als die *drei Gleichungen einer Linienfläche* (vgl. § 72, **11**) zu betrachten.

Die Gleichungen (26) werden erfüllt durch die ∞^1 Strahlen der Kurve n^{ter} Klasse (vgl. § 71, Fig. 338 b).

Die Gleichungen (26′) werden erfüllt durch die ∞^1 Strahlen des Kegels n^{ter} Ordnung.

Anmerkung 1.

Determinanten zweiten, dritten und vierten Grades.

I. **Die Determinante zweiten Grades und ihre Unterdeterminanten.**

1. *Bezeichnung und Bedeutung der Determinante:*

$$A = |\, a_{kl}\,| = |\, a_{11} a_{22}\,| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}. \tag{1}$$

2. *Bezeichnung der Unterdeterminanten:*

$$\begin{cases} A_{11} = a_{22}, & A_{12} = -a_{21}, \\ A_{21} = -a_{12}, & A_{22} = a_{11}. \end{cases} \tag{2}$$

3. *Die Determinante der Unterdeterminanten:*

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A. \tag{3}$$

4. *Entwicklung nach Unterdeterminanten:* Wenn $k = 1$ oder 2 und $l = 1$ oder 2, ist:

$$\begin{cases} a_{k1} A_{l1} + a_{k2} A_{l2} = \begin{cases} A & \text{für } l = k, \\ 0 & \text{„ } l \neq k, \end{cases} \\ a_{1k} A_{1l} + a_{2k} A_{2l} = \begin{cases} A & \text{„ } l = k, \\ 0 & \text{„ } l \neq k. \end{cases} \end{cases} \tag{4}$$

5. *Verschwinden der Determinante:* Wenn A verschwindet, ist:

$$A_{11} : A_{12} = A_{21} : A_{22}, \tag{5}$$

$$a_{11} : a_{12} = a_{21} : a_{22}. \tag{6}$$

II. **Die Determinante dritten Grades und ihre Unterdeterminanten.**

1. *Bezeichnung und Bedeutung der Determinante:*

$$A = |\, a_{kl}\,| = |\, a_{11} a_{22} a_{33}\,| = \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

2. *Bezeichnung der Unterdeterminanten:* Die neun Unterdeterminanten zweiten Grades sind:

$$A_{kl} = \begin{vmatrix} a_{k_1 l_1} & a_{k_1 l_2} \\ a_{k_2 l_1} & a_{k_2 l_2} \end{vmatrix}, \tag{2}$$

wo die Indizestripel $k.k_1k_2$ und $l.l_1l_2$ unabhängig voneinander je die drei geraden Permutationen:

$$1.23, \quad 2.31, \quad 3.12 \tag{3}$$

durchlaufen, z. B.

$$A_{12} = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}, \quad A_{23} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

3. *Determinanten aus Unterdeterminanten:*

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = A^2, \tag{4}$$

$$\mathfrak{A}_{kl} = \begin{vmatrix} A_{k_1 l_1} & A_{k_1 l_2} \\ A_{k_2 l_1} & A_{k_2 l_2} \end{vmatrix} = A a_{kl} \tag{5}$$

mit der Bedeutung (3) von $k.k_1k_2$ und $l.l_1l_2$.

4. *Entwicklung nach Unterdeterminanten.* Wenn k und l die Werte 1, 2 oder 3 haben, ist:

$$\begin{cases} a_{k1}A_{l1} + a_{k2}A_{l2} + a_{k3}A_{l3} = \begin{cases} A & \text{für } l = k, \\ 0 & \text{„ } l \neq k, \end{cases} \\ a_{1k}A_{1l} + a_{2k}A_{2l} + a_{3k}A_{3l} = \begin{cases} A & \text{„ } l = k, \\ 0 & \text{„ } l \neq k. \end{cases} \end{cases} \tag{6}$$

5. *Verschwinden der Determinante.* Wenn A verschwindet, ist nach (5):

$$\begin{cases} A_{11} : A_{12} : A_{13} = A_{21} : A_{22} : A_{23} = A_{31} : A_{32} : A_{33}, \\ A_{11} : A_{21} : A_{31} = A_{12} : A_{22} : A_{32} = A_{13} : A_{23} : A_{33}; \end{cases} \tag{7}$$

wenn alle neun A_{kl} verschwinden, ist nach (2):

$$\begin{cases} a_{11} : a_{12} : a_{13} = a_{21} : a_{22} : a_{23} = a_{31} : a_{32} : a_{33}, \\ a_{11} : a_{21} : a_{31} = a_{12} : a_{22} : a_{32} = a_{13} : a_{23} : a_{33}. \end{cases} \tag{8}$$

6. *Verschwinden einer „Matrix“.* Die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

bedeutet das Verschwinden aller Unterdeterminanten:

$$A_{31} = 0, \quad A_{32} = 0, \quad A_{33} = 0. \tag{10}$$

III. Die Determinante vierten Grades und ihre Unterdeterminanten.

1. *Bezeichnung und Bedeutung der Determinante:*

$$(1)\qquad A = |a_{kl}| = |a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}| =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{array}{l} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \\ - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} \\ + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} - a_{13}a_{22}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} \\ - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} \end{array}$$

$$+ a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$$
$$- a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$$
$$+ a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}.$$

Vgl. *Baltzer*, Determinanten, 4. Aufl., S. 7; *E. Pascal*, Die Determinanten, deutsch von *Leitzmann* (Sammlung *Teubner*, Bd. III), S. 1—3.

2. *Bezeichnung der Unterdeterminanten.* Die sechszehn Unterdeterminaten dritten Grades sind:

$$(2)\qquad A_{kl} = \begin{vmatrix} a_{k_1l_1} & a_{k_1l_2} & a_{k_1l_3} \\ a_{k_2l_1} & a_{k_2l_2} & a_{k_2l_3} \\ a_{k_3l_1} & a_{k_3l_2} & a_{k_3l_3} \end{vmatrix},$$

wo die Indizesquadrupel $k.k_1k_2k_3$ und $l.l_1l_2l_3$ unabhängig voneinander je die vier geraden Permutationen:

$$(3)\qquad 1.234,\quad 2.314,\quad 3.124,\quad 4.321$$

durchlaufen.

Die sechsunddreißig Unterdeterminanten zweiten Grades sind:

$$(4)\qquad \alpha_{kl} = \alpha_{k_1k_2,\, l_1l_2} = \begin{vmatrix} a_{k_1l_1} & a_{k_1l_2} \\ a_{k_2l_1} & a_{k_2l_2} \end{vmatrix},$$

wo die Indizespaare k_1k_2 und l_1l_2 unabhängig voneinander die sechs Variationen zweiten Grades:

$$(5)\qquad 23,\quad 31,\quad 12,\quad 14,\quad 24,\quad 34$$

durchlaufen, die wir bezüglich mit den einfachen Nummern:

$$(6)\qquad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6 \qquad (k, l)$$

bezeichnen. Z. B. ist:

$$\alpha_{25} = \alpha_{31,\,24} = \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{12} & a_{14} \end{vmatrix};$$

vgl. *Baltzer*, S. 9; 10; *Pascal*, S. 11—13.

3. *Determinanten aus Unterdeterminanten:*

$$(7)\qquad \mathfrak{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} = A^3;$$

$$(8)\qquad \mathfrak{A}_{kl} = \begin{vmatrix} A_{k_1 l_1} & A_{k_1 l_2} & A_{k_1 l_3} \\ A_{k_2 l_1} & A_{k_2 l_2} & A_{k_2 l_3} \\ A_{k_3 l_1} & A_{k_3 l_2} & A_{k_3 l_3} \end{vmatrix} = A^2 a_{kl}.$$

mit der Bedeutung (3) von $k.k_1k_2k_3$ und $l.l_1l_2l_3$;

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} A_{k_1 l_1} & A_{k_1 l_2} \\ A_{k_2 l_1} & A_{k_2 l_2} \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} a_{k_3 l_3} & a_{k_3 l_4} \\ a_{k_4 l_3} & a_{k_4 l_4} \end{vmatrix},$$

wo die Indizesquadrupel $k_1k_2.k_3k_4$ und $l_1l_2.l_3l_4$ unabhängig voneinander die sechs geraden Permutationen durchlaufen:

(10) 23.14, 31.24, 12.34, 14.23, 24.31, 34.12.

Ist k_1k_2 die k^{te} und l_1l_2 die l^{te} Variation der Reihe (5) und bezeichnen $\bar{k}$ *und* $\bar{l}$ *die komplementären Variationen zu* k *und* l, d. h. enthalten k und $\bar{k}$ je zusammen alle vier Indizes 1, 2, 3, 4, so kann man die Formel (9) auch schreiben:

$$(11)\qquad \mathsf{A}_{kl} = A\alpha_{\bar{k}\bar{l}},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist, wie in (4):

$$(12)\qquad \mathsf{A}_{kl} = \mathsf{A}_{k_1k_2,\,l_1l_2} = \begin{vmatrix} A_{k_1 l_1} & A_{k_1 l_2} \\ A_{k_2 l_1} & A_{k_2 l_2} \end{vmatrix}.$$

Es ist also beispielsweise, da nach (5) und (6): $\bar{2} = 5$, $\bar{3} = 6$:

$$\mathsf{A}_{23} = A\alpha_{56} \quad \text{oder} \quad \mathsf{A}_{31,12} = A\alpha_{24,34} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} \\ A_{11} & A_{12} \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix};$$

(vgl. *Baltzer*, S. 58; *Pascal*, S. 32; 34; einige von den Formeln (11) bei *Plücker*, System (1846), S. 57, Formeln IX).

Die *Determinante sechsten Grades* A (über Begriff und Bezeichnung der Determinanten 5. und 6. Grades vgl. *Baltzer*, Det. S. 6) aus den 36 Unterdeterminanten α_{kl}, die wir durch ihr Diagonalglied, wie in (1), bezeichnen, hat den Wert:

$$(13)\qquad \mathsf{A} = |\,\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{44}\alpha_{55}\alpha_{66}\,| = A^3;$$

ferner ist, ebenfalls unter Bezeichnung der Determinante durch ihr Diagonalglied, die *Determinante fünften Grades:*

$$(14)\qquad |\alpha_{k_1 l_1}\alpha_{k_2 l_2}\alpha_{k_3 l_3}\alpha_{k_4 l_4}\alpha_{k_5 l_5}| = A^2 \alpha_{\bar{k}_6 \bar{l}_6},$$

wo $k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 . k_6$ und $l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 . l_6$ zwei Permutationen gleichen Charakters (beide gerade oder beide ungerade) der sechs Zahlen (6) und $\bar{k}_6$, $\bar{l}_6$ die komplementären Variationen (5) zu k_6, l_6 sind, z. B. $k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 . k_6 = 23456.1$, $l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 . l_6 = 31456.2$; $\bar{k}_6 = 4$, $\bar{l}_6 = 5$.

Weiter ist die *Determinante vierten Grades:*

$$(15)\qquad |\alpha_{k_1 l_1}\alpha_{k_2 l_2}\alpha_{k_3 l_3}\alpha_{k_4 l_4}| = A\,|\alpha_{\bar{k}_5 \bar{l}_5}\alpha_{\bar{k}_6 \bar{l}_6}|,$$

wo $k_1 k_2 k_3 k_4 . k_5 k_6$ und $l_1 l_2 l_3 l_4 . l_5 l_6$ zwei Permutationen gleichen Charakters der sechs Zahlen (6) und $\bar{k}_5 \bar{k}_6$ und $\bar{l}_5 \bar{l}_6$ die komplementären Variationen (5) zu $k_5 k_6$ und $l_5 l_6$ sind, z. B. $k_1 k_2 k_3 k_4 . k_5 k_6 = 1234.56$, $l_1 l_2 l_3 l_4 . l_5 l_6 = 3456.12$; $\bar{k}_5 \bar{k}_6 = 23$, $\bar{l}_5 \bar{l}_6 = 45$.

Endlich ist die *Determinante dritten Grades:*

$$(16)\qquad |\alpha_{k_1 l_1}\alpha_{k_2 l_2}\alpha_{k_3 l_3}| = |\alpha_{\bar{k}_4 \bar{l}_4}\alpha_{\bar{k}_5 \bar{l}_5}\alpha_{\bar{k}_6 \bar{l}_6}|,$$

wo $k_1 k_2 k_3 . k_4 k_5 k_6$ und $l_1 l_2 l_3 . l_4 l_5 l_6$ zwei Permutationen gleichen Charakters der sechs Zahlen (6) und $\bar{k}_4 \bar{k}_5 \bar{k}_6$ und $\bar{l}_4 \bar{l}_5 \bar{l}_6$ die komplementären Variationen (5) zu $k_4 k_5 k_6$ und $l_4 l_5 l_6$ sind, z. B. $k_1 k_2 k_3 \cdot k_4 k_5 k_6 = 156.234$, $l_1 l_2 l_3 . l_4 l_5 l_6 = 456.321$; $\bar{k}_4 \bar{k}_5 \bar{k}_6 = 561$, $\bar{l}_4 \bar{l}_5 \bar{l}_6 = 654$; vgl. *Baltzer*, S. 62; 63; *Pascal*, S. 87—91; *Franke*, J. f. Math. **61** (1863), S. 355.

4. *Entwicklung nach Unterdeterminanten.* Die Entwicklungen nach Unterdeterminanten ersten und dritten Grades sind mit $k, l = 1, 2, 3, 4$:

$$(17)\qquad \sum_1^4{}^m a_{km} A_{lm} = \begin{cases} A & \text{für } l = k, \\ 0 & \text{„ } l \neq k, \end{cases} \qquad \sum_1^4{}^m a_{mk} A_{ml} = \begin{cases} A & \text{für } l = k, \\ 0 & \text{„ } l \neq k, \end{cases}$$

die Entwicklungen nach Unterdeterminanten zweiten Grades sind mit $k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$:

$$(18)\qquad \sum_1^6{}^m \alpha_{km} \mathsf{A}_{lm} = \begin{cases} A^2 & \text{für } l = k, \\ 0 & \text{„ } l \neq k, \end{cases} \qquad \sum_1^6{}^m \alpha_{mk} \mathsf{A}_{ml} = \begin{cases} A^2 & \text{für } l = k, \\ 0 & \text{„ } l \neq k, \end{cases}$$

oder auch nach (11):

$$(19)\qquad \sum_1^6{}^m \alpha_{km} \alpha_{\bar{l}\bar{m}} = \begin{cases} A & \text{für } l = \bar{k}, \\ 0 & \text{„ } l \neq \bar{k}, \end{cases} \qquad \sum_1^6{}^m \alpha_{mk} \alpha_{\bar{m}\bar{l}} = \begin{cases} A & \text{für } l = \bar{k}, \\ 0 & \text{„ } l \neq \bar{k}, \end{cases}$$

Unter den 36 *sechsgliedrigen* Formeln jeder der beiden Gruppen (19) finden sich sechs solche vor, die sich wegen paarweise gleicher Glieder auf *dreigliedrige* reduzieren, nämlich für $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$:

$$(20) \qquad \sum_1^3{}^m \alpha_{km}\alpha_{k\overline{m}} = 0, \qquad \sum_1^3{}^m \alpha_{mk}\alpha_{\overline{m}k} = 0;$$

vgl. *Baltzer*, S. 13; 29; 30; *Pascal*, S. 17—19.

5. *Verschwinden der Determinante. Wenn A verschwindet*, verschwinden nach (9) alle aus den A_{kl} gebildeten Determinanten zweiten Grades, so daß:

$$(21) \qquad \begin{vmatrix} A_{k_1 l_1} & A_{k_1 l_2} \\ A_{k_2 l_1} & A_{k_2 l_2} \end{vmatrix} = 0,$$

wo k_1, k_2 und l_1, l_2 je zwei verschiedene der Zahlen 1, 2, 3, 4 sind (vgl. *Baltzer*, S. 20).

Wenn alle A_{kl} verschwinden, verschwinden alle aus den α_{kl} gebildeten Determinanten zweiten Grades, so daß:

$$(22) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{k_1 l_1} & \alpha_{k_1 l_2} \\ \alpha_{k_2 l_1} & \alpha_{k_2 l_2} \end{vmatrix} = 0,$$

wo k_1, k_2 und l_1, l_2 je zwei verschiedene der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 sind (vgl. *G. Frobenius*, J. f. Math. 82 (1877), S. 240).

Wenn alle α_{kl} verschwinden, so verschwinden nach (4) alle aus den a_{kl} gebildeten Unterdeterminanten zweiten Grades, so daß:

$$(23) \qquad \begin{vmatrix} a_{k_1 l_1} & a_{k_1 l_2} \\ a_{k_2 l_1} & a_{k_2 l_2} \end{vmatrix} = 0,$$

wo k_1, k_2 und l_1, l_2 je zwei verschiedene der Zahlen 1, 2, 3, 4 sind.

6. *Verschwinden einer „Matrix"*. Die Gleichungen:

$$(24) \begin{Vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{Vmatrix} = 0; \qquad (25) \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{Vmatrix} = 0$$

bedeuten das Verschwinden aller Unterdeterminanten beziehungsweise:

$$(26) \quad \alpha_{1l} = 0 \quad (l = 1, 2, 3, 4, 5, 6); \qquad (27) \quad A_{4l} = 0 \quad (l = 1, 2, 3, 4).$$

IV. **Allgemeine Sätze über Determinanten beliebigen Grades.**

1. Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn Zeilen (Horizontal-) und Kolonnen (Vertikalreihen) miteinander vertauscht werden (*Baltzer*, S. 7; *Pascal*, S. 5).

2. Eine Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn in ihr zwei parallele Reihen vertauscht werden (*Baltzer*, S. 8; *Pascal*, S. 6).

3. Eine Determinante verschwindet, wenn die entsprechenden Elemente zweier Reihen einander gleich sind (*Baltzer*, S. 8; *Pascal*, S. 7).

4. Eine Determinante ändert sich nicht, wenn zu den Elementen

einer Reihe die mit demselben Faktor multiplizierten Elemente einer parallelen Reihe addiert werden (*Baltzer*, S. 18; *Pascal*, S. 9).

5. Um eine Determinante mit einem Faktor zu multiplizieren, hat man alle Elemente einer Reihe mit ihm zu multiplizieren; einen gemeinschaftlichen Faktor aller Elemente einer Reihe kann man vor die Determinante setzen (*Baltzer*, S. 15; *Pascal*, S. 7).

6. Eine Determinante ist *symmetrisch*, wenn $a_{kl} = a_{lk}$; für sie ist $A_{kl} = A_{lk}$ (vgl. I, II, III, (2)), ferner $\alpha_{kl} = \alpha_{lk}$ (vgl. III, (4)) (*Baltzer*, S. 17; *Pascal*, S. 56).

7. Eine Determinante ist *schief*, wenn $a_{kl} = -a_{lk}$, $a_{kk} = 0$. Eine schiefe Determinante von *ungeradem* Grade verschwindet. Für eine schiefe Determinante von *geradem* Grade n ist für die Unterdeterminanten $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades: $A_{kl} = -A_{lk}$, $A_{kk} = 0$; verschwindet die Determinante, so verschwinden stets auch alle ihre Unterdeterminanten A_{kl} (*Baltzer*, S. 17; 42; *Pascal*, S. 56).

V. **Das Multiplikationstheorem der Determinanten.**

1. *Determinanten zweiten Grades.* Für:

$$(1) \qquad \begin{cases} c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12}, & c_{12} = a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22}, \\ c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12}, & c_{22} = a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{cases}$$

ist:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

2. *Determinanten dritten Grades.* Ist für $k = 1, 2, 3$; $l = 1, 2, 3$:

$$(1) \qquad c_{kl} = a_{k1}b_{l1} + a_{k2}b_{l2} + a_{k3}b_{l3},$$

so ist:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

und zugleich:

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} c_{k_1l_1} & c_{k_1l_2} \\ c_{k_2l_1} & c_{k_2l_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{k_12} & a_{k_13} \\ a_{k_22} & a_{k_23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{l_12} & b_{l_13} \\ b_{l_22} & b_{l_23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{k_13} & a_{k_11} \\ a_{k_23} & a_{k_21} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{l_13} & b_{l_11} \\ b_{l_23} & b_{l_21} \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} a_{k_11} & a_{k_12} \\ a_{k_21} & a_{k_22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{l_11} & b_{l_12} \\ b_{l_21} & b_{l_22} \end{vmatrix},$$

wo k_1k_2, l_1l_2 unabhängig voneinander die Kombinationen 23, 31, 12 durchlaufen (Anm. 1, II, (2)).

3. *Determinanten vierten Grades.* Wenn für $k = 1, 2, 3, 4$; $l = 1, 2, 3, 4$:

$$(1) \qquad c_{kl} = \sum_1^4{}^m a_{km}b_{lm}$$

gesetzt wird, so ist:

$$(2)\quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix};$$

$$(3)\quad \begin{vmatrix} c_{k_1l_1} & c_{k_1l_2} & c_{k_1l_3} \\ c_{k_2l_1} & c_{k_2l_2} & c_{k_2l_3} \\ c_{k_3l_1} & c_{k_3l_2} & c_{k_3l_3} \end{vmatrix} = \sum_1^4{}_{m_1m_2m_3} \begin{vmatrix} a_{k_1m_1} & a_{k_1m_2} & a_{k_1m_3} \\ a_{k_2m_1} & a_{k_2m_2} & a_{k_2m_3} \\ a_{k_3m_1} & a_{k_3m_2} & a_{k_3m_3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{l_1m_1} & b_{l_1m_2} & b_{l_1m_3} \\ b_{l_2m_1} & b_{l_2m_2} & b_{l_2m_3} \\ b_{l_3m_1} & b_{l_3m_2} & b_{l_3m_3} \end{vmatrix},$$

wo $m_1m_2m_3$ über die Wertetripel 234, 314, 124, 321 läuft;

$$(4)\quad \begin{vmatrix} c_{k_1l_1} & c_{k_1l_2} \\ c_{k_2l_1} & c_{k_2l_2} \end{vmatrix} = \sum_1^6{}_{m_1m_2} \begin{vmatrix} a_{k_1m_1} & a_{k_1m_2} \\ a_{k_2m_1} & a_{k_2m_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{l_1m_1} & b_{l_1m_2} \\ b_{l_2m_1} & b_{l_2m_2} \end{vmatrix},$$

wo m_1m_2 über die Wertepaare 23, 31, 12, 14, 24, 34 läuft (*Baltzer*, S. 16; *Pascal*, S. 21—30).

Anmerkung 2.

Systeme von zwei, drei und vier linearen Gleichungen.

I. **Zwei lineare Gleichungen** (Bezeichnung nach Anm. 1, I).

1. *Gleichungen zwischen zwei mal zwei Veränderlichen.* Aus den Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases}$$

in denen a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} vier Konstanten, x_1, x_2 und y_1, y_2 aber veränderliche (oder konstante) Größen sind, folgt nach Anm. 1, I, (4) unbedingt:

$$(2)\quad \begin{cases} Ax_1 = A_{11}y_1 + A_{21}y_2, \\ Ax_2 = A_{12}y_1 + A_{22}y_2. \end{cases}$$

Alsdann ist zu unterscheiden:

Wenn $A \neq 0$, sind durch die Gleichungen (2) (die Auflösungen von (1)) x_1, x_2 als Funktionen von y_1, y_2 bestimmt. Die Rückkehr von (2) zu (1) beruht auf Anm. 1, I, (3); (2).

Wenn $A = 0$, sind nach (2) die linearen Funktionen (1) voneinander abhängig in der Weise, daß identisch in x_1, x_2:

$$(3)\quad \begin{cases} 0 = A_{11}y_1 + A_{21}y_2, \\ 0 = A_{12}y_1 + A_{22}y_2, \end{cases}$$

und ist mittels (1) nur mehr eine der Größen x_1, x_2 durch die andere und durch eine der Größen y_1, y_2 bestimmt; z. B. wenn $a_{11} \neq 0$ ist, x_1 durch x_2, y_1.

2. *Gleichungen zwischen den Verhältnissen von zwei mal zwei Veränderlichen.* Ist mit einem unbestimmten Proportionalitätsfaktor ϱ:

$$(4) \qquad \begin{cases} \varrho y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2, \\ \varrho y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2, \end{cases}$$

so ist nach (2) für $A \neq 0$ wieder mit einem Proportionalitätsfaktor:

$$(5) \qquad \sigma = \frac{A}{\varrho}$$

umgekehrt:

$$(6) \qquad \begin{cases} \sigma x_1 = A_{11} y_1 + A_{21} y_2, \\ \sigma x_2 = A_{12} y_1 + A_{22} y_2. \end{cases}$$

3. *Homogene Gleichungen mit zwei Veränderlichen.* Aus den beiden Gleichungen:

$$(7) \qquad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = 0, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = 0 \end{cases}$$

folgt nach (2), wenn $A \neq 0$, daß x_1 und x_2 beide Null sind; wenn x_1 und x_2 nicht beide Null sind, daß $A = 0$. In diesem Falle ist (vgl. Anm. 1, I, (5)):

$$(8) \qquad x_1 : x_2 = A_{11} : A_{12} = A_{21} : A_{22}.$$

II. **Drei lineare Gleichungen** (Bezeichnung nach Anm. 1, II).

1. *Gleichungen zwischen zwei mal drei Veränderlichen.* Aus den Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3, \\ y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3, \\ y_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3, \end{cases}$$

in denen die Koeffizienten a_{kl} $(k, l = 1, 2, 3)$ neun Konstanten, x_k und y_k aber veränderliche (oder konstante) Größen bedeuten, folgt nach Anm. 1, II, (6) unbedingt:

$$(2) \qquad \begin{cases} A x_1 = A_{11} y_1 + A_{21} y_2 + A_{31} y_3, \\ A x_2 = A_{12} y_1 + A_{22} y_2 + A_{32} y_3, \\ A x_3 = A_{13} y_1 + A_{23} y_2 + A_{33} y_3; \end{cases}$$

und ferner:

$$(3) \begin{cases} A_{12}x_3 - A_{13}x_2 = a_{31}y_2 - a_{21}y_3, & A_{22}x_3 - A_{23}x_2 = a_{11}y_3 - a_{31}y_1, & A_{32}x_3 - A_{33}x_2 = a_{21}y_1 - a_{11}y_2. \\ A_{13}x_1 - A_{11}x_3 = a_{32}y_2 - a_{22}y_3, & A_{23}x_1 - A_{21}x_3 = a_{12}y_3 - a_{32}y_1, & A_{33}x_1 - A_{31}x_3 = a_{22}y_1 - a_{12}y_2. \\ A_{11}x_2 - A_{12}x_1 = a_{33}y_2 - a_{23}y_3, & A_{21}x_2 - A_{22}x_1 = a_{13}y_3 - a_{33}y_1, & A_{31}x_2 - A_{32}x_1 = a_{23}y_1 - a_{13}y_2. \end{cases}$$

Alsdann ist zu unterscheiden:

Wenn $A \neq 0$, sind durch (2) x_1, x_2, x_3 als Funktionen von y_1, y_2, y_3 bestimmt; die Rückkehr von (2) zu (1) beruht auf Anm. 1, II, (4); (5).

Wenn $A = 0$, aber nicht alle A_{kl} verschwinden, sind nach (2) die linearen Funktionen (1) voneinander abhängig in der Weise, daß identisch in x_1, x_2, x_3 (vgl. Anm. 1, II, (7)):

$$(4) \qquad \begin{cases} 0 = A_{11}y_1 + A_{21}y_2 + A_{31}y_3, \\ 0 = A_{12}y_1 + A_{22}y_2 + A_{32}y_3, \\ 0 = A_{13}y_1 + A_{23}y_2 + A_{33}y_3, \end{cases}$$

und sind mittels (3) nur mehr zwei von den drei Größen x_1, x_2, x_3 durch die dritte und zwei der Größen y_1, y_2, y_3 bestimmt; z. B. wenn $A_{11} \neq 0$ ist, x_2 und x_3 durch x_1, y_2, y_3.

Wenn alle A_{kl}, aber nicht alle a_{kl} verschwinden, sind nach (3) die linearen Funktionen (1) voneinander abhängig in der Weise, daß identisch in x_1, x_2, x_3 (vgl. Anm. 1, II, (8)):

$$(5) \qquad 0 = a_{3k}y_2 - a_{2k}y_3, \quad 0 = a_{1k}y_3 - a_{3k}y_1, \quad 0 = a_{2k}y_1 - a_{1k}y_2,$$

$k = 1, 2, 3$, und ist durch (1) nur mehr eine der Größen x_1, x_2, x_3 durch die beiden andern und eine der Größen y_1, y_2, y_3 bestimmt; z. B. wenn $a_{11} \neq 0$, x_1 durch x_2, x_3, y_1.

2. *Gleichungen zwischen den Verhältnissen von zwei mal drei Veränderlichen.* Ist mit einem unbestimmten Proportionalitätsfaktor ϱ:

$$(6) \qquad \begin{cases} \varrho y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \varrho y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \varrho y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{cases}$$

so ist nach (2) für $A \neq 0$ wieder mit einem Proportionalitätsfaktor:

$$(7) \qquad \sigma = \frac{A}{\varrho}$$

umgekehrt:

$$(8) \qquad \begin{cases} \sigma x_1 = A_{11}y_1 + A_{21}y_2 + A_{31}y_3, \\ \sigma x_2 = A_{12}y_1 + A_{22}y_2 + A_{32}y_3, \\ \sigma x_3 = A_{13}y_1 + A_{23}y_2 + A_{33}y_3. \end{cases}$$

3. *Homogene Gleichungen mit drei Veränderlichen.* Aus den drei Gleichungen:

$$(9) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

folgt nach (2), wenn $A \neq 0$, daß x_1, x_2, x_3 alle drei Null sind; wenn x_1, x_2, x_3 nicht alle drei Null sind, daß $A = 0$.

Wenn $A = 0$, aber nicht alle A_{kl} verschwinden, bestimmen die Gleichungen (9) die beiden Verhältnisse der Größen x_1, x_2, x_3, und zwar ist nach (3) mit $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ (vgl. Anm. 1, II, (7)):

$$(10)\qquad x_1 : x_2 : x_3 = A_{11} : A_{12} : A_{13} = A_{21} : A_{22} : A_{23} = A_{31} : A_{32} : A_{33}.$$

Wenn alle A_{kl}, aber nicht alle a_{kl} verschwinden, bestimmen die Gleichungen (9) nur mehr eine der beiden Größen x_1, x_2, x_3 durch die andern; z. B. wenn $a_{11} \neq 0$ ist, x_1 durch x_2 und x_3.

Als Sonderfall von (10) ergibt sich, wenn in (9) $a_{31} = a_{32} = a_{33} = 0$ ist: Die Auflösungen der *zwei* Gleichungen:

$$(11)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}$$

sind, falls A_{31}, A_{32}, A_{33} nicht alle verschwinden (vgl. Anm. 1, II, (2)):

$$(12)\qquad x_1 : x_2 : x_3 = A_{31} : A_{32} : A_{33} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

III. **Vier lineare Gleichungen** (Bezeichnung nach Anm. 1, III).

1. *Gleichungen zwischen zwei mal vier Veränderlichen.* Aus den Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4, \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4, \\ y_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4, \end{cases}$$

in denen die Koeffizienten a_{kl} $(k, l = 1, 2, 3, 4)$ sechszehn Konstanten, x_k und y_k aber veränderliche (oder konstante) Größen sind, folgt nach Anm. 1, III, (17) unbedingt:

$$(2)\qquad \begin{cases} Ax_1 = A_{11}y_1 + A_{21}y_2 + A_{31}y_3 + A_{41}y_4, \\ Ax_2 = A_{12}y_1 + A_{22}y_2 + A_{32}y_3 + A_{42}y_4, \\ Ax_3 = A_{13}y_1 + A_{23}y_2 + A_{33}y_3 + A_{43}y_4, \\ Ax_4 = A_{14}y_1 + A_{24}y_2 + A_{34}y_3 + A_{44}y_4; \end{cases}$$

ferner:

$$(3)\qquad \begin{cases} A_{12}x_3 - A_{13}x_2 = \alpha_{64}y_2 - \alpha_{54}y_3 + \alpha_{14}y_4, \\ A_{13}x_1 - A_{11}x_3 = \alpha_{65}y_2 - \alpha_{55}y_3 + \alpha_{15}y_4, \\ A_{11}x_2 - A_{12}x_1 = \alpha_{66}y_2 - \alpha_{56}y_3 + \alpha_{16}y_4, \\ A_{11}x_4 - A_{14}x_1 = \alpha_{61}y_2 - \alpha_{51}y_3 + \alpha_{11}y_4, \\ A_{12}x_4 - A_{14}x_2 = -\alpha_{62}y_2 + \alpha_{52}y_3 - \alpha_{12}y_4, \\ A_{13}x_4 - A_{14}x_3 = \alpha_{63}y_2 - \alpha_{53}y_3 + \alpha_{13}y_4, \end{cases}$$

und drei entsprechende Formelsysteme mit y_1, y_3, y_4; y_1, y_2, y_4; y_1, y_2, y_3 auf der rechten Seite; endlich:

$$(4)\quad \begin{cases} \alpha_{13}x_2 - \alpha_{12}x_3 + \alpha_{14}x_4 = a_{21}y_3 - a_{31}y_2, \\ \alpha_{11}x_3 - \alpha_{13}x_1 + \alpha_{15}x_4 = a_{22}y_3 - a_{32}y_2, \\ \alpha_{12}x_1 - \alpha_{11}x_2 + \alpha_{16}x_4 = a_{23}y_3 - a_{33}y_2, \\ -\alpha_{14}x_1 - \alpha_{15}x_2 - \alpha_{16}x_3 = a_{24}y_3 - a_{34}y_2 \end{cases}$$

und fünf entsprechende Formelsysteme mit y_3, y_1; y_1, y_2; y_1, y_4; y_2, y_4, y_3, y_4 auf der rechten Seite.

Alsdann ist zu unterscheiden:

Wenn $A \neq 0$, sind durch (2) x_1, x_2, x_3, x_4 als Funktionen von y_1, y_2, y_3, y_4 bestimmt; die Rückkehr von (2) zu (1) beruht auf Anm. 1, III, (7); (8).

Wenn $A = 0$, aber nicht alle A_{kl} verschwinden, sind nach (2) die linearen Funktionen (1) voneinander abhängig in der Weise, daß identisch in x_1, x_2, x_3, x_4 (vgl. Anm. 1, III, (21)):

$$(5)\quad \begin{cases} A_{11}y_1 + A_{21}y_2 + A_{31}y_3 + A_{41}y_4 = 0, \\ A_{12}y_1 + A_{22}y_2 + A_{32}y_3 + A_{42}y_4 = 0, \\ A_{13}y_1 + A_{23}y_2 + A_{33}y_3 + A_{43}y_4 = 0, \\ A_{14}y_1 + A_{24}y_2 + A_{34}y_3 + A_{44}y_4 = 0, \end{cases}$$

und sind mittels (3) nur mehr drei von den Größen x_1, x_2, x_3, x_4 durch die vierte und drei der Größen y_1, y_2, y_3, y_4 bestimmt; z. B. wenn $A_{11} \neq 0$ ist, x_2, x_3, x_4 durch x_1, y_2, y_3, y_4.

Wenn alle A_{kl}, aber nicht alle α_{kl} verschwinden, sind nach (3) die linearen Funktionen (1) in der Weise voneinander abhängig, daß identisch in x_1, x_2, x_3, x_4 die 24 Gleichungen bestehen:

$$(6)\quad \begin{cases} \alpha_{64}y_2 - \alpha_{54}y_3 + \alpha_{14}y_4 = 0, \\ \alpha_{65}y_2 - \alpha_{55}y_3 + \alpha_{15}y_4 = 0, \quad \text{usw.}, \end{cases}$$

und sind mittels (4) nur mehr zwei von den Größen x_1, x_2, x_3, x_4 durch die beiden andern und zwei der Größen y_1, y_2, y_3, y_4 bestimmt; z. B. wenn $\alpha_{11} \neq 0$ ist, x_2, x_3 durch x_1, x_4, y_2, y_3.

Wenn alle α_{kl}, aber nicht alle a_{kl} verschwinden, sind nach (4) die linearen Funktionen (1) in der Weise voneinander abhängig, daß identisch in x_1, x_2, x_3, x_4 die 24 Gleichungen bestehen:

$$(7)\quad \begin{cases} a_{21}y_3 - a_{31}y_2 = 0, \\ a_{22}y_3 - a_{32}y_2 = 0, \quad \text{usw.}, \end{cases}$$

und ist durch (1) nur mehr eine der Größen x_1, x_2, x_3, x_4 durch die

anderen und eine der Größen y_1, y_2, y_3, y_4 bestimmt; z. B. wenn $a_{11} \neq 0$ ist, x_1 durch x_2, x_3, x_4, y_1.

2. *Gleichungen zwischen den Verhältnissen von zwei mal vier Veränderlichen.* Ist mit einem unbestimmten Proportionalitätsfaktor ϱ:

$$(8)\quad \begin{cases} \varrho y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4, \\ \varrho y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4, \\ \varrho y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4, \\ \varrho y_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4, \end{cases}$$

so ist nach (2) für $A \neq 0$ wieder mit einem Proportionalitätsfaktor:

$$(9)\quad \sigma = \frac{A}{\varrho}$$

umgekehrt:

$$(10)\quad \begin{cases} \sigma x_1 = A_{11}y_1 + A_{21}y_2 + A_{31}y_3 + A_{41}y_4, \\ \sigma x_2 = A_{12}y_1 + A_{22}y_2 + A_{32}y_3 + A_{42}y_4, \\ \sigma x_3 = A_{13}y_1 + A_{23}y_2 + A_{33}y_3 + A_{43}y_4, \\ \sigma x_4 = A_{14}y_1 + A_{24}y_2 + A_{34}y_3 + A_{44}y_4. \end{cases}$$

3. *Homogene Gleichungen mit vier Veränderlichen.* Aus den vier Gleichungen:

$$(11)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = 0, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = 0 \end{cases}$$

folgt nach (2), wenn $A \neq 0$, daß x_1, x_2, x_3, x_4 alle vier Null sind; wenn x_1, x_2, x_3, x_4 nicht alle vier Null sind, daß $A = 0$.

Wenn $A = 0$, aber nicht alle A_{kl} verschwinden, bestimmen die Gleichungen (11) die drei Verhältnisse der Größen x_1, x_2, x_3, x_4, und zwar ist nach (3) mit $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$ (vgl. Anm. 1, III, (21)):

$$(12)\quad \begin{cases} x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = A_{11} : A_{12} : A_{13} : A_{14} = A_{21} : A_{22} : A_{23} : A_{24} \\ \qquad = A_{31} : A_{32} : A_{33} : A_{34} = A_{41} : A_{42} : A_{43} : A_{44}. \end{cases}$$

Wenn alle A_{kl}, aber nicht alle α_{kl} verschwinden, bestimmen die Gleichungen (11) nach (4) mit $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$ nur mehr zwei von den vier Größen x_1, x_2, x_3, x_4 durch die zwei andern; z. B. wenn $\alpha_{11} \neq 0$ ist, x_2 und x_3 durch x_1 und x_4.

Wenn alle α_{kl}, aber nicht alle a_{kl} verschwinden, bestimmen die Gleichungen (11) nur mehr eine der vier Größen x_1, x_2, x_3, x_4 durch die drei andern; z. B. wenn $a_{11} \neq 0$ ist, x_1 durch x_2, x_3, x_4.

Als Sonderfall von (12) ergibt sich, wenn in (11) $a_{41} = a_{42} =$

$a_{43} = a_{44} = 0$ ist: Die Auflösungen der *drei* Gleichungen:

$$(13)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{24}x_4 = 0 \end{cases}$$

sind, falls A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44} nicht alle verschwinden (vgl. Anm. 1, III, (2)):

$$(14)\quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = A_{41} : A_{42} : A_{43} : A_{44}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & a_{14} \\ a_{23} & a_{21} & a_{24} \\ a_{33} & a_{31} & a_{34} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$$

(vgl. zu Anm. 2 *Baltzer*, S. 64 ff.; *Pascal*, S. 197 ff.)

3) Über den *Begriff der Strecke* § 1, **1***) und *des Winkels* § 2, **1** vgl. *R. Baltzer*, Die *Elemente***) der Mathematik 2, 5. Aufl. (1878), S. 4; 5; 7; *J. Tropfke*, *Geschichte* der Elementarmathematik 2 (1903), S. 21; *M. Pasch*, Vorlesungen über neuere *Geometrie* (1882), S. 4; *W. Killing*, Einführung in die *Grundlagen* der Geometrie 1 (1893), S. 5; *D. Hilbert*, *Grundlagen* der Geometrie, 2. Aufl. 1903, S. 4; 8.

4) Über den *Begriff der absoluten Größe* einer Strecke § 1, **2** und eines Winkels § 2, **2** vgl. *O. Stolz u. J. A. Gmeiner*, Theoretische *Arithmetik* (Sammlung Teubner, Bd. IV), S. 107; 109.

5) Die Benennung *positiv* und *negativ*, bezüglich das *Vorzeichen* + und —, wird gebraucht in der Geraden § 1, **3** für den zweifachen *Durchlaufungssinn;* im Strahlbüschel § 2, **3** und in der Ebene § 11, **1** für den zweifachen *Drehungssinn;* im Raume § 32, **7** für den zweifachen *Schraubensinn.* Dieses Prinzip der Zeichen ist zuerst von *A. F. Moebius* seit 1827 (vgl. Werke 2, S. 246) überall durchgeführt worden (vgl. *Baltzer*, Elemente 2, S. 104). Den *Sinn eines Gebildes* erster Stufe definiert *G. K. Ch. v. Staudt*, *Beiträge* zur Geometrie der Lage (1865), S. 29 durch die Aufeinanderfolge von drei Elementen, vgl. § 6, **9**.

6) Das Symbol AB ist sowohl im *weiteren* Sinne für den Gesamtbegriff der Strecke § 1, **1** als auch im *engeren* Sinne für die relative Länge § 1, **4** gebraucht.

Der relativen *Länge einer Strecke* § 1, **4** entspricht der relative *Flächeninhalt eines Dreiecks* § 15, **1** und der relative *Rauminhalt eines Tetraeders* § 39, **1**. Diese Begriffe sind von *Moebius*, Barycentrischer Calcul (1827), Werke 1, S. 25; 40; 41; Statik (1837), Werke 3, S. 87 eingeführt (vgl. *Baltzer*, Elemente 2, S. 45; 104; 208; Analytische *Geometrie* (1882), S. 3; 35; 373).

Über die genauere Feststellung des Begriffes der relativen Größe vgl. *Stolz-Gmeiner*, Arithmetik, S. 117—119.

*) In den Anmerkungen beziehen sich alle Angaben von *Paragraphen* auf das vorliegende Buch, alle Angaben von *Seitenzahlen* auf die jedesmal genannten Quellenschriften.

**) Die *kursiv* gedruckten Worte dienen weiterhin als Abkürzung für den vollen Titel.



7) Die *Änderung* der Vorzeichen der Ausdrücke AB in § 1, (2), ABC in § 15, (2) und $ABCD$ in § 39, (2) bei einer *Transposition* zweier Eckpunkte stellt *Moebius,* Werke 1, S. 25; 40; 42 fest. Sie entspricht dem Vorzeichenwechsel der *Determinanten* § 1, (5); § 15, (6) und § 39, (7) bei Vertauschung zweier Reihen nach Anm. 1, IV, 2.

8) Die einander entsprechenden Formeln § 1, (3) für drei, § 15, (8) für vier und § 39, (10) für fünf Punkte gibt *Moebius,* Werke 1, S. 25; 41; 43; 2, S. 191; (vgl. *P. Serret,* Géométrie de direction (1865), S. 21; *v. Staudt,* Halbmesser (1867), S. 28; zu § 1, **5** auch *Hilbert,* Grundlagen, S. 4).

9) Die *Koordinate (Abszisse) x auf der Geraden* in § 1, **6** kehrt als *Bestandteil* der Koordinaten x, y in § 10, **2** und x, y, z in § 31, **2** wieder und geht als *Parameter* in die Darstellungen § 16, (2) (mit s bezeichnet) und § 43, (2) der Geraden in der Ebene und im Raume ein. Sie wird von *L. Euler, Introductio* (1748), übersetzt von *Michelsen,* 2, S. 1 behandelt; vgl. auch *L. J. Magnus,* Sammlung von *Aufgaben* 1 (1833), S. 3; *L. N. M. Carnot,* Mémoire sur la relation etc., suivi d'un essai sur la théorie des *transversales,* Paris 1806, S. 66.

10) Die für die analytische Geometrie *grundlegende Behauptung* § 1, **6**, daß jedem Punkte der geraden Linie eine Zahl entspricht und umgekehrt, kommt im wesentlichen auf die *Axiome der Stetigkeit* zurück und bedarf ebenso wie die entsprechenden Behauptungen § 2, **7**; § 10, **3**; § 31, **3** usw. einer näheren Untersuchung; vgl. darüber *B. Riemann* (1868), Werke S. 259; *R. Dedekind,* Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872, 2. Aufl. 1892, S. 5—22; *G. Cantor,* Math. Ann. 5 (1872), S. 127; *E. Heine,* J. f. Math. 74 (1872), S. 172; *F. Klein,* Math. Ann. 7 (1874), S. 534; 37 (1890), S. 572; *Pasch,* Neuere Geometrie (1882), S. 187 ff.; *Killing,* Grundlagen 1 (1893), S. 107; *S. Lie,* Theorie der Transformationsgruppen 3 (1893), S. 394; 438; 452; 461; *H. Burkhardt,* Gött. Nachr. 1895, S. 114; *Klein,* Lobatschewsky-Preis (1897), S. 17; 18 = Math. Ann. 50, S. 594; *O. Hölder,* Anschauung und Denken in der Geometrie (1900), S. 36; *A. Schoenflies,* Jahresber. d. d. Math.-Vereinigung 8, 2 (1900), S. 31; 63; *Hilbert,* Grundlagen, S. 19; 38; *Stolz-Gmeiner,* Arithmetik, S. 113; *Enzyklopädie* 1, S. 53 *(A. Pringsheim).*

11) Die § 1, **9** benutzte identische Gleichung ist die Entwicklung der (nach Anm. 1, IV, 4; 3) verschwindenden Determinante:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_4 & x_1 & 1 \\ x_2 - x_4 & x_2 & 1 \\ x_3 - x_4 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

nach den Elementen der ersten Spalte (Anm. 1, II, (6)).

Die Formel § 1, (6) gibt *Moebius* (1827), Werke 1, S. 223; *J. V. Poncelet,* J. f. Math. 3 (1828), S. 269; *M. Chasles, Aperçu* historique (1837), S. 305; *Baltzer,* Geometrie, S. 3; *H. Schröter,* Die Theorie der *Kegelschnitte,* 2. Aufl. (1876), S. 5.

12) Die Unterscheidung *gleichsinniger* und *ungleichsinniger (positiv* oder *negativ orientierter) Koordinatensysteme* bietet sich, wie auf der Geraden § **1, 10**, so auch in der Ebene § 11, **3** und im Raume § 32, **8** dar und gründet sich auf die in Anm. 5 angegebene Unterscheidung des zweifachen Durchlaufungs-, Drehungs- und Schraubensinnes, vgl. Anm. 57.

13) *Strahlbüschel* § 2, **3** und *Ebenenbüschel* § 42, **9** sind als ordonnance des lignes droites et de plan von *G. Desargues* (1639), *Oeuvres* réunies par *Poudra* 1,

S. 104; 105 eingeführt, auch der Büschel *paralleler* Strahlen § 18, **2** oder Ebenen § 42, **3**. Punktreihen, Strahlbüschel und Ebenenbüschel werden von *J. Steiner,* System. *Entwickl.* (1832), S. XIII = Werke 1, S. 237 als *Grundgebilde* genommen. In Rücksicht auf ihre Mächtigkeit (∞^1 Elemente) heißen sie, nach *v. Staudt, Geometrie* der Lage (1847), S. 10, *einförmige* oder Grundgebilde *erster Stufe.* In jedem solchen Gebilde dient *eine* Koordinate zur Bestimmung des einzelnen Elementes § 1, (4); § 2, (13); § 49, (12); vgl. Anm. 105.

14) Die § 2, **1—4** entwickelte Auffassung der *relativen Größe eines Winkels* ist von *Moebius,* Analyt. Sphärik (1846) und Kreisverwandtschaft (1855), Werke 2, S. 4; 255 angegeben; vgl. *Baltzer,* Elemente 2, S. 6; 297; 299; Geometrie, S. 31; *Stolz-Gmeiner,* Arithmetik, S. 119.

15) Die Formel § 2, (9) findet sich bei *Carnot, Géométrie* de position (1803), S. 257; *Moebius*, Werke 2, S. 257; *Baltzer,* Geometrie, S. 32.

16) Das Verhältnis § 3, (1) wenden *C. J. Brianchon,* Mémoire sur les *lignes* du second ordre (1817), S. 7 und *Baltzer,* Elemente 2, S. 355 an, während *Moebius* (1827), Werke 1, S. 220, $\lambda = P_1P : PP_2$ als Teilungsverhältnis nimmt. Über das Sinusverhältnis § 4, (1) und § 42, (10) vgl. *Baltzer,* Elemente 2, S. 355; es erscheint zuerst bei *Carnot,* Transversales (1806), S. 77.

17) Der *unendlich ferne Punkt* § 3, **4** und die unendlich ferne *Gerade* § 22, **5** sind von *Desargues* (1639), Oeuvres 1, S. 105; 106 als Mittelpunkt und Achse eines Büschels paralleler Strahlen und Ebenen eingeführt; vgl. *M. Cantor, Geschichte* der Mathematik 2, S. 620; über die unendlich ferne Gerade vgl. ferner *Poncelet, Traité* des figures projectives (1822), S. 53; *Plücker* (1829), Werke 1, S. 131; *Moebius* (1829), Werke 1, S. 452; *Steiner*, Entwickl. (1832), S. 2 = Werke 1, S. 241; *v. Staudt,* Geom. (1847), S. 24; die unendlich ferne *Ebene* § 47, **5** erscheint bei *Poncelet,* a. a. O. S. 373; *Chasles,* Mém. sur *deux principes* (1837), S. 581; *v. Staudt,* a. a. O. S. 24.

Die Motivierung des unendlich fernen Punktes und der unendlich fernen Geraden aus der perspektiven Beziehung § 5, **1** und § 22, **5** stützt sich auf das *Parallelenaxiom,* nach welchem durch einen gegebenen Punkt zu einer Geraden nur eine parallele Gerade (und zu einer Ebene nur eine parallele Ebene) gezogen werden kann. Dieses Axiom wird durch ein anderes ersetzt in der *Nicht-Euklid'schen Geometrie;* vgl. *G. Battaglini,* Giorn. di mat. 5 (1867), S. 217; *E. Beltrami,* Giorn. di mat. 6 (1868), S. 284 = Opere 1, S. 374; *Klein,* Math. Ann. 4 (1871), S. 575; 6 (1873), S. 112; 37 (1890), S. 554; Vorles. über Nicht-Euklidische Geometrie 1889; *Cayley,* Math. Ann. 5 (1872), S. 630; *W. Clifford,* Papers (1873), S. 181; (1874), S. 378; (1876), S. 236; 385; 402; *Killing,* J. f. Math. 89 (1880), S. 265 und Grundlagen; *Hölder*, Anschauung u. Denken, S. 35; *Hilbert,* Grundlagen, S. 107; *Clebsch-Lindemann, Vorlesungen* über Geometrie 2 (1891), S. 468; *Tropfke,* Geschichte 2, S. 84; *H. Poincaré, Wissenschaft* und Hypothese, übers. von *F. und L. Lindemann* (1904), S. 36.

18) Der Quotient $\frac{P_1P_3}{P_1P_4} : \frac{P_2P_3}{P_2P_4}$ findet sich bei *Brianchon,* lignes S. 7 (vgl. auch Anm. 28); prinzipiell wird das *Doppelverhältnis* (Doppelschnittsverhältnis) von vier Punkten § 3, (5) mit dem Symbol § 3, (6) von *Moebius* (1827), Werke 1, S. 220 eingeführt; die analytischen Darstellungen § 3, (7) und für vier Strahlen § 4, (7) gibt *Moebius,* Werke 1, S. 454; 388; weiter vgl. *Steiner,* Entw. (1832), S. 7 = Werke 1, S. 244; *Chasles,* Aperçu (1837), S. 302 („rapport, fonction an-

harmonique"); *E. Kötter,* Jahres*bericht* d. d. Math.-Vereinigung 5, 2 (1901), S. 209; 253. Über das Doppelverhältnis von vier Ebenen vgl. § 42, (22);

v. Staudt, Beiträge (1856), S. 15 bezeichnet, ohne Benutzung der metrischen Begriffe der Strecke und des Winkels, überhaupt als „Wurf" den Inbegriff von vier Elementen eines Elementargebildes mit Rücksicht auf ihre Reihenfolge.

19) Die Tabelle der 24 Werte § 3, (19) gibt *Moebius,* Werke 1, S. 224; 456; vgl. *Clebsch,* Binäre *Formen* S. 59.

Bezeichnet man mit (kl) die Transposition (Vertauschung) der beiden Zahlen k und l, so ist:

$$1, \quad (2\,3)(1\,4), \quad (3\,1)(2\,4), \quad (1\,2)(3\,4)$$

die *Gruppe der Substitutionen* (vgl. Enzyklopädie 1, S. 211; 468), welche die sechswertige unsymmetrische Funktion § 3, (7) von vier Elementen ungeändert lassen; dagegen führen die sechs Substitutionen der Elemente 2 3 4:

$$1, \quad (3\,4), \quad (4\,2), \quad (2\,3), \quad (2\,3\,4), \quad (2\,4\,3),$$

wo (klm) die zyklische Vertauschung bezeichnet, die Funktion in ihre sechs Werte über. Alle sechs Werte haben (ausnahmsweise) *dieselbe* Gruppe.

20) Über die Bezeichnung *„harmonisch"* und ihre Beziehung zur Musiklehre vgl. *Tropfke,* Geschichte 2, S. 95. Nach § 3, (23) ist P_3P_4 das „harmonische Mittel" zwischen P_1P_4 und P_2P_4, auch:

$$\frac{1}{P_1P_4} - \frac{1}{P_3P_4} = \frac{1}{P_3P_4} - \frac{1}{P_2P_4},$$

vgl. *Baltzer,* Elemente 1, 6. Aufl., S. 215; 2, S. 59. *Carnot*, Géométrie (1803), S. 282 spricht von Teilung in proportionale Segmente; die Benennung *„harmonische Punkte"* rührt von *Brianchon*, lignes, S. 6; 9 her. Daß harmonische Punkte dem Doppelverhältnis: -1 entsprechen, bemerkt *Moebius,* Werke 1, S. 240. Vier *harmonische Strahlen* § 4, 8 werden von *Ph. de la Hire* (1685) Harmonikalen (nach *Cantor,* Geschichte 3, S. 121), von *Brianchon,* a. a. O. S. 9 faisceau harmonique genannt, vgl. *v. Staudt,* Geom., S. 11; *Baltzer,* Elemente 2, S. 61. Über vier harmonische *Ebenen* vgl. § 42, zu (29); über die *Konstruktion* des vierten Elementes § 27, 5.

21) Die Definition § 3, (7) des *Doppelverhältnisses* bleibt *für komplexe Werte* von x_1, x_2, x_3, x_4 (vgl. Anm. 121) bestehen, vgl. *Baltzer,* Geom. S. 9.

Bei komplexem δ können je drei der sechs Werte (9) gleich werden, nämlich:

$$\delta = \frac{1}{1-\delta} = \frac{\delta - 1}{\delta} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\delta} = 1 - \delta = \frac{\delta}{\delta - 1};$$

dann genügt δ der Gleichung:

$$\delta^2 - \delta + 1 = 0,$$

ist also eine komplexe dritte Wurzel aus -1. Man nennt die vier Punkte in diesem Falle *äquianharmonisch* nach *L. Cremona*, *Intraduzione* ad una teoria geom. delle curve piane (1862), S. 21; vgl. *H. Schröter,* Math. Ann. 10 (1876), S. 420; Kegelschnitte, S. 63; *Clebsch,* Formen, S. 60; *Clebsch-Lindemann, Vorlesungen* über Geometrie 1 (1876), S. 40.

22) Während in § 3, 3 auf der Geraden die Strecke innerhalb und die Strecke außerhalb der Punkte P_1, P_2 durch die Anschauung gegeben ist, sind

hier in § 4, **1** *innere und äußere Winkelfläche* zwischen zwei ungerichteten Strahlen an sich nicht unterscheidbar, sondern werden entweder durch unmittelbare willkürliche Annahme der einen oder durch Richtung der beiden Strahlen festgelegt, vgl. *Hilbert,* Grundlagen S. 4; 8. In diesem Umstande liegt *der Grund für die bei dem einfachen Teilungsverhältnis überall auftretende Vorzeichenregel* § 6, (15′); § 9, (5′); § 18, (15); (16); § 42, (16); (17); § 49, (21); (29). Beim *Doppelverhältnis* fällt diese fort (nach § 4, **6**).

23) Ursprünglich *„perspektivisch"*, vgl. *Klügel,* Math. *Wörterbuch* 3 (1808), S. 802; *Steiner,* Entw. S. 4 = Werke 1, S. 241; *v. Staudt,* Geom., S. 49.

24) Über die Berücksichtigung der Vorzeichen beim Sinussatz vgl. *Moebius,* Werke 2, S. 247; *Baltzer,* Elemente 2, S. 301.

25) Der Hauptsatz von der *Gleichheit der Doppelverhältnisse bei der perspektiven Lage* ungleichartiger Grundgebilde 1. Stufe (vgl. Anm. 28) erscheint in *drei* nebengeordneten Formen; für *Punktreihe* und *Strahlbüschel* § 5, **3** und § 24, **10**; für *Punktreihe* und *Ebenenbüschel* § 52, **4**; für *Strahlbüschel* und *Ebenenbüschel* § 52, **9**. Der erste Satz § 5, **3** findet sich für harmonische Elemente § 5, **6** bei *Carnot,* Transversales (1806), S. 77; allgemein angedeutet bei *Poncelet,* Traité (1822), S. 10; in der Form § 5, **3** bei *Steiner,* Entw. (1832), S. 7 = Werke 1, S. 244; *v. Staudt,* Geom., S. 44; vgl. *Baltzer,* Elemente 2, S. 368; Geom., S. 43. Den zweiten Satz beweist für harmonische Elemente *Carnot,* a. a. O., S. 80, allgemein *Moebius* (1827), Werke 1, S. 234; den dritten Satz gibt *Steiner,* Entw. S. 106 = Werke 1, S. 311.

26) Die Gleichung § 5, (4) ist ein Spezialfall der allgemeinen Gleichung § 65, (11); ebenso sind die Gleichungen § 7, (18); § 8, (5); § 8, (19) in § 65, (37) enthalten; ferner der Schlußsatz von § 53, **6** und der vorletzte Satz von § 56, **10** in der in § 67, **6** nicht besonders erwähnten projektiven Beziehung zwischen Ebene und Bündel.

27) Über den Satz § 5, **7** vgl. *Baltzer,* Elemente 2, S. 58. An die Schlußbemerkung von § 5, **7** schließt sich der ebenfalls aus § 5, **6** mit Rücksicht auf § 3, **3**; **4** folgende Satz (vgl. § 27, **8** links) an: „Wenn man die Endpunkte P_1, P_2, die Mitte M und den unendlich fernen Punkt einer Strecke der Geraden g mit einem Punkt S außerhalb g verbindet, erhält man vier harmonische Strahlen", der nach *Cantor,* Geschichte 3, S. 122 von *Ph. de la Hire* (1685) gegeben wurde, vgl. *Tropfke,* Geschichte 2, S. 96.

28) Der Satz § 5, (6) findet sich bei *Pappus* (um 295 n. Chr., vgl. *F. Müller,* Zeittafeln, S. 36), Collectiones, liber VII, propositio 129 (Ausgabe von *F. Commandino,* Bologna 1660, S. 357; speziell für harmonische Punkte prop. 145, S. 373) in einer Form, die im Anschluß an § 5, Fig. 43a lauten würde:

$$AC . BP : BC . AP = AC' . B'P' : B'C' . AP',$$

indem dabei $A = A'$ als Schnittpunkt der beiden Geraden g und g' angenommen wird, vgl. *Moebius,* Werke 1, S. 227; *Tropfke,* Geschichte 2, S. 96. Den Satz (6) selbst gibt *Brianchon,* lignes (1817), S. 7; *Moebius* (1827), Werke 1, S. 228; den Satz (6′) *Steiner,* Entw. (1832), S. 10 = Werke 1, S. 246. Die entsprechenden Sätze im Raume vgl. § 52, (17); (19); *Baltzer,* Elem. 2, S. 368.

29) Die in § 5 und in anderen §§ vorgenommene *Nebeneinanderstellung* der Sätze, die das *Prinzip der Dualität* (vgl. Anm. 119) äußerlich zum Ausdruck bringt, wurde zuerst von *J. D. Gergonne,* Annales de mathém. 16 (1825/26),

S. 212; 17 (1826/27), S. 37 (vgl. *Plücker,* Werke 1, S. 43); S. 216; 18 (1827/28), S. 150 vorgenommen; von *Steiner,* Entw. (1832), S. 10 = Werke 1, S. 246 (gerade bei den Sätzen § 5, **9**); von *Magnus,* Aufgaben 1 (1833), S. 70; von *v. Staudt,* Geom. (1847), S. 30 angewendet. Die *Dualität* besteht *für die Ebene* in dem Entsprechen von Punkt und Strahl, von Punktreihe und Strahlbüschel (vgl. § 1 und § 2; § 3 und § 4; die nebeneinandergestellten Sätze in § 5 und § 6), von Schnittpunkt zweier Strahlen und Verbindungslinie zweier Punkte (vgl. besonders §§ 25—27). Sie besteht *für das Bündel* im Entsprechen von Strahlen und Ebenen (vgl. § 49, **7**; **8**). *Im Raume* (vgl. § 45, **4**; **6**; § 47, **11**; § 53, **1**) entsprechen sich dual Punkt und Ebene, Punktreihe und Ebenenbüschel, Punktfeld und Ebenenbündel, Schnittpunkt dreier Ebenen und Verbindungsebene dreier Punkte, während die Gerade als Verbindungslinie zweier Punkte und Schnittlinie zweier Ebenen sich selbst dual entspricht (§ 48, **1**).

30) Die *reine Verhältniskoordinate* λ des Punktes § 6, **1** hat *Moebius* (1827), Werke 1, S. 44; 51 in homogener Bezeichnung $\lambda = -\frac{q}{p}$ (p, q „baryzentrische Koordinaten") eingeführt. Anwendung finden die reinen Verhältniskoordinaten λ des Punktes § 6, (1), des Strahles § 6, (1′) und der Ebene § 42, (10) bei den Gleichungen der Punktreihe § 20, (6); § 46, (6), des Strahlbüschels § 18, (18); § 49, (17); des Ebenenbüschels § 42, (19); § 49, (25); ferner in den Parameterdarstellungen dieser Gebilde § 12, (18); § 20, (17); § 34, (12); § 35, (8); § 46, (17).

31) Die *multiplizierte Verhältniskoordinate* μ des Punktes § 6, (7), des Strahles § 6, (7′) und der Ebene § 42, **9**; **11** mit einem Multiplikator, auf dessen Wert es meist nicht ankommt, erscheint in den allgemeinen Gleichungen der Punktreihe § 9, (4); § 20, (3); § 22, (23′); § 29, (17′); § 46, (3); § 47, (25′), des Strahlbüschels § 9, (4′); § 18, (14); § 22, (23); § 49, (19) und des Ebenenbüschels § 42, (15); § 47, (25); § 49, (27), ferner aber in den Parameterdarstellungen § 20, (17′); § 22, (24); (24′); § 29, (18); (18′); § 47, (26); (26′); § 49, (22); (30); § 58, (20); (20′) (vgl. Anm. 38).

32) Die *Doppelverhältniskoordinate* μ des Punktes § 6, **6** wurde unter dem Namen *Abszisse* von *v. Staudt,* Beiträge (1856), S. 262 eingeführt; grundsätzlich und gleichzeitig für Punktreihe § 6, (16), Strahlbüschel § 6, (16′) und Ebenenbüschel § 42, (25) und § 56, (3) gab die Doppelverhältniskoordinaten *W. Fiedler,* Vrtlj. *Naturf.-Ges. Zürich* 15 (1870), S. 155.

Die analogen Bemerkungen wie in Anm. 10 sind auch für diese Koordinaten zu machen, vgl. *Klein, Pasch, Killing* an den dort angeführten Stellen.

Die reinen Doppelverhältniskoordinaten treten in den Gleichungen der Punktreihe § 9, (6); § 20, (10); § 22, (21′); § 29, (15′); § 46, (10); § 47, (23′); § 58, (17′), des Strahlbüschels § 9, (6′); § 18, (22); § 22, (21); § 29, (15); § 52, (31); (31′), des Ebenenbüschels § 42, (24); § 47, (23); § 58, (17) auf.

33) Den Übergang § 6, **9** bemerkt *v. Staudt,* Beiträge (1856), S. 264.

34) Der *Hauptsatz* § 6, (25) enthält nicht nur die Transformation der Doppelverhältniskoordinaten § 6, (29) und in der Form § 7, (20) die der Zweieckskoordinaten § 8, **4**, sondern dient auch als Grundlage für die Theorie der projektiven Verwandtschaften § 65, **2**. Er wurde von *Moebius* (1827), Werke 1, S. 226 abgeleitet und findet sich später bei *v. Staudt,* Beiträge, S. 262; vgl. auch *H. Schröter,* Kegelschnitte, S. 8.

Der analytische Ausdruck des Doppelverhältnisses in § 3, (7); § 4, (7);

§ 6, (5); (5'); (25); (25') ist in allen Koordinaten $x, \operatorname{tg}\varphi, \lambda, \mu$ formal derselbe; das *Doppelverhältnis* ist eine *absolute Invariante* jeder linearen Transformation, vgl. *Klein,* Höhere Geometrie I, *Vorlesung* 1892/93, S. 315.

35) Die *homogenen gemeinen Koordinaten x, t auf der Punktreihe* § 7, **1** sind denen in der Ebene § 22, **1** und im Raume § 47, **1** nachgebildet (vgl. Anm. 77) und sind nach § 23, **1** und § 49, **12** in ihnen enthalten. Über *homogene gemeine Koordinaten auf der unendlich fernen Punktreihe* vgl. § 23, **1** und § 49, **12**.

36) Die *homogenen gemeinen Koordinaten x, y des Strahles im Büschel* § 7, (2) erwähnt *Baltzer,* Geometrie, S. 55. Sie verhalten sich wie die Richtungskosinus *a, b des Strahles selbst* in § 11, **7** und wie die Koordinaten ihres Schnittpunktes mit der unendlich fernen Geraden in § 23, **1**; die Koordinaten u, v in § 7, (3) dagegen verhalten sich wie die Richtungskosinus *der Normale* des Strahles in § 23, **2**. Die Beziehung $x : y = -v : u$ oder $ux + vy = 0$ der beiden Arten von Koordinaten des Strahles entspricht derjenigen von § 8, **3**. Nach § 49, **14** sind die Koordinaten u, v in denen des Strahles *in der Ebene,* die Koordinaten x, y in denen des Strahles *im Bündel* enthalten; vgl. § 64, **5**.

Auch im *Parallelstrahlbüschel* kann man neben den homogenen gemeinen Koordinaten u, s des Strahles in § 23, **2** diejenigen x, t des Schnittpunktes mit der x-Achse verwenden; beide Arten stehen in der Beziehung $ux + st = 0$.

Über *homogene gemeine Koordinaten der Ebene im Ebenenbüschel* vgl. § 49, **13**.

37) Der Ausdruck § 7, (7) findet sich in etwas anderem Sinne zuerst bei *Plücker, System* der analyt. Geom. (1835), S. 53; über den allgemeinen Ausdruck § 7, (20) vgl. *Clebsch,* Formen, S. 51.

38) Die ersten *Zweieckskoordinaten* § 7, **6** sind die baryzentrischen von *Moebius* (vgl. Anm. 30), für die aber der Einheitspunkt speziell der Mittelpunkt des Zweiecks (der Multiplikator $a_1 : a_2 = -1$) ist. Die allgemeine Auffassung § 7, **7** für Punktreihe und Strahlbüschel und § 56, **2** für Ebenenbüschel gibt zuerst *W. Fiedler,* Ges. Zürich 15 (1870), S. 152; vgl. *Clebsch,* Formen (1872), S. 45; *Clebsch-Lindemann,* Vorl. **1**, S. 170; *Fiedler, Darstellende Geometrie* 3. Aufl., **3**, S. 69.

39) Die Darstellungen § 7, (13) und (17) entsprechen denjenigen in § 28, (1) und (21), sowie § 57, (1) und (21).

40) Die Bemerkung § 8, **3** macht *W. Fiedler*, Ges. Zürich 15 (1870), S. 157; Darstell. Geom. 3, S. 71; sie bereitet die Beziehung § 28, **17** und die Gleichung § 28, (11) vor.

41) Die Formeln § 8, (10) lauten in Determinantenform:

$$\varrho x_i = \begin{vmatrix} x_i^{(1)} y_1 & x_i^{(2)} y_2 & 0 \\ x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{0} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{0} \end{vmatrix}, \quad i = 1, 2;$$

ebenso gibt das in § 30, **3** angedeutete Verfahren:

$$\varrho x_i = \begin{vmatrix} x_i^{(1)} y_1 & x_i^{(2)} y_2 & x_i^{(3)} y_3 & 0 \\ x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} & x_1^{0} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} & x_2^{0} \\ x_3^{(1)} & x_3^{(2)} & x_3^{(3)} & x_3^{0} \end{vmatrix}, \quad i = 1, 2, 3;$$

und entsprechend für § 63, **3**; die Formeln sind von *W. Fiedler*, Darstell. Geom. 3, S. 421 entwickelt, vgl. *Salmon-Fiedler*, Analyt. Geom. der *Kegelschnitte*, 4. Aufl., S. 115.

42) Die *lineare Substitution* § 8, (11) hat eine doppelte Bedeutung, die der Transformation der Zweieckskoordinaten § 8, **5** und die der projektiven Verwandtschaft § 65, (33), vgl. *Clebsch*, Formen S. 1; 64; *Clebsch-Lindemann*, Vorlesungen 1, S. 172; 195. Das Entsprechende gilt für die linearen Substitutionen § 30, (1); § 63, (1), die in § 67, (1); § 69, (1) wiederkehren; die Schreibweise § 8, (17); § 30, (15); § 63, (25) nach *Hesse* (1840), Werke, S. 23.

43) Über den Begriff der *Invarianten* vgl. *Enzyklopädie* 1, S. 323; für § 8, **8** besonders *W. Fiedler*, Elemente der *neueren Geometrie* (1862), S. 33; *Clebsch*, Formen, S. 10; *Clebsch-Lindemann*, Vorles. 1, S. 177; 186; für § 30, **9**; § 63, **9**; **10** *Clebsch-Lindemann*, Vorles. 1, S. 252; 265; *Hesse, Vorlesungen* aus der analyt. Geom. usw. der *Ebene*, 2. Aufl., S. 114; *Vorles.* aus d. anal. Geom. des *Raumes*, 3. Aufl., S. 235.

44) Die Sätze § 9, **1**; **2** sind als Vorstufen für § 20, **3**; **4**; § 18, **7**; **8**; die Sätze § 9, **4** für § 29, **8** zu betrachten. Sie finden Verwendung bei der Darstellung projektiver Punktreihen § 52, **2**; § 65, **13**, besonders bei der Betrachtung vereinigt gelegener projektiver Punktreihen, vgl. *Clebsch*, Formen, S. 74; *Clebsch-Lindemann*, Vorles. 1, S. 197 (S. 199 auch die spezielle Form § 9, (18)).

45) Die *Veränderung der Grundpunkte* § 9, **6** gibt *Hesse*, Vorles. Ebene, S. 29; Raum, S. 28; *Clebsch*, Formen, S. 75; *Clebsch-Lindemann*, Vorles. 1, S. 199; 2, S. 32.

46) Die Koordinaten x, y in § 10, **2** kommen als Bestandteile der Koordinaten x, y, z im Raume § 31, **4** und als Parameter in der Darstellung § 40, (19) der Ebene im Raume vor (vgl. Anm. 9).

Das Wort „*Koordinaten*" ist von *Leibniz* eingeführt nach *Tropfke*, Geschichte 2, S. 427; den Ausdruck *Parallel*koordinaten gebraucht besonders *Plücker*, System (1835), S. VII; 16. Über die Einführung *recht- und schiefwinkliger Punktkoordinaten x, y in der Ebene* § 10, **2** durch *Descartes* (1637) und *Fermat* (1601—65) vgl. *M. Cantor*, Geschichte 2 (1892), S. 740; 745; *Tropfke*, Geschichte 2, S. 414—419; auch *E. Gelcich*, Abh. zur Gesch. d. Math., Heft 4 (1882), S. 218.

Die rechtwinkligen Punktkoordinaten *x, y, z im Raume* sind nach *Cantor*, Geschichte 3, S. 401; 755; 761 von *A. Parent* (1700), *A. C. Clairaut* (1731), *J. Hermann* (1732) angewendet, dann aber von *Euler* (Michelsen), Introductio 2 (1748), S. 322 in der Form § 31, (3) erklärt und zuerst ausführlich (Vorzeichen in den 8 Oktanten § 31, **6**) beschrieben worden. Die *schiefwinkligen* Koordinaten § 31, **8** sind bei *Monge-Hachette*, J. éc. polyt., cah. 11 (1802), S. 147 in Gebrauch.

47) Die § 10, **4** und § 31, **4** erforderliche Festsetzung, daß parallele Gerade auch gleichen Sinn haben, ist von *Moebius*, Werke 1, S. 26 allgemein getroffen; vgl. *de Morgan*, Cambr. Dubl. math. J. 6 (1851), S. 157; *Stolz-Gmeiner*, Arithmetik, S. 119.

48) Die Festsetzung § 11, **1** macht *Moebius*, Werke 2, S. 247.

49) Die Formel § 11, (4) ist nur zum Vergleich mit § 32, (9) angeführt.

50) Bezüglich der Abhängigkeit der Gleichheit der Richtungen § 11, **2**; § 12, **4**; § 34, **4** vom Parallelenaxiom vgl. *Gauß*, Werke 4, S. 365; *Killing*, Grundlagen 1, S. 3.

Die beiden *Richtungskosinus* § 11, (11) und die Relation § 11, (12) benutzt *Euler* (Michelsen), Introd. 2, S. 13.

Die drei Richtungskosinus § 33, (4) und die Relation § 33, (18) finden sich

bei *Monge-Hachette,* J. éc. polyt. cah. 11 (1802), S. 130; *Carnot,* Transversales (1806), S. 64; *Gauß* (1828), Werke 4, S. 220.

51) Über die *Polar- und Parallelkoordinaten einer Strecke* in der Ebene § 12, **1**; **2** und im Raume § 34, **1**; **2** und *einer Dreiecksfläche* im Raume § 36, **1**; **3** vgl. *Baltzer,* Geom., S. 53; 364; 376; Determinanten S. 199; für schiefwinklige Koordinaten auch *Baltzer,* J. f. Math. 46 (1853), S. 145. Man nimmt die Länge s § 12, (1); § 34, (1) und den Inhalt § 36, (1) deshalb *absolut,* weil die Richtungskosinus § 12, (2); § 34, (2) und die von n in § 36, **1** schon die Pfeilspitze der Strecke, bezüglich die positive Seite des Dreiecks mit bestimmen; vgl. *Timerding,* Enzyklopädie IV 1, S. 128; 130.

Über die Projektionssätze § 12, (5); § 34, (5); § 36, (3) vgl. *Baltzer,* Elemente 2, S. 298; 333; 335; Geometrie, S. 37; 365; 375.

Die Formeln § 36, (4); (5) geben *Monge-Hachette,* J. éc. polyt., cah. 11 (1802), S. 145; *Meier-Hirsch,* Aufgaben 2 (1807), S. 121; *Magnus,* Aufgaben 2 (1837), S. 71.

52) Die *Polarkoordinaten in der Ebene* § 12, **5** kommen nach *Cantor,* Geschichte 3, S. 462 bei *J. Bernoulli* (1691) vor, die Formeln § 12, (13) gibt *Euler* (Michelsen), Introductio 2, S. 224. Andeutungen über die Polarkoordinaten *im Raume* § 33, (6) sind nach *Cantor,* a. a. O., S. 755 von *A. Cl. Clairaut* (1731) gemacht, in der Form § 33, (5); (8) gebrauchen sie *Monge-Hachette,* J. éc. polyt. cah. 11 (1802), S. 150.

53) Die Sätze § 12, **7** und § 34, **5** enthalten, unabhängig vom Koordinatensystem aufgefaßt, die *Addition der „Vektoren"*; vgl. *Stolz-Gmeiner,* Theoret. Arithmetik, S. 322; *F. Schur,* Zeitschr. Math. Phys. 49 (1903), S. 352; *G. Hamel,* ebenda S. 362. Für die *Vektorentheorie* überhaupt, die für zahlreiche Anwendungen der Koordinatenmethode vorzuziehen ist, vgl. *A. Föppl,* Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität, Leipzig 1894; *A. H. Bucherer,* Elemente der Vektor-Analysis, Leipzig 1903; *R. Gans,* Einführung in die Vektoranalysis, Leipzig 1905; *H. E. Timerding,* Enzyklopädie IV 1, S. 128; *M. Abraham,* ebenda IV 2, S. 6; *E. Jahnke,* Vorlesungen über die *Vektorenrechnung,* Leipzig 1905, S. 11 ff.

54) Die Formeln § 14, (1) gibt nach *Cantor,* Geschichte 3, S. 769 *J. P. de Gua* (1740); vgl. *Euler* (Michelsen), Introductio 2, S. 11; die Formeln § 37, (1) gibt *Euler,* ebenda S. 364.

55) Die Formeln für *zwei rechtwinklige* § 14, (15) und für *ein recht- und ein schiefwinkliges* System § 14, (2) in der *Ebene* gibt *Euler* (Michelsen), Introductio 2, S. 14; 20; *Plücker,* System (1835), S. 17 läßt die Formeln § 14, (12), bezüglich (19) aus der allgemeinen Definition der Dreieckskoordinaten § 28, (1) entstehen.

Die Formeln für *zwei rechtwinklige* Systeme im *Raume* § 37, (2) zu **4** sind von *Euler,* a. a. O., S. 366 zunächst in unsymmetrischer Form mit den Werten § 38, (9) der Koeffizienten abgeleitet; die Formeln für *ein recht- und ein schiefwinkliges* System benutzen *Monge-Hachette,* J. éc. polyt., cah. 11 (1802), S. 147; in der Form § 37, (2) finden sie sich zuerst bei *Carnot,* Transversales (1806), S. 63; *Français,* J. éc. polyt., cah. 14 (1808), S. 185; dann bei *Hachette,* Corr. polyt. 2 (1809), S. 7.

Die allgemeinen Formeln für *zwei schiefwinklige* Systeme § 37, (20) können nach § 41, **9** auch in der Form geschrieben werden:

$$\sin(\eta\zeta, \xi)\cdot\xi = \sin(\eta\zeta, \xi')\cdot\xi' + \sin(\eta\zeta, \eta')\cdot\eta' + \sin(\eta\zeta, \zeta')\cdot\zeta',$$
$$\sin(\zeta\xi, \eta)\cdot\eta = \sin(\zeta\xi, \xi')\cdot\xi' + \sin(\zeta\xi, \eta')\cdot\eta' + \sin(\zeta\xi, \zeta')\cdot\zeta',$$
$$\sin(\xi\eta, \zeta)\cdot\zeta = \sin(\xi\eta, \xi')\cdot\xi' + \sin(\xi\eta, \eta')\cdot\eta' + \sin(\xi\eta, \zeta')\cdot\zeta',$$

in der sie zuerst von *Français,* a. a. O. S. 188; dann von *Hachette,* Corr. polyt. 2 (1811), S. 247 gegeben werden; vgl. auch *Magnus,* Aufgaben 2 (1837), S. 51; *Baltzer,* Geom., S. 383; *Salmon-Fiedler,* Analyt. Geom. des *Raumes* 1, 4. Aufl., S. 12.

56) Die Formeln § 14, (6) und § 37, (2) zu 4 gehören zu den „*orthogonalen*" *Substitutionen:*

$$x_k = \sum_1^n {}^l a_{kl} y_l, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

die dadurch charakterisiert sind, daß:

$$\sum_1^n {}^k x_k^2 = \sum_1^n {}^l y_l^2. \tag{2}$$

In der Tat ist für § 14, (6): $x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2$ und für § 37, (2) zu 4: $x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, wie auch aus der geometrischen Bedeutung der Quadratsummen § 12, (11) und § 33, (15) hervorgeht. Die *Haupteigenschaften* der Koeffizienten der orthogonalen Substitution (1) sind folgende:

$$\sum_1^n {}^k a_{kl}\, a_{km} = 1 \text{ für } l = m; \; = 0 \text{ für } l \neq m; \tag{3}$$

so § 13, (9); § 37, 4: $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, \ldots, \ldots;\; a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0, \ldots, \ldots$ (vgl. Fig. 213 und § 33, (18); § 35, (4));

$$\sum_1^n {}^k a_{lk}\, a_{mk} = 1 \text{ für } l = m; \; = 0 \text{ für } l \neq m; \tag{4}$$

so § 13, (10); § 37, 4: $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \ldots, \ldots;\; b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0, \ldots, \ldots$ (vgl. Fig. 213; § 33, (18); § 35, (4));

Die Determinante der Koeffizienten ist:

$$D = |a_{kl}| = \varepsilon = \pm 1; \tag{5}$$

so § 14, (5); § 37, (10).

Zwischen Unterdeterminanten A_{kl} und Elementen a_{kl} bestehen die Gleichungen:

$$A_{kl} = \varepsilon a_{kl}; \tag{6}$$

so § 14, (8); § 37, (12) (vgl. Anm. 97).

Zur Literatur vgl. *Enzyklopädie* 1, S. 328 (*W. F. Meyer*); *Baltzer,* Determ. S. 172; *Pascal,* Determ. S. 157; *Clebsch-Lindemann,* Vorles. 2, S. 257; 384; *Hesse,* Vorles., Ebene, S. 112; Raum, S. 231.

57) Die orthogonalen Substitutionen § 14, (6) und § 37, (2) zu 4 mit der Determinante $D = +1$ heißen *eigentliche* oder direkte, die mit $D = -1$ *uneigentliche* oder inverse. Die Unterscheidung $\varepsilon = \pm 1$ behandelt ausführlich *Magnus,* Aufgaben 2 (1837), S. 56; vgl. *Hesse*, Vorles. Ebene, S. 108; *Clebsch-Lindemann,* Vorles. Raum, S. 74.

Die Determinante D in § 37, (3) der neun Richtungskosinus eines beliebigen

schiefwinkligen in bezug auf ein rechtwinkliges System findet sich zuerst bei *Français,* J. éc. polyt., cah. 14 (1808), S. 184, der Wert $D = 1$, S. 186; dann bei *Cauchy,* Applications 1 (1826), S. 245; *Gauß* (1828), Werke 4, S. 221.

58) Die Formeln § 1, (7); § 14, (15); § 37, (13) zu **6** sind, wenn die Koordinaten des neuen Anfangspunktes x_0; x_0, y_0; x_0, y_0, z_0 und in den beiden letzten Formeln unter der Voraussetzung $D = +1$ die Richtungskosinus a_1, b_1, a_2, b_2; $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$, beziehungsweise die Winkel φ in § 14, (9) und φ, ψ, χ in § 38, (9) als veränderliche Parameter betrachtet werden, zugleich der analytische Ausdruck der ein-, drei-, sechsgliedrigen *kontinuierlichen Gruppen der Euklidschen Bewegungen* in der Geraden, in der Ebene und im Raume, vgl. *S. Lie,* Transformationsgruppen 3, S. 210.

59) Für den *Inhalt des Dreiecks und Tetraeders* finden sich die spezielleren Formeln von § 15, (4) (in schiefwinkligen Koordinaten) bei *Moebius* (1837), Werke 3, S. 53; von § 39, (8) bei *Gauß* (1827), Werke 4, S. 221 f.; *Moebius,* Werke 3, S. 91; die allgemeineren § 15, (6) und § 39, (7) bei *Magnus*, Aufgaben 1 (1833), S. 30; 2 (1837), S. 69; überall in *entwickelter* Form.

Die *Determinanten*darstellung § 15, (9) und § 39, (11) erscheint bei *A. Cayley,* Cambr. J. 4 (1845), S. 18; *Joachimsthal,* J. f. Math. 40 (1850), S. 23; vgl. *Baltzer,* Leipz. Berichte 22 (1870), S. 97 = J. f. Math. 73 (1871), S. 94; Determ., S. 201; Geom., S. 378; *Hesse,* Vorles. Raum, S. 106; den Inhalt des Tetraeders, durch die Koordinaten der Seitenebenen ausgedrückt, gibt *L. Kronecker,* J. f. Math. 72 (1870), S. 163.

60) Die *Parameterdarstellungen der Geraden* (der Punktreihe) § 16, (2) und § 43, (2) mit der *gemeinen* Koordinate des § 1, **6** als Parameter, gehen auf *Cauchy,* Applications 1 (1826), S. 9 zurück.

In *homogener* Form sind dieselben Parameterdarstellungen der Punktreihe in § 23, (5) und § 50, (14) gegeben. Neben sie treten dann die Parameterdarstellungen § 23, (6) und (7); § 50, (19'); § 50, (18) des *Strahlbüschels* und § 50, (19), (16) des *Ebenenbüschels.*

Das gemeinsame Merkmal dieser *ersten Gruppe von Parameterdarstellungen* ist, daß sie *links gemeine* Koordinaten und *rechts gemeine* Koordinaten enthalten, z. B. in § 23, (5) links x, y, t und rechts x', t'; vgl. Anm. 75. Anwendung finden diese Parameterdarstellungen § 52, **2**; § 71, **10**; § 72, **7**.

61) Die *Gleichung der geraden Linie* überhaupt erscheint zuerst bei *Fermat* nach *Tropfke,* Geschichte 2, S. 419; die Gleichung *der Ebene* bei *Clairaut* nach *Cantor,* Geschichte 3, S. 755.

Die *allgemeine* Gleichung § 16, (6) der Geraden und § 40, (6) der Ebene gibt *Euler* (Michelsen), Introductio 2, S. 17; 368; die Gleichung § 16, (5) *Plücker,* Analytisch geom. *Entwicklungen* 1 (1828), S. 5; *Magnus,* Aufgaben 1 (1833), S. 11; die Gleichung § 40, (1) *Magnus,* Aufgaben 2 (1837), S. 16, in *entwickelter* Form. Über die der Gleichung der Geraden zugrunde liegenden *Axiome* vgl. *Hilbert,* Grundlagen, S. 37.

Die Gleichung der Geraden in *homogenen* § 22, (2) und in *Dreieckskoordinaten* § 29, (2) rührt von *Plücker,* Entw. 2 (1828), S. 11, bezüglich System (1835), S. 5 her. Die entsprechenden Entwicklungsstufen der Gleichung der Ebene vgl. § 40, (2); § 47, (2); § 58, (3).

62) Die Sätze § 16, **5** und § 40, **4** bilden das Anfangsglied der in § 24 und § 51 entwickelten Identitätensätze.

63) An die Bestimmung der Schnittpunkte L, M in § 16, (14) reiht sich die der Punkte L, M, N in § 40, (13) an; die letztere ist nach *Cantor*, Geschichte 3, S. 761 von *J. Hermann* (1732) angegeben.

64) In schiefwinkligen Koordinaten behandelt die Gerade und die Ebene besonders *Baltzer*, J. f. Math. 46 (1853), S. 145.

65) Über die Festsetzungen § 17, **1** und § 41, **1** vgl. *Baltzer*, Geom., S. 172; 372; die Definition des *inneren Winkelraums* § 42, **4** nach *Kronecker*, J. f. Math. 72 (1870), S. 160.

66) Die allgemeinen Formeln § 17, (7) und § 41, (6), die bei *Monge-Hachette*, J. éc. polyt., cah. 11 (1802), S. 148 angewendet werden, finden sich entwickelt bei *Magnus*, Aufgaben 1 (1833), S. 17; 2 (1837), S. 37; jedoch ist die Frage des Vorzeichens erst bei *Hesse*, Vorles. Ebene, S. 17; Raum, S. 18 klargelegt worden.

Den senkrechten Abstand eines Punktes von einer Ebene in *schiefwinkligen* Koordinaten gibt *Chasles*, Deux principes (1837), S. 765.

67) Die *Normalform der Gleichung der Geraden* § 17, (10) und *der Ebene* § 41, (15) gibt *Magnus*, Aufgaben 1 (1833), S. 15; 2 (1837), S. 36 im Anschluß an *Plücker*, Entwickl. 1 (1828), S. 14; auch die Gleichungen der Halbierungselemente § 18, (18′) und § 42, (20) mit den abgekürzt bezeichneten linken Seiten der Normalformen gibt im Anschluß an *Plücker*, a. a. O. S. 15 zuerst *Magnus*, Aufgaben 2, S. 40. Umfassenderen Gebrauch von der Normalform macht *Hesse*, Vorles. Ebene, S. 19 ff.; Raum, S. 19 ff.

68) Der Gebrauch der Abkürzungen § 18, (10); § 42, (11), wie schon § 6, **8**; § 7, **9**; **13**; § 9, **1**—**4** leitet die *Methode der abgekürzten Bezeichnungen* ein, die besonders in § 25; § 26; § 27; § 55 weitere Verwendung findet. Diese Methode, die bei *Lamé*, *Examen* des différentes méthodes (1818), S 26 ff. und *Bobillier*, Ann. de math. 18 (1827/28), S. 320 beginnt, ist in ihrer vollen Bedeutung erkannt und begründet worden von *Plücker*, Entwickl. 1 (1828), S. IV; 241; J. f. Math. 5 (1829), S. 268 = Werke 1, S. 159; 6 (1829), S. 112 = Werke, S. 183; 10 (1831), S. 217 = Werke, S. 235; 11 (1831), S. 26 = Werke 1, S. 253; System (1835), S. IV; vgl. auch *Magnus*, Aufgaben 1 (1833), S. 26; ferner *A. Clebsch* in Plückers Werken 1, S. XVII und *A. Schoenflies*, ebenda S. 618; *F. Klein*, Gött. Anzeigen 1872, S. 9; *Salmon-Fiedler*, Kegelschnitte, S. 63.

69) Die *Gleichung des Strahl- und Ebenenbüschels* § 18, (14) und § 42, (15) gibt zuerst *Lamé*, Examen (1818), S. 28; dann *Plücker*, Entwickl. 1 (1828), S. 16. Die genaue Bedeutung des Parameters § 18, (15) und § 42, (16) findet sich zuerst bei *Magnus*, Aufgaben 1 (1833), S. 24; 2 (1837), S. 40.

Die Formen § 18, (22); § 22, (21); § 29, (15); § 42, (24); § 47, (23); § 58, (17) der Büschelgleichungen sind dem Charakter der *homogenen* Koordinaten angepaßt.

70) Bei *Hesse*, Vorles. Ebene, S. 29; Raum, S. 29; *Clebsch-Lindemann*, Vorles. 1, S. 37; 2, S. 31 wird der allgemeine Satz § 18, (25) und § 42, (27) aus dem speziellen § 18, (27) und § 42, (29) mittels der Transformation § 9, **6** abgeleitet.

Der Satz für *harmonische Strahlen* $\mu_2 = -\mu_1$ in § 18, (27) gibt *Plücker*, Entwickl. 1 (1828), S. 23; System (1835), S. 22 auch für konjugiert *imaginäre* Grundstrahlen.

71) Die *Koordinaten der geraden Linie* § 19, **1** sind von *Plücker*, J. f. Math. 6 (1829), S. 107 = Werke 1, S. 178; Entwickl. 2 (1831), S. VII; 1 ff. ein-

geführt; die *Koordinaten der Ebene* § 45, **1** ebenfalls von *Plücker*, J. f. Math. 9 (1831), S. 124 = Werke 1, S. 224; System (1846), S. 1, danach auch von *Chasles*, Deux principes (1837), S. 636 aufgenommen.

Die allgemeine *Gleichung des Punktes* in Linienkoordinaten § 19, (5) erscheint gleichzeitig bei *Plücker*, Werke 1, S. 179; Entwickl. 2, S. 7; in Ebenenkoordinaten § 45, (5) bei *Plücker*, Werke 1, S. 225; *System* der Geometrie des Raumes (1846), S. 2. Die weiteren Entwicklungsstufen vgl. § 22, (2'); § 29, (2'); § 47, (2'); § 58, (3').

72) Die Formel § 19, (15) gibt *Plücker*, J. f. Math. 6 (1829), S. 112 = Werke 1, S. 183; Entw. 2 (1831), S. 10; vgl. *Hesse*, Vorles., Ebene, S. 51; zu § 45, (15) Raum, S. 55.

73) Die *Normalform der Gleichung des Punktes* ist von *Plücker*, Entw. 2 (1831), S. 6 angedeutet und in der Form § 19, (16) und § 45, (16) von *Hesse*, Vorles., Ebene, S. 50; Raum, S. 54 eingeführt und verwertet.

Die Gleichungen der *Halbierungspunkte* § 20, (7) finden sich bei *Plücker*, a. a. O. S. 8; § 46, (7) bei *Hesse*, Vorles., Raum, S. 55.

74) Die *Gleichung der Punktreihe* § 20, (3) gibt *Plücker*, J. f. Math. 6 (1829), S. 111 = Werke 1, S. 182; Entw. 2 (1831), S. 8; für den Raum § 46, (3) vgl. *Hesse*, Vorles., Raum, S. 60.

Auch die Darstellung *harmonischer Punkte* mit $\mu_2 = -\mu_1$ in § 20, (14), vgl. § 46, (14), verdankt man *Plücker*, Entw. 2, S. 8; für konjugiert *imaginäre* Grundpunkte System (1835), S. 39.

Die weitere Entwicklung vgl. § 22, **10**; § 29, **8**; § 47, **11**; § 58, 8.

75) Die Parameterdarstellung § 20, (17) gibt *Plücker*, Entw. 2 (1831), S. 8. Mit ihr beginnt (vgl. Anm. 60) eine *zweite Gruppe von Parameterdarstellungen* von Punktreihe § 20, (17) und § 46, (17), Strahlbüschel § 20, (17') und Ebenenbüschel § 46, (17'), bei denen *links gemeine* Koordinaten und *rechts* die einfache λ oder die multiplizierte *Verhältniskoordinate* $\mu (= \varkappa\lambda)$ auftreten; vgl. Anm. 80.

76) Die *Transformation der Linienkoordinaten* § 21, **2**; **3** betrachtet *Plücker*, Entw. 2 (1831), S. 41; *Hesse*, Vorles., Ebene, S. 109; *Clebsch-Lindemann*, Vorles. 1, S. 61; die Transformation der *Ebenenkoordinaten* § 45, **10**; § 50, **1** *Hesse*, Vorles., Raum, S. 234.

77) Die *homogenen gemeinen Koordinaten des Punktes* x, y, t in der Ebene § 22, **1** und x, y, z, t im Raume § 47, **1**, ferner u, v, s *der Geraden* in der Ebene § 22, **1** und u, v, w, s *der Ebene* im Raume § 47, **1** haben alle das gemeinsame Merkmal, mit $t = 1$, bezüglich $s = 1$ in die gemeinen Koordinaten § 10, **2**; § 31, **2**; § 19, **1**; § 45, **1** überzugehen; diese sind, eben weil sie die Möglichkeit $t = 0$ oder $s = 0$ ausschließen, weniger allgemein als jene.

Die homogenen gemeinen Koordinaten sind für die Ebene von *Plücker*, Entw. 2 (1831), S. 11 und für den Raum von *Plücker* (1865), Werke 1, S. 525, an welchen Stellen sich auch die *Bedingung der vereinigten Lage* § 22, (5) und bezüglich § 47, (5) findet, eingeführt, inzwischen aber in ihrer Bedeutung bei der Anwendung der Determinanten und der homogenen Formen von *Hesse*, J. f. Math. 28 (1844), S. 104 = Werke, S. 132; Vorles., Ebene, S. 137 ff.; Raum, S. 67 ff. gewürdigt und ausgiebig verwertet worden.

Sie gehen mit $a_1, b_1, c_1 = 1, 0, 0$; $a_2, b_2, c_2 = 0, 1, 0$; $a_3, b_3, c_3 = 0, 0, 1$ aus den Dreieckskoordinaten § 28, (1) und entsprechend aus den Tetraederkoordinaten § 57, (1) als Spezialfälle hervor, vgl. *Plücker*, System (1835), S. VII; *Hesse*,

Vorles., Raum, S. 227 und besonders *Fiedler*, Ges. Zürich 15 (1870), S. 163; 177; Darstell. Geom. 3, S. 89; 123; *Salmon-Fiedler*, Raum 1, S. 57.

78) Die *Gleichung der unendlich fernen Geraden* erscheint zuerst in Dreieckskoordinaten bei *Plücker* (1829), Werke, S. 131; die Gleichung § 22, (6) deutet *Plücker*, System (1835), S. VII; S. 15; 137 an; S. 15 bezeichnet er die unendlich ferne Gerade als dritte Seite des gewöhnlichen Koordinatensystems, wie § 22, Fig. 129. Die Gleichungen § 22, (9); (10), sowie (19) gibt *Plücker*, Entw. 2 (1831), S. 5.

Die Gleichung § 47, (6) der unendlich fernen *Ebene* ist angedeutet bei *Chasles*, Deux principes (1837), S. 581; *Plücker*, System (1846), S. 5. Das Koordinatentetraeder mit drei unendlich fernen Ecken § 47, Fig. 263, sowie die Gleichungen § 47, (21) gibt *Plücker*, System (1846), S. 7.

79) Die Spezialfälle § 22, **8** und § 47, **9** sind dem Inhalte nach im wesentlichen von *v. Staudt*, Geom., S. 25 hervorgehoben.

80) Die Parameterdarstellungen § 22, (24) und (24′), sowie § 47, (26) und (26′) sind besonders von *Hesse*, Vorles., Ebene, S. 138; 140; Kegelschnitte, S. 8; 21; Raum, S. 69; 71 mit homogener Schreibweise von μ aufgestellt und gebraucht worden. Sie gehören mit denen von § 49, (22); (30); § 52, (33); (33′) insofern noch zu der *zweiten Gruppe von Parameterdarstellungen* (Anm. 75), als sie *links* homogene *gemeine* Koordinaten (x, y, t in § 22, (24′)) und *rechts* multiplizierte *Verhältnis*koordinaten μ, bezüglich (vgl. § 7, (8)) *Zweiecks-(seits)*koordinaten enthalten.

An sie schließt sich endlich die *dritte Gruppe von Parameterdarstellungen* § 29, (18); (18′); § 30, (24); (24′); § 58, (20); (20′); § 64, (3); (3′); (4); (4′); (12); (12′) an, die *links Dreiecks- und Tetraederkoordinaten* und *rechts Zweiecks-* (seits- oder flachs-) *Koordinaten* aufweisen; vgl. *Moebius* (1827), Werke 1, S. 60; *H. Graßmann* (1855), Werke 2, S. 138; *Clebsch-Lindemann*, Vorles. 1, S. 70; 2, S. 98.

Über die doppelte *Anwendung* aller dieser Parameterdarstellungen vgl. einerseits § 67, **3**; § 69, **3** und andererseits § 71, **10**; **12**; § 72, **7**.

81) Die doppelte Form der *Bedingungen der vereinigten Lage in Determinantenform* einerseits und *in der Form von Identitäten* andererseits gehen auf *Lamé*, Examen (1818) zurück, wo S. 31 die Bedingung § 24, (7) und S. 29; 32 die „Identität" (6), sowie S. 34; 36 die Bedingungen § 51, (7) und (16) vollständig angegeben sind; sie finden sich alsdann bei *Plücker*, Entw. 1 (1831), S. 27; 2, S. 8 f.; überall zunächst ohne die Bezeichnung der Determinanten. Die vollständige Angabe der Identitätensätze folgt bei *Hesse*, Vorles., Ebene, S. 21; 53; Raum, S. 20; 56; die Einführung der Determinanten ebenda Raum, S. 105; vgl. *H. Graßmann*, J. f. Math. 49 (1855), S. 3 = Werke 2, S. 138; *Baltzer*, Geom., S. 406.

82) Auf die Spezialfälle § 24, **9** weist *v. Staudt*, Geom., S. 13 hin; vgl. *Plücker*, Entw. 1 (1829), S. 36.

83) Die Beweise § 24, **10**; § 52, **5**; **10**, die *Clebsch-Lindemann*, Vorles. 1, S. 45; 2, S. 34 gibt, beruhen auf der Herstellung der Gleichungsformen § 66, (10), (11) aus der Voraussetzung der perspektiven Lage, ebenso wie § 5, (4) auf der Herstellung der Form § 65, (11).

84) Über den Ursprung der *Transversalensätze beim Dreieck* § 25, (16′) bei *Menelaos* und § 25, (19) bei *G. Ceva* vgl. *Cantor*, Geschichte 1, S. 350; 3, S. 18; *Tropfke*, Geschichte 2, S. 91; vgl. ferner *Carnot*, géom. (1803), S. 276; 281; trans-

versales (1806), S. 65 ff.; *Poncelet,* Traité (1822), S 78; 84; zur Vorzeichenbestimmung *Moebius* (1827), Werke 1, S. 238. Die analytischen Beweise § 25, **2**; **3** rühren im wesentlichen von *Plücker,* Entw. 1 (1829), S. 16; 2 (1831), S. 30 her; vgl. *Plücker,* System (1835), S. 44.

Über die Transversalensätze *bei der Ecke* und *beim sphärischen Dreieck* § 54, **4** und **6** vgl. *Carnot,* transversales, S. 86; *Moebius,* Werke 1, S. 198; *Baltzer,* Elemente 2, S. 201; 262; *Hesse,* Vorles., Raum, S. 23; 25.

Die entsprechenden Sätze über das *Tetraeder* beziehen sich entweder auf *Transversalebenen* durch die sechs Kanten § 55, **4** oder auf *Transversalstrahlen* durch die vier Ecken § 62, **2**. Von jenen (vgl. *Tropfke,* Geschichte 2, S. 386) sind die auf die Halbierungsebenen bezüglichen Sätze § 55, **5** analytisch von *Magnus*, Aufgaben 2, S. 49; *Hesse,* Vorles., Raum, S. 26 behandelt; diese von *O. Hermes,* J. f. Math. 56 (1858), S. 220; vgl. *K. Doehlemann,* Arch. Math. Phys. (2) 17 (1900), S. 160.

85) Zur Geschichte des Satzes vom *Höhenschnittpunkt* § 25, **7** vgl. *Baltzer,* Elemente 2, S. 41; *Tropfke*, Geschichte 2, S. 87. Der entsprechende Satz für das *Tetraeder* § 62, **4** ist von *Steiner,* J. f. Math. 2 (1827), S. 97 = Werke 1, S. 128; Entw. (1832), S. 316 = Werke 1, S. 454 angegeben; der analytische Beweis § 62, **4** rührt, abgesehen vom Gebrauch der Linienkoordinaten, von *O. Hermes,* J. f. Math. 56 (1858), S. 241 her; vgl. *Joachimsthal,* Arch. Math. Phys. (1) 32 (1859), S. 109; *Schröter,* Oberflächen (1880), S. 95; 204.

86) Die Begriffe *Harmonikalpunkt* und *Harmonikale* § 26, **1**, ursprünglich als *Pol* und *Polare* in bezug auf das Dreieck bezeichnet, finden sich bei *Plücker,* Entw. 2 (1831), S. 24; 269; System (1835), S. 10; 34 im wesentlichen in der Weise § 26, **1—3** abgeleitet; vgl. *v. Staudt,* Geom. (1847), S. 48; *Hermes,* J. f. Math. 56 (1858), S. 204; *Cremona,* Ann. di mat. (1) 2 (1859), S. 21; *Hesse,* Vorles. Ebene, S. 40; *Schröter,* Oberflächen, S. 287; *Fiedler*, Darst. Geom. 3, S. 79; 176.

Die Harmonikale eines Punktes ist nach § 28, **11** auch seine Polare in bezug auf das als Kurve 3. Ordnung: $x_1 x_2 x_3 = 0$ betrachtete Dreieck.

Die *Harmonikalebene* § 55, **8** und die Harmonikalbeziehungen § 62, **3** werden von *Hermes*, J. f. Math. 56 (1858), S. 205 gegeben.

87) Das *vollständige Vierseit* führt *Carnot*, Géom. (1803), S. 120; transversales (1806), S. 69 ein, die duale Unterscheidung zwischen *Viereck* und *Vierseit* § 27, **1** *Steiner,* Entw. (1832), S. 72 = Werke 1, S. 287. Zu den Sätzen über die *harmonischen* Beziehungen § 27, **4**; **6**; **7** vgl. *Tropfke*, Geschichte, S. 52; 92; 96; *Carnot,* Géom., S. 282; transversales, S. 74; *Poncelet,* Traité (1822), S. 82; *Moebius* (1827), Werke 1, S. 239; *Plücker,* Entw. 1 (1828), S. 23; 2 (1831), S. 30. Der analytische Beweis § 27, **2**; **3**; **4**; **6** ist von *Hesse,* Vorles. Ebene, S. 43; *Clebsch-Lindemann,* Vorles. 1, S. 56 ausgebildet.

Entsprechende Sätze über das *Fünfflach* (Fünfeck) und *Sechsflach* im *Raume* hat *Hermes,* J. f. Math. 56 (1858), S. 208; 210; 247 abgeleitet.

88) Die *Konstruktion* des vierten harmonischen Elementes § 27, **5** rührt nach *Cantor,* Geschichte 3, S. 122 von *de la Hire* (1639) her; sie findet sich alsdann bei *Brianchon,* lignes (1817), S. 9; *Steiner,* Entw. (1832), S. 75 = Werke 1, S. 290; *v. Staudt*, Geom., S. 43.

89) Die ersten *Dreiecks- und Tetraederkoordinaten* sind die *baryzentrischen* Koordinaten von *Moebius* (1827), Werke 1, S. 50 ff. Sie schließen sich zunächst an die homogen geschriebene reine Verhältniskoordinate $E_1 P : E_2 P$ in § 6, (1)

an und verhalten sich wie die Dreiecke $E_2 E_3 P : E_3 E_1 P : E_1 E_2 P$ in § 28, Fig. 160 und die Tetraeder $E_2 E_3 E_4 P : E_3 E_1 E_4 P : E_1 E_2 E_4 P : E_3 E_2 E_1 P$ in § 57, Fig. 304. Aus den allgemeinen Dreiecks- und Tetraederkoordinaten gehen sie, ähnlich wie die reine Verhältniskoordinate aus den allgemeinen Zweiecks-koordinaten (Anm. 38), dadurch hervor, daß der Einheitspunkt E_0 § 28, Fig. 163 und § 57, Fig. 304 in den Schwerpunkt des Dreiecks oder Tetraeders verlegt wird; die zugehörige Einheitslinie § 28, **10** und Einheitsebene § 57, **9** wird dann unendlich fern, vgl. *Plücker*, System (1835), S. 11; *Hermes*, J. f. Math. 56 (1859), S. 205; vgl. auch *Klein*, Vorles., S. 25; *Jahnke*, Vektorenrechnung, S. 93.

Die *allgemeinen* Dreiecks- und Tetraederkoordinaten des Punktes und der Geraden in der Ebene § 28, **1—8**, des Punktes und der Ebene im Raume § 57, **1—8** sind eine Schöpfung von *Plücker*, J. f. Math. 5 (1829), S. 1 = Werke 1, S. 124; Entw. 2 (1831), S. 2; System (1835), S. 5 ff.; System (1846), S. 3 ff.; vgl. auch *Hesse*, Vorles. Ebene, S. 143; Raum, S. 222; *Kronecker*, J. f. Math. 72 (1870), S. 159 und zu § 28, **8**; § 57, **8** *Clebsch-Lindemann*, Vorles. 1, S. 62; 2, S. 80.

Durch die *Doppelverhältnisse* § 28, **14**; § 57, **12** erklärt die Dreiecks- und Tetraederkoordinaten im Anschluß an *v. Staudt*, Beiträge S. 266, zuerst *Fiedler*, Ges. Zürich 15 (1870), S. 152 ff.; vgl. Darstell. Geom. 3, S. 72 ff.; *Salmon-Fiedler*, Kegelschnitte, S. 102 ff.; Raum 1, 4. Aufl., S. 50; vgl. ferner *Lüroth*, Math. Ann. 8 (1875), S. 207; *R. Sturm*, Math. Ann. 9 (1876), S. 343; *Killing*, Grundlagen 1, S. 119.

90) Die Formeln § 28, (24) gibt zuerst *Plücker*, System (1835), S. 10; vgl. § 56, (33); § 57, (24).

91) Die *Transformation* der baryzentrischen Koordinaten behandelt *Moebius*, Werke 1, S 58. Die allgemeine Transformation *der Dreiecks- und Tetraederkoordinaten* § 30 und § 63 wird von *Plücker*, System (1846), S. 49 und *Hesse*, Vorles. Raum, S. 225; 259 auf die linearen Substitutionen § 30, (1) und § 63, (1) zurückgeführt; vgl. *Salmon-Fiedler*, Kegelschnitte, S. 115; *Fiedler*, Darstell. Geom. 3, S. 421.

92) Über den Zusammenhang des Grund- und Aufrißverfahrens mit der Koordinatenbestimmung § 31, **7** vgl. *Cantor*, Geschichte 2, S. 619; 3, S. 767; *Chr. Wiener*, Darstellende Geometrie 1, S. 17; 23; 24; *Fiedler*, Darstell. Geom. 1, S. 261.

93) Die Festsetzungen § 32, **2** (vgl. § 1, **3**; § 2, **3**) und § 32, **5** gibt *Baltzer*, Elemente 2, S. 170; Geom., S. 372. Über den Winkel einer Geraden gegen eine Ebene § 32, **8** vgl. *Baltzer*, Elem. 2, S. 455; Geom., S. 413.

94) Der Ausdruck § 32, (9) findet sich zur Bestimmung des Rauminhaltes eines Tetraeders bei *G. Monge*, Corr. polyt. 2 (1809), S. 5; vgl. *Tropfke*, Geschichte 2, S. 385. Daß ein eigner Name für ihn erwünscht sei, betont *Jacobi*, J. f. Math. 2 (1827), S. 228 = Werke 3, S. 48 bei Gelegenheit der Formel:

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$$
$$= 4\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}.$$

Den Namen „*Sinus eines Dreikants (einer dreiseitigen Raumecke)*“ führt alsdann *v. Staudt*, J. f. Math. 24 (1842), S. 255 für das Produkt: $\sin\xi\eta\cdot\sin(\xi\eta,\zeta)$ in § 41, (26) ein; vgl. *Moebius*, Werke 3, S. 88. Die Formeln § 41, (27) gibt *Français*, J. éc. polyt. 14 (1808), S. 190. Über die Bezeichnung Ecke vgl. *Tropfke*,

a. a. O., S. 376. Daß der Ausdruck unter der Wurzel in § 32, (9) positiv und zwischen 0 und 1 gelegen ist, beweist direkt *Baltzer*, Geom., S. 374; 380; 383; Determ., S. 199; vgl. auch Elemente 2, S. 182; 322; 347; ferner *Jahnke*, Vektorentheorie, S. 103.

Zur *Analogie zwischen* $\sin xy$ *und* $\sin xyz$ vgl. § 11, (4) und § 32, (9); § 14, (3) und § 37, (9); § 14, (19) und § 37, (20); § 15, (3) und § 39, (9); § 15, (9) und § 39, (11).

95) Die Bedingung § 33, (18):

$$a^2 + b^2 + c^2 - 1 = \begin{vmatrix} a^2 - 1 & a^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 - 1 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

drückt zugleich aus, daß die *drei Kegel* k_α, k_β, k_γ (§ 33, 10):

$$(a^2 - 1)x^2 + a^2(y^2 + z^2) = 0,$$
$$(b^2 - 1)y^2 + b^2(z^2 + x^2) = 0,$$
$$(c^2 - 1)z^2 + c^2(x^2 + y^2) = 0,$$

je mit *beiden* Mänteln genommen, vier gemeinsame Erzeugende haben.

96) Die Formel § 35, (1) gibt *Carnot*, Transversales (1806), S. 64; *Français*, J. éc. polyt. 14 (1808), S. 189; *Gauß* (1827), Werke 4, S. 220.

97) Die Gleichungen § 37, (12) kommen zuerst bei *Français*, J. éc. polyt. 14 (1808), S. 186 und *Chasles*, Corr. polyt. 3 (1816), S. 302 vor, dann bei *Jacobi*, J. f. Math 8 (1831) = Werke 3, S. 107; *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 55; *Baltzer*, Determ., S. 173, IV; vgl. Anm. 56. Auch die Formeln § 41, (23) geben mit $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und a_3, b_3, c_3 für a, b, c die dritte Kolonne der Formeln § 37, (12).

98) Die Darstellung § 38, (9) gibt *Euler* (Michelsen), Introductio 2, S. 366; vgl. *Monge-Hachette*, J. éc. polyt., cah. 11 (1802), S. 149; *Magnus*, Aufgaben 2, S. 66; *Baltzer*, Geom., S. 385; Determ., S. 172. Über die *rationale Parameterdarstellung* der Koeffizienten der orthogonalen Substitution vgl. *Baltzer*, Det., S. 175; *Pascal*, Det., S. 160; *Enzyklopädie* 1, S. 328.

99) Den Ausdruck „*Stellung einer Ebene*" § 41, 2 führt *v. Staudt*, Geom. (1847), S. 16 ein; vgl. *Baltzer*, J. f. Math. 46 (1853), S. 145; Elemente 2, S. 145.

100) Die Gleichungen § 43, (10) folgen durch Entwicklung der nach Anm. 1, IV, 3 identischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad i = 1, 2$$

nach den Elementen der ersten Zeile (Anm. 1, III, (17)). Daß eine der drei Gleichungen aus den zwei andern folgt, entspricht einer nach *Cantor*, Geschichte 3, S. 755 von *Clairaut* gemachten Bemerkung.

Die Gleichungen § 43, (13) folgen auch aus (5) durch Elimination von z und y; daß die algebraische Elimination der geometrischen Projektion entspricht, hebt *Monge*, Géométrie déscriptive, hrsg. v. *Haußner*, S. 78 hervor.

101) Das *Moment zweier geraden Linien* § 44, (12); (25); § 48, (25) wird von *A. Cayley*, Trans. Cambr. Phil. Soc. 11, part. 2 (1869), S. 294 definiert, vgl. auch

Brioschi, J. f. Math. 50 (1855), S. 236; *Salmon-Fiedler,* Raum 1, S. 46; *Baltzer,* Geom., S. 418; *Clebsch-Lindemann,* Vorles. 2, S. 47; zu § 44, **9** *Timerding,* Enzyklopädie IV 1, S. 136.

Der Unterschied des *Schraubensinnes dreier* gerichteten Geraden § 32, **10** und desjenigen *zweier* gerichteten Geraden in § 44, **8** entspricht dem Unterschied der Determinanten § 37, (3) und § 44, (12); jener hängt *nur* von der *Richtung* der drei Geraden (die sich auch in einem Punkte schneiden können, § 32, 8), dieses auch von der *Lage* der zwei Geraden ab (die sich *nicht* schneiden dürfen).

102) Die beiden Aufgaben § 43, **10** und § 44, (22) behandelt *Magnus,* Aufgaben 2, S. 29; 39; die Formeln § 44, (19) und (22) vgl. bei *Salmon-Fiedler,* Raum 1, S. 42f.; 46.

103) Über die geschichtliche Entwicklung der *Liniengeometrie* vgl. *A. Clebsch* in *Plücker*'s Werken 1, S. XXX; *A. Schoenflies,* ebenda S. 620.

Als *Koordinaten der geraden Linie* im Raume wurden ursprünglich von *Plücker,* System (1846), S. 322; Proc. R. Soc. London 14 (1865) = Werke 1, S. 463; Phil. Trans. R. Soc. London 155 (1865) = Werke 1, S. 471 die *vier* Größen b_0, b, c_0, c in § 43, **7** oder andere nicht homogene Konstanten eingeführt, aber schon a. a. O. (1865), Werke 1, S. 527 und Neue Geometrie (1868), S. 2 geht *Plücker* zu den *sechs homogenen* durch die Gleichung § 48, (5) verbundenen Koordinaten § 48, (3) über. Dieselben wurden von *Cayley,* Quart. J. 3 (1860), S. 225 5 (1862), S. 81 als „neue Koordinaten" angewendet, um eine Raumkurve mittels des von einem beliebigen Punkte über ihr errichteten Kegels darzustellen, aber nicht als *Linien*koordinaten bezeichnet. Als solche behandelt sie *Cayley*, Trans. Cambr. Phil. Soc. 11, part 2 (1869), S. 290. Die Bezeichnung § 48, (3) stimmt mit *Salmon-Fiedler,* Raum, S. 70 überein und lehnt sich bereits an die von § 59, (1) an.

Die *Tetraederkoordinaten* der Geraden § 59, **1** erscheinen bei *F. Klein,* Dissert. (1868) = Math. Ann. 23, S. 540; ohne die Indizesbezeichnung auch bei *G. Battaglini,* Giornale di mat. 6 (1868), S. 24; 239; weiter bei *Klein*, Math. Ann. 2 (1870), S. 200; *v. Drach*, ebenda S. 128; *W. Fiedler*, Ges. Zürich 15 (1870), S. 179; vgl. Darstell. Geom. 3, S. 143; *Salmon-Fiedler*, Raum 1, S. 65; *Pasch,* J. f. Math. 75 (1873), S. 106.

104) Den Satz § 48, **2** und die Hauptgleichungen § 48, (4) gibt *Plücker* (1865), Werke 1, S. 526; vgl. *Klein,* Math. Ann. 23 (1884), S. 541 und die allgemeineren Entwicklungen bei *Klein,* Vorles., S. 235.

Zu der Gleichung § 48, (10); § 59, (7) vgl. den allgemeinen Satz von *Brill,* Math. Ann. 4 (1871), S. 530; *Pasch,* J. f. Math. 75 (1873), S. 108.

105) Den Ausdruck „*Strahlbündel*" führt *v. Staudt,* Geom. (1847), S. 4 an Stelle des von *Steiner,* Syst. Entw. (1832), S. XIV = Werke 1, S. 237 und *F. Seydewitz*, Arch. Math. Phys. (1) 9 (1846), S. 166 gebrauchten Ausdruckes „räumliches Strahlbüschel" ein. *Strahlbündel* und *Ebenenbündel* sind ebenso wie *Punktfeld* und *Strahlfeld* (ebenes System) hinsichtlich ihrer Mächtigkeit (∞^2 Elemente) nach *v. Staudt,* a. a. O. S. 11, *Grundgebilde zweiter Stufe* (vgl. Anm. 13). In jedem solchen Gebilde dienen *zwei nicht homogene*, bezüglich *drei homogene* gemeine Koordinaten zur Bestimmung der Elemente: *im Felde* für den Punkt x, y, t § 22, **1**; § 49, **2** und x, y, z § 49, **2**, für den Strahl u, v, s § 22, **1**; § 49, **3** und u, v, w § 49, **4**; *im Bündel* für die Ebene u, v, w und u, v, s

§ 49, **5**; **10**, für den Strahl x, y, z und x, y, t § 49, **6**; **11**; die Koordinaten des Strahles in *Ebene* und *Bündel* sind Spezialfälle der Koordinaten p_{kl}, q_{kl} des Strahles im *Raume* § 49, **3**; **4**; **6**; **11**.

Die gemeinen Koordinaten im Bündel (Koordinaten einer Richtung § 38, **8** oder Stellung § 42, **3** nach *Baltzer*, Geom., S. 364; 372; 400) finden sich bei *Cayley*, Cambr. Dubl. Math. J. 1 (1846), S. 29; *Salmon-Fiedler*, Kegelschnitte, S. 677; Raum 1, S. 427. Die Sätze § 49, **15**; **16** gibt im wesentlichen *Cayley*, a. a. O. S 29.

Die ersten Dreikants-(Dreiflachs-)koordinaten im Bündel § 56, **4** sind die baryzentrischen Koordinaten der Kugelpunkte von *Moebius* (1846), Werke 2, S. 32; 33.

Über den Gegensatz zwischen der Geometrie der Kugelfläche (des Bündels) und der der Ebene vgl. *Fiedler*, neuere Geom., S. 234; *Killing*, Grundlagen 1, S. 52; *Poincaré*, Wissenschaft, S. 39; zur älteren Geschichte der Geometrie der Kugelfläche *Tropfke*, Gesch. 2, S. 259 ff.

106) Die *Gleichung des Ebenenbündels* § 53, (2) rührt von *Lamé*, Examen (1818), S. 29 her; vgl. *Magnus*, Aufgaben 2 (1837), S. 20; *Hesse*, Vorles. Raum, S. 70; *Clebsch-Lindemann*, Vorles. 2, S. 99; vgl. § 58, (25).

Über die *Gleichungen des Strahlbündels* § 53, (6) vgl. *Salmon-Fiedler*, Raum 1, S. 216; vgl. § 58, (26).

107) Die *Parameterdarstellung von Punktfeld und Ebenenbündel* folgt der Entwicklung des Koordinatenbegriffs. Bei der *ersten* Gruppe solcher Darstellungen werden gemeine Koordinaten im Raume durch gemeine im Punktfeld und Ebenenbündel dargestellt: § 40, (19) x, y, z durch ξ, η; § 50, (8) $x, y, z, t : x', y', t'$; § 45, (19) $u, v, w : \lambda, \mu, \nu$; § 50, (10) $u, v, w, s : u', v', w'$; § 50, (12) $u, v, w, s : u', v', s'$.

Bei einer *zweiten* Gruppe sind gemeine Koordinaten durch allgemeine Verhältniskoordinaten ausgedrückt: § 53, (3') x, y, z, t durch μ_1, μ_2, μ_3; § 53, 3 $u, v, w, s : \mu_1, \mu_2, \mu_3$.

Die *dritte* Gruppe gibt die Tetraederkoordinaten im Raume abhängend von den Dreieckskoordinaten des Punktes im Felde und den Dreiflachskoordinaten der Ebene im Bündel: § 58, (29'); (29); § 64, (1); (1'); die entsprechende Darstellung des Punktfeldes in baryzentrischen Koordinaten (Anm. 89) gibt *Moebius* (1827), Werke 1, S. 71.

Anwendung finden diese Parameterdarstellungen in § 52, **9**; § 69, **3**; § 72, **5**.

108) Die *Parameterdarstellungen von Strahlbündel und Strahlfeld* lehnen sich an die Plückerschen Linienkoordinaten an. Die *erste* Gruppe gibt die sechs gemeinen Linienkoordinaten im Raume dargestellt durch gemeine Koordinaten des Strahles in Bündel und Feld: § 50, (11) p_{kl} durch x', y', z'; § 50, (13) $p_{kl} : x', y', t'$; § 50, (9) $p_{kl} : u', v', s'$; die *zweite* Gruppe durch allgemeine Verhältnis-(Dreiflachs oder Dreiecks-)koordinaten: § 53, (7) q_{kl} durch ν_1, ν_2, ν_3; § 53, (7') $p_{kl} : \nu_1, \nu_2, \nu_3$. Die *dritte* Gruppe gibt die sechs Tetraederkoordinaten der Linie durch ihre Dreiflachs- und Dreieckskoordinaten in Bündel und Feld: § 64, (2); (2'), nach *Klein*, Math. Ann. 23 (1868), S. 545; 2 (1870), S. 200.

109) Die Bedingungen § 59, (25); (25') gibt *Klein*, Math. Ann. 23 (1884), S. 545.

110) Die *Gleichung der geraden Linie in Linienkoordinaten* § 60, (8) gibt inhaltlich (vgl. Anm. 103) zuerst *Cayley*, Quart. J. 3 (1860), S. 225.



111) Der allgemeine *lineare Komplex* § 60, (12) („*Strahlengewinde*“ nach *Sturm,* Liniengeometrie 1 (1892), S. 63) tritt zuerst bei *Plücker* (1865), Werke 1, S. 464; 478; Neue Geom., S. 26 auf; vgl. auch *Clebsch* in *Plücker*'s Werken, S. XXX. Die von *Moebius* als „*Nullsystem*“ bezeichnete reziproke Verwandtschaft (vgl. Anm. 119) hatte diesen, J. f. Math. 10 (1833), S. 317 = Werke 1, S. 489; Werke 3, S. 118 ebenfalls auf dasselbe Gebilde geführt.

112) Die *Komplexkoordinaten* § 60, 5 sind von *Klein,* Math. Ann. 2 (1870), S. 368 eingeführt worden; vgl. *Pasch,* J. f. Math. 75 (1873), S. 110.

Die Bedingung § 59, (15) bedeutet, wenn p_k, p_k', die Koordinaten zweier Komplexe sind, daß sich diese in „*involutorischer Lage*“ befinden, nach *Klein,* a. a. O. S. 201; 368 und Math. Ann. 4 (1871), S. 414; Vorles., S. 179; 489. *Pasch,* a. a. O. S. 110.

113) Die *gemeinsamen Transversalen von vier Geraden* § 60, 6 sind nach einer Aufgabe von *Gergonne,* Ann. de math. 17 (1826/27), S. 83 von *Brianchon-Petit,* Corr. polyt. 1 (1808), S. 434; *Steiner,* J. f. Math. 2 (1827), S. 268 = Werke 1, S. 147; Entw., S. 243 = Werke 1, S. 402; *Bobillier-Garbinsky,* Ann. de math. (1827/28), S. 182; *Garbinsky,* J. f. Math. 5 (1830), S 174; *Moebius* (1827), Werke 1, S. 310; *A. Grunert,* Arch. Math. Phys. (1) 1 (1841), S. 136; *A. Cayley,* Cambr. Dubl. math. J. 3 (1843), S. 232 behandelt worden.

114) Der Begriff der *hyperboloidischen Lage* § 60, 7 kommt bei *Steiner,* Entw. (1832), S. 316 = Werke 1, S. 454 vor; den Ausdruck selbst gebraucht *Hermes,* J. f. Math. 56 (1858), S. 218; *Schröter,* Oberflächen, S. 95. Die analytischen Bedingungen § 60, 7 gibt *Salmon-Fiedler,* Vorles. Raum 1, S. 78; *Baltzer,* Geometrie, S. 520; *Jahnke,* Vektorenrechnung, S. 126.

115) Der Satz § 62, 5 geht auf *Cayley,* Quart. J. 1 (1857), S. 10 zurück, der Beweis § 62, 5 auf *Hermes,* J. f. Math. 56 (1858), S. 222; vgl. die synthetische Behandlung bei *Schröter,* Oberflächen, S. 153.

116) Die *Transformation der Linienkoordinaten* ist in der Form § 50, (5) von *Plücker,* Neue Geom. (1868), S. 11 ff.; 155 f. behandelt; die Transformation der Tetraederkoordinaten der Geraden § 63, (19); (20) führt zuerst *Klein,* Dissert. (1868) = Math. Ann. 23, S. 546 durch, indem er zugleich nachweist, daß diese Transformation diejenige lineare Transformation der sechs Variabeln p_k ist, die die Gleichung $P = 0$, § 59, 2 invariant läßt, vgl. ferner *Klein,* Math. Ann. 2 (1870), S. 202; 366; Vorles., S. 189; 491; *Battaglini,* Giornale di mat. 6 (1868), S. 240; *Fiedler,* Darstell. Geom. 3, S. 420.

117) Die Definition der *projektiven Beziehung zweier Grundgebilde 1. Stufe* § 65, 1 gibt *Moebius* (1827), Werke 1, S. 279 („Kollineationsverwandtschaft“); *Steiner,* Entw., S. 4 = Werke 1, S. 242 („projektivisch“); vgl. *v. Staudt,* Beitr., S. 263. Über die *eingehendere Begründnng* vgl. *Klein,* Math. Ann. 6 (1873), S. 139; 7 (1874), S. 531; Vorles., S. 301; *Lüroth,* Math. Ann. 8 (1875), S. 147; *Weierstraß,* Werke 3, S. 161.

Die *Determinante* § 65, (26) betrachtet *v. Staudt,* Beitr., S. 263; über die analytische Darstellung überhaupt vgl. *Fiedler,* Neuere Geom., S. 26; Darst. Geom. 3, S. 243; *C. A. v. Drach,* Kubische Kegelschnitte (1867), S. 15. Die Umformung § 65, 6 nach *Cayley,* Philos. Trans. 148 (1858), S. 436; *Baltzer,* Det., S. 32.

118) Die *Verwandtschaft der Kollineation* („nach der geraden Linie“) für Ebene und Raum ist zuerst von *Moebius* (1823), Werke 1, S. 395; (1827), Werke 1, S. 266 allgemein begründet worden. Die analytische Darstellung in § 67, (1)

zunächst in gemeinen Koordinaten gibt *Moebius,* Werke 1, S. 451; 499; § 69, (1) *Magnus,* J. f. Math. 8 (1832), S. 50; *Chasles,* Deux principes (1837), S. 767; *Plücker,* System (1835), S. 50; System (1846), S. 9. Den Zusammenhang mit den Dreiecks- und Tetraederkoordinaten, der sich in der kanonischen Form § 67, (12); § 69, (19) ausspricht, erkannte *Plücker,* System (1835), S. 54; 70; System (1846), S. 7 im Anschluß an *Moebius;* die multiplizierte kanonische Form § 69, (20) kommt in einem Spezialfall bei *Chasles,* Corr. polyt. 3 (1815), S. 326; allgemeiner Deux principes (1837), S. 745 vor; vgl. auch *Fiedler,* Ges. Zürich 15 (1870), S. 169; *Klein,* Vorles., S. 273 ff.

119) Historisch hat der Begriff der *Reziprozität* drei verschiedene, wenn auch ineinander übergreifende Auffassungen erfahren; vgl. Ausführlicheres bei *Clebsch* in *Plücker*'s Werken 1, S. XVIII; *Kötter,* Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 5, S. 160; ferner *Tropfke,* Geschichte 2, S. 95).

Er erscheint zuerst bei *Brianchon,* J. éc. polyt., cah. 13 (1806); *Poncelet,* Traité (1822), S. 121; J. f. Math. 4 (1829), S. 19; *Plücker,* Entw. 2 (1831), S. 262 als *Polarverwandtschaft in bezug auf eine Kurve oder Fläche 2. Ordnung als Direktrix.*

Eine zweite Auffassung setzt mit *Gergonne* und *Steiner* a. den Anm. 29 a. O. O. ein. Für sie tritt das Prinzip der Dualität *unabhängig von einer Direktrix „zugleich mit den Grundgebilden"* (*Steiner* (1832), Werke, S. 234) als eine Eigenschaft der Figuren („propriété inhérente aux figures de l'étendue", *Chasles,* Deux principes (1837), S. 576) in der Geometrie der Lage *hervor.* Diese Auffassung findet gleichzeitig ihren durchgreifenden *analytischen* Ausdruck in dem von *Plücker* (vgl. Anm. 71) begründeten Gebrauch der Koordinaten der geraden Linie und der Ebene und der symmetrischen Form der Bedingung der vereinigten Lage § 22, (5); § 29, (1); § 47, (5); § 58, (2), womit von vorn herein (*Plücker,* Entw. 1 (1828) und 2 (1831)) die Gleichungen der analytischen Geometrie eine doppelte (duale) Deutung erfahren.

Nach einer dritten von *Moebius* (1827), Werke 1, S. 371; (1833), Werke 1, S. 492 und *Plücker,* Entw. 2 (1831), S. 259; 283; System (1835), S. VII; 73; System (1846), S. 10; 318 begründeten, auch von *Magnus,* Aufgaben 2 (1837), S. 120; *Chasles,* Deux principes (1837), S. 586 aufgenommenen Auffassung ist die Dualität eine der Kollineation (Anm. 118) nebengeordnete *Verwandtschaft,* durch die zwei Ebenen § 67, 7 oder zwei Räume § 69, 6 *aufeinander bezogen werden.*

Die erste Auffassung ist ein Spezialfall der dritten, und zwar gehen die Gleichungen § 67, (16) und § 69, (21) der allgemeinen Reziprozität in die der polaren über, wenn $c_{kl} = c_{lk}$ genommen wird (Magnus, Aufgaben 2, S. 127); ein zweiter Spezialfall der Gleichungen § 69, (21) der Reziprozität im Raume: $c_{kk} = 0$, $c_{kl} = -c_{lk}$ gibt die Verwandtschaft des Nullsystems (Anm. 111).

Die allgemeine Reziprozität ist ihrerseits ein Spezialfall der *Berührungstransformationen,* vgl. *Plücker,* Entw. 2, S. 251; *Lie,* Transformationsgruppen II, S. 17.

120) Die *Gleichung* § 70, (1) *einer Punktgruppe* benutzt *Euler* (Michelsen), Introd. 2, S. 249; über die Gleichung § 70, (10) vgl. *Fiedler,* Neuere Geom., S 10; *Clebsch,* Formen, S. 50; *Clebsch-Lindemann,* Vorles. 1, S. 173.

121) *Komplexe Werte* der Koordinaten § 70, 2 werden schon von *Euler* (Michelsen), Introd., S. 7 in Betracht gezogen; vgl. ferner *Poncelet,* Traité (1822), S. 27; *Plücker,* Entw. 1 (1828), S. V; System (1835), S. 22; 39; *Moebius* (1852), Werke 2, S. 191; *v. Staudt,* Beitr. (1856), S. IV; 76; 94; 114; *August* Progr. d.

Friedr.-Realsch. Berlin 1872; *Klein,* Programm Erlangen (1872) = Math. Ann. 43, S. 78; *O. Stolz*, Math. Ann. 4 (1871), S. 416; *J. Lüroth,* Gött. Nachr. 1873, S. 767; Math. Ann. 8 (1875), S. 145; *Fiedler,* Darst. Geom. 3, S. 45; *Clebsch-Lindemann,* Vorles. 1, S. 173; 2, S. 104; *Klein,* Vorles., S. 353.

122) Die ersten *Kurvengleichungen* in gemeinen Koordinaten § 71, (1) finden sich nach *Cantor,* Geschichte 2, S. 740; 745 bei *Descartes* und *Fermat;* vgl. *Tropfke,* Geschichte 2, S. 416; 419; die Gleichung einer Kurve in *Dreieckskoordinaten* § 71, (7) erscheint bei *Plücker*, J. f. Math. 5 (1829), S. 35 = Werke 1, S. 157.

Die *Oberflächengleichungen* in gemeinen Koordinaten § 72, (1) sind nach *Cantor,* Geschichte 3, S. 401; 755 von *A. Parent* (1700) und *A. C. Clairaut* (1731) betrachtet worden, vgl. *Euler*, Introd. (Michelsen), S. 321 ff. Die Gleichung einer Fläche in *Tetraederkoordinaten* § 72, (4) kommt zuerst bei *Plücker,* System (1846), S. 15 vor.

123) Das Wort *Klasse* ist von *Gergonne*, Ann. de math. 18 (1827/28), S. 151 eingeführt worden. Die *Gleichungen* der Kurven und Flächen n^{ter} Klasse § 71, (1′) und § 72, (1′) sind zuerst von *Plücker* (1829), Werke 1, S. 180; Entw. 2 (1831), S. 2; 264; System (1846), S. 16 gegeben.

124) Der Satz von der *Erhaltung des Grades* einer Kurvengleichung bei Koordinatentransformation § 71, **9** wird nach *Cantor*, Geschichte 3, S. 772 von *de Gua* (1740) bemerkt; für eine Flächengleichung § 72, **4** von *Euler* (Michelsen), Introd. 2, S. 367; daß der Satz auch beim Übergang zu Dreieckskoordinaten fortbesteht, gibt *Plücker,* System (1835), S. 5 an.

Nach § 67, (1), (16) und § 69, (1), (21) bleibt der Grad einer Gleichung auch bei jeder Kollineation und Korrelation derselbe.

125) Der Satz von der *Zahl der Schnittpunkte zweier Kurven* rührt nach *Cantor*, Geschichte 3, S. 426 von *Maclaurin* (1720) her; vgl. *Euler* (Michelsen), Introductio 2, S. 250 ff.; *Pascal,* Repertorium der höheren Mathematik 2, S. 126.

126) Die *Bedeutung* § 71, **13** *des Grades einer Kurve* ist nach *Cantor* 3, S. 404 von *J. Newton* (1706) gegeben; das Verfahren der Bestimmung der Schnittpunkte § 71, **10**; **12** folgt der Entwicklung der Parameterdarstellungen der Geraden (Anm. 60; 75; 80), vgl. *Euler* (Michelsen), Introd. 2, S. 249; *Cauchy,* Exercices 3 (1828), S. 2.

Das Verfahren § 72, **5** zur Bestimmung der Schnittkurve einer Ebene mit einer Fläche rührt nach *Cantor,* Gesch. 3, S. 759 f. von *Clairaut* (1731) her; zugleich mit der Bedeutung § 72, **6** der Ordnung einer Fläche gibt es *Euler,* Introd. 2, S. 367.

Die dualen Methoden § 71, **10**; **12**; § 72, **5**; **7** sind von *Plücker,* Entw. 2 (1831), S. 48; System (1835), S. 290; System (1846), S. 16 geschaffen; vgl. *Hesse,* Vorles. Ebene 2, S. 19; 21; Raum, S. 146.

127) Über die Anfänge der Lehre von den *Raumkurven* § 72, **3** bei *Descartes* (1637), *H. Pitot* (1726) und *A. C. Clairaut* (1731) vgl. *Cantor*, Gesch. 2, S. 743; 3, S. 428; 755; vgl. ferner *Euler,* Introd. 2, S. 382.

Die Gleichungen in Tetraederkoordinaten gibt *Plücker,* System (1846), S. 15.

Die Darstellung der *Abwicklungsflächen* (surfaces développables) durch die *beiden* Gleichungen § 72, **3** gibt *Plücker*, System (1846), S. 17; *Chasles*, Deux principes (1837), S. 634. Die Darstellung des Kegels durch zwei Gleichungen

in Ebenenkoordinaten § 72, (17′) bemerkt *Plücker* (1832), Werke 1, S. 229; vgl. *Hesse,* Vorles. Raum, S. 164.

128) Die Bedeutung der homogenen Gleichung § 71, (16) bemerkt *Euler,* Introd. 2, S. 236; *Plücker,* Entw. 1, S. 43, die der homogenen Gleichung § 72, (16) *Clairaut* (1731) nach *Cantor,* Gesch. 3, S. 756; vgl. *Euler,* Introd. 2, S. 337; für Tetraederkoordinaten § 72, (18) *Plücker,* System (1846), S. 15.

129) Die Darstellung einer *ebenen* Kurve im *Raume* durch die Gleichung § 72, (18′) und einer Punktgruppe auf einer Geraden im Raume durch die Gleichung § 72, (21′) nach *Plücker,* System (1846), S. 17.

130) Den *Grad eines Komplexes* und seine doppelte Bedeutung § 72, **12** erklärt *Plücker* (1865), Werke 1, S. 531; Neue Geom. (1868), S. 18.

Register.

Druckfehler.

S. 32, Z. 1 v. o. lies μ_1, μ_2, μ_0 statt μ_1, μ_1, μ_0.
S. 56, Fig. 84 ist die Gerade mit g zu bezeichnen und im Sinne PP' mit einer Pfeilspitze zu versehen.
S. 61, Fig. 92 fehlt die Benennung O_y' am Schnittpunkt $y \times x'$.
S. 71, Z. 10 v. o. lies *Geraden* statt *Ebene*.
S. 72, Z. 15 v. u. lies (18) statt (17).
S. 75, Fig. 110 fehlt die Benennung N am Ende von p.
S. 79, Z. 10 v. u. lies (18') statt (19).
S. 87, Z. 5 v. u. lies § 18, 8 statt § 19, 8.
S. 88, Fig. 125 lies G_2 statt des einen G_1.
S. 93, Z. 10 v. o. lies (18) statt (17).
S. 97, Fig. 133 lies $t' = 0$ statt $p' = 0$.
S. 122, Z. 8 v. o. lies 31, 24 statt 31, 14.
S. 129, Z. 13 v. u. lies $-p_2 : \sin\vartheta$ statt $-p_2 \sin\vartheta$.
S. 132, Fig. 165b ist die Gerade $T_1 T_2 T_3$ mit p zu bezeichnen.
S. 138, Fig. 168a soll die Gerade durch E_3 statt durch E_1 gehen, in Fig. 168b der Punkt auf e_3 statt auf e_1 liegen.
S. 146, Fig. 172 fehlt bei J der Index 3.
S. 154, Fig. 182 sind die Benennungen P_{yz}, P_{zx}, P_{xy} hinzuzufügen.
S. 160, Fig. 193 ist an OP_{xy} eine Pfeilspitze bei P_{xy} zu setzen.
S. 163, Fig. 194 fehlt die Benennung O des Mittelpunktes.
S. 186, Z. 6 v. o. lies *Längen* statt *Lösungen*.
S. 200, Fig. 240 ist die Pfeilspitze von n zu streichen.
S. 228, in Formel (17') für w lies $1 - \varkappa\lambda$ statt $1 - \lambda$.
S. 252, Fig. 273 lies $x'(a_1 b_1 c_1)$, $y'(a_2 b_2 c_2)$ statt $x'(a_2 b_2 c_2)$, $y'(a_1 b_1 c_1)$.
S. 255, Fig. 276 lies $u', v', s' = p_{23}, \ldots, p_{34}$ statt $u', v' s' = u, v, w, s$.
S. 336, Z. 16 v. o. lies (15) statt (14).
S 352, Fig. 321a lies $v_1 v_2 v_3 (p_k)$ statt $v_1 v_2 v_3 (u_k)$.

Richter, O., die bizirkulare Kurve vierter Ordnung.
Schroeter, H., Theorie der Oberflächen 2. Ordn. u. Raumkurven 3. Ordn.
—— Theorie der ebenen Kurven 3. Ordnung.
—— Grundzüge einer rein geometr. Theorie der Raumkurven 4. O. 1. Sp.
Steiner, J., Vorlesungen über synthetische Geometrie, bearbeitet von Geiser und Schroeter.
Sturm, R., die Gebilde 1. und 2. Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung.
—— synthetische Untersuchungen über Flächen 3. Ordnung.
—— die kubische Raumkurve.
Thomae, J., Untersuchungen über zwei zweideutige Verwandtschaften.
Treutlein und Henrici, siehe: Henrici und Treutlein.
Weyer, E., Einführung in die neuere konstruierende Geometrie.
Weyr, E., Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde.
—— Geometrie der räumlichen Erzeugnisse 1—2deutiger Gebilde.
Witzschel, B., Grundlinien der neueren Geometrie.

5. Topologie (Gestaltenlehre) und Kristallographie.

Brückner, M., Vielecke und Vielflache; Theorie und Geschichte.
Dingeldey, F., topologische Studien usw.
Eberhard, V., die Grundgebilde der ebenen Geometrie.
—— zur Morphologie der Polyeder.
Naumann, F., über die Rationalität der Tangentenverhältnisse.
Schoenflies, A., Kristallsysteme und Kristallstruktur.
Sohncke, L., Entwickelung einer Theorie der Kristallstruktur.
Wiener, C., Vielecke und Vielflache.

6. Abzählende Geometrie.

Schubert, H., Kalkul der abzählenden Geometrie.
Zeuthen, H., die abzählenden Methoden der Geometrie.

7. Geometrie der Bewegung.
(Kinematik.)

Abdank-Abakanowicz, B., die Integraphen, deutsch von Bitterli.
Dingeldey, F., Erzeugung von Kurven 4. Ordnung durch Bewegungsmechanismen.
Schell, W., Theorie der Bewegung und der Kräfte. I. Band.
Schoenflies, A., Geometrie der Bewegung.
Somoff, J., theoretische Mechanik, deutsch von Ziwet. I. Band.

II. Analytische Geometrie (Koordinatengeometrie) und Differentialgeometrie (Flächentheorie).

1. Analytische Geometrie der Ebene.
(Kegelschnitte und höhere ebene Kurven.)

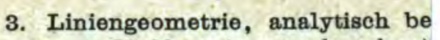
Benter, E., Untersuchungen über Tangentialkegel und die Kurven 2. Gr.
Clebsch, A., Vorlesungen über Geometrie. I. Band, bearb. von Lindemann.
Dingeldey, F., Erzeug. von Kurven 4. O. durch Bewegungsmechanismen.
—— topologische Studien usw.
Durège, H., die ebenen Kurven 3. Ordnung.
Ebner, A., Leitfaden der technisch wichtigen Kurven.
Fiedler, W., die Elemente der neueren Geometrie und die Algebra der binären Formen.
Fort, O., u. O. Schlömilch, Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. Teil.

Ganter, H., u. F. Rudio, Elemente der analytischen Geometrie der Ebene.
Graefe, F., Vorlesungen über die Theorie der Quaternionen.
—— Aufgaben und Lehrsätze aus der analyschen Geometrie der Ebene.
—— —— Auflösungen und Beweise dazu.
Gundelfinger, S., analytische Geometrie der Kegelschnitte, v. Dinegeldy.
Heffter, L., und C. Koehler, Lehrbuch der analytischen Geometrie.
Hesse, O., 7 Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte.
—— Vorlesgn. aus der anal. Geom. der Geraden, des Punktes u. d. Kreises.
—— 4 Vorlesungen aus der analytischen Geometrie.
Hochheim, A., Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene.
Klein, F., Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie.
Kohn, G., rationale Kurven.
Loria, G., die hauptsächl. Theorien der Geometrie in ihrer Entwickelung.
—— spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven; Theorie und Geschichte.
Muth, P., geometrische Anwendungen der Invariantentheorie.
Reichel, O., Vorstufen der höheren Analysis und analytischen Geometrie.
Rudio und Ganter, siehe: Ganter und Rudio.
Runge, C., Lehrbuch der analytischen Geometrie.
Salmon, G., analytische Geometrie der Kegelschnitte, bearb. von Fiedler.
—— analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, bearb. v. Fiedler.
Sauerbeck, P., Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven.
Schlömilch und Fort, siehe: Fort und Schlömilch.
Schwering, K., Theorie und Anwendung der Linienkoordinaten.
Servus, H., die analytische Geometrie der Ebene.
Staude, O., analyt. Geometrie des Punktes, der geraden Linie u. der Ebene.
Thaer, A., Bestimmung von Gestalt und Lage eines Kegelschnittes aus einer Gleichung zweiter Ordnung ohne Koordinaten-Transformation.
Thomae, J., Grundriß der analytischen Geometrie.
Weber, H., und J. Wellstein, Enzyklopädie der Elementar-Geometrie.
Weinnoldt, E., Leitfaden der analytischen Geometrie.
Weißenborn, H., Grundzüge der analytischen Geometrie der Ebene.

2. Analytische Geometrie des Raumes.

(Flächen 2. und höheren Grades, algebraische Raumkurven und Flächen.)

Benter, C., Untersuchungen über Tangentialkegel und die Kurven 2. Gr.
Castelnuovo, G., und F. Enriques, Theorie der algebraischer Flächen.
Clebsch, A., Vorlesungen über Geometrie. II. Band, bearb. v. Lindemann.
Escherich, G. v., Einleitung in die analytische Geometrie des Raumes.
Fort, O., und O. Schlömilch, Lehrbuch der analytischen Geometrie. II. Tl.
Graefe, F., Aufgaben u. Lehrsätze aus der analyt. Geometrie des Raumes.
—— —— Auflösungen und Beweise dazu.
Heffter, L., und C. Koehler, Lehrbuch der analytischen Geometrie.
Hesse, O., Vorlesgn über analyt. Geometrie d. Raumes, rev. v. Gundelfinger.
Klein, F., höhere Geometrie I.
Möbius, F., über die Grundformen der Linien der dritten Ordnung.
—— die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometr. Darstellung.
Reye, T., Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme.
Rohn, K., die Flächen vierter Ordnung.
Rudio, F., die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes.
Salmon, G., analytische Geometrie des Raumes, bearbeitet von Fiedler.
Schlömilch und Fort, siehe: Fort und Schlömilch.
Segre, C., Vorlesungen über algebraische Geometrie.
Staude, O., die Fokaleigenschaften der Flächen 2. Ordnung.
—— Flächen erster Ordnung, ihre Systeme und Durchdringungskurven.
Thomae, J., Grundriß der analytischen Geometrie.





3. Liniengeometrie, analytisch be

(Strahlensysteme u. -komplexe.)

Clebsch, A., Vorlesgn über Geometrie. II. Bd., bear...
Heffter, L., und C. Koehler, Lehrbuch der analytischen Geometrie.
Hesse, O., 4 Vorlesungen aus der analytischen Geometrie.
Lie, S., Geometrie der Berührungstransformationen, bearb. v. Scheffers.
Plücker, J., neue Geometrie des Raumes, herausgegeben von Clebsch und Klein.
—— mathematische Abhandlungen, herausgeg. v. Schoenflies.
Schwering, K., Theorie und Anwendung der Linienkoordinaten.
Sturm, R., die Gebilde 1. und 2. Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung.

4. Differentialgeometrie (Flächentheorie und Kurventheorie).

Bianchi, L., Vorlesungen über Differentialgeometrie.
Bolke, G., die Komplementärflächen der pseudo-sphärischen Rotationsflächen.
Cesàro, E., Vorlesungen über natürliche Geometrie, deutsch von Kowalewski.
Joachimsthal, F., Anwendung der Differential- und Integral-Rechnung auf Flächentheorie.
Klein, F., höhere Geometrie II.
Knoblauch, J., Einleit. in die allgemeine Theorie der krummen Flächen.
—— Differentialgeometrie.
Lilienthal, R. v., Differentialgeometrie.
—— Grundlagen einer Krümmungslehre der Kurvenscharen.
Schell, W., Kurven doppelter Krümmung.
Stäckel, P., Differentialgeometrie höherer Mannigfaltigkeiten.
Stahl, H., und V. Kommerell, Grundformeln der Flächentheorie.
Voß, A., Abbildung und Abwickelung der krummen Flächen.
Wilczinski, E. J., Projective Differential Geometry of Curves.

5. Allgemeine Mannigfaltigkeitslehre.

Graßmann, H., gesammelte Werke. Band I.
Killing, W., die nicht-Euklidischen Raumformen.
Schlegel, V., System der Raumlehre
Schoenflies, A., die Entwic...
faltigkeiten.

6. K...

(Isogonale Verwandtschaft...

Holzmüller, G., Einführ...
wandtschaften.
—— Durchführung einer...
durch eine gebrochene...
—— einige Aufgaben der ...

7. ...

Herz, N., Lehrbuch der L...
Holzmüller, G., einige A...
Kartographie.
Schulze, B., das militäris...
Stavenhagen, W., die ...
Militärkartenwesens.
Zondervan, H., allgemei...
Zöppritz, K., Leitfaden ...